Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 12/11/2012

Exercice 1 Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et à dérivées continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$ on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad \|f\|_0 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f'(t)|dt, \qquad \|f\|_{0,1} = \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)dt.$$

1. Parmi les quatre applications ainsi définies, lesquelles sont des normes sur E ? (dans chaque cas, démontrer qu'il s'agit d'une norme ou démontrer qu'il ne s'agit pas d'une norme).
2. On considère l'application $T : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $f \in E$,
$$T(f) = f(1) - f(0).$$
Montrer que T est une application linéaire et qu'elle est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que T est continue pour la norme $\|\cdot\|_{0,1}$.
4. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que pour tout n, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t)|dt = 0$.
5. A l'aide de la suite f_n, montrer que T n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_0$.

Exercice 2 Soit l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

1. Montrer que C est convexe.
2. A quelle figure géométrique correspond C ? Dessiner l'ensemble C dans un repère tri-dimensionnel $(Ox_1x_2x_3)$.

Exercice 3 Soit un réel $\varepsilon \geq 0$, un entier $n \geq 2$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}.$$

1. En quels points f est-elle différentiable ? (On distinguera les cas $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon > 0$).
2. On se place désormais dans le cas $\varepsilon > 0$. Calculer les dérivées partielles de f et en déduire l'expression de son gradient. Donner également l'expression de $Df(x)(\alpha)$ (différentielle de f en x appliquée en un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$).
3. Pour $1 \leq i \leq n$ on note
$$T_i \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_{i+1} - x_i \end{array} \right. \qquad \phi \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \sqrt{\varepsilon^2 + u^2} \end{array} \right. .$$
   (a) Calculer $DT_i(x)(\alpha)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Donner l'expression de f à l'aide des fonctions ϕ et T_i.
   (c) En déduire l'expression de la différentielle de f en fonction des différentielles des fonctions ϕ et T_i, et retrouver ainsi la formule obtenue à la question 2.