Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 12/11/2012

Exercice 1 Pour tout $f \in E$ on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad \|f\|_0 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f'(t)|dt, \qquad \|f\|_{0,1} = \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)dt.$$

1. Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. D'abord l'application est bien définie car toute fonction dans E est continue donc bornée sur $[0,1]$. Ensuite pour tous $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $* \ \|f\|_\infty \geq 0,$

   $$* \ \|f+g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)+g(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)|+|g(t)|) \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

   $$* \ \|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

   $$* \ \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] \ f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

   Donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur E.

   Montrons que $\|\cdot\|_0$ est une norme. L'application est bien définie car toute fonction dans E est continue donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tous $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

   $* \ \|f\|_0 \geq 0,$

   $$* \ \|f+g\|_0 = \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|dt, \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\|_0 + \|g\|_0,$$

   $$* \ \|\lambda f\|_0 = \int_0^1 |\lambda f(t)|dt = \int_0^1 |\lambda||f(t)|dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|dt = |\lambda|\|f\|_0,$$

   $$* \ \|f\|_0 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(t)|dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] \ f(t) = 0 \text{ (car } f \text{ continue)} \Leftrightarrow f = 0.$$

   Donc $\|\cdot\|_0$ est bien une norme sur E.

   $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme car elle vaut 0 pour les fonctions constantes. On a donc pas l'équivalence $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

   Montrons que $\|\cdot\|_{0,1}$ est une norme. L'application est bien définie car toute fonction dans E est continue ainsi que sa dérivée, qui sont donc intégrables sur $[0,1]$. Pour tous $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

   $* \ \|f\|_{0,1} \geq 0,$

$* \; \|f+g\|_{0,1} = \displaystyle\int_0^1 |f(t)+g(t)| + |f'(t)+g'(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)| + |g(t)| + |f'(t)||f'(t)|dt,$

$\leq \displaystyle\int_0^1 |f(t)| + |f'(t)|dt + \int_0^1 |g(t)||g'(t)|dt = \|f\|_{0,1} + \|g\|_{0,1},$

$* \; \|\lambda f\|_{0,1} = \displaystyle\int_0^1 |\lambda f(t) + \lambda f'(t)|dt = \int_0^1 |\lambda|(|f(t)| + |f'(t)|)dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| + |f'(t)|dt =$ $|\lambda|\|f\|_{0,1},$

$* \; \|f\|_{0,1} = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 |f(t)| + |f'(t)|dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] \; f(t) = 0$ (car f continue) $\Leftrightarrow f = 0$.

2. Pour tous $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda f+g) = (\lambda f(1)+g(1)) - (\lambda f(0)+g(0)) = \lambda(f(1)-f(0)) + (g(1)-g(0)) = \lambda T(f) - T(g).$$

Donc T est linéaire. De plus on a

$$|T(f)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 2\|f\|_\infty,$$

donc T est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Pour tout $f \in E$ on a

$$|T(f)| = |f(1) - f(0)| = |\int_0^1 f'(t)dt| \leq \int_0^1 |f'(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)| + |f'(t)|dt = \|f\|_{0,1}.$$

Donc T est continue pour la norme $\|\cdot\|_{0,1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$ on pose $f_n(t) = t^{n+1}$. On a bien $f_n \in E$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, et

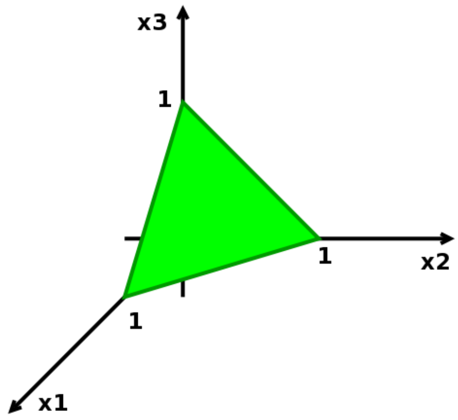
$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 t^{n+1}dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

5. Si T était continue pour la norme $\|\cdot\|_0$, il existerait $C > 0$ tel que $T(f) \leq C\|f\|_0$ pour tout $f \in E$, et donc on aurait $T(f_n) \leq C\|f_n\|_0$ pour tout $n \geq 0$. Or $T(f_n) = f_n(1) - f_n(0) = 1 - 0 = 1$ et $\|f_n\|_0 = \int_0^1 |f_n(t)|dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$. En passant à la limite on obtient $1 \leq 0$. Donc T n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_0$.

Exercice 2

1. C est convexe car c'est l'intersection de trois demi-espaces et du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, qui sont tous des ensembles convexes. On peut aussi le vérifier directement : soient $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$, et $z = x + \lambda(y - x)$. On a
$* \; z_1 = x_1 + \lambda(y_1 - x_1) = x_1 + \lambda y_1 - \lambda x_1 \geq x_1 - \lambda x_1 \geq 0$ car $\lambda \leq 1.$,
$*$ de même $z_2 \geq 0$ et $z_3 \geq 0$,
$* \; z_1 + z_2 + z_3 = [x_1 + \lambda(y_1 - x_1)] + [x_2 + \lambda(y_2 - x_2)] + [x_3 + \lambda(y_3 - x_3)] = (x_1 + x_2 + x_3) + \lambda\,[(y_1 + y_2 + y_3) - (x_1 + x_2 + x_3)] = 0.$
Donc $z \in C$, ce qui prouve que C est convexe.

2. C est le triangle plein délimité par les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.



Exercice 3

1. f est la somme de fonctions racine composée avec des fonctions polynômiales. f est donc différentiable tant que les expressions sous la racine sont non nulles.
   Dans le cas $\varepsilon > 0$ il n'y a pas de problème car alors $\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 \geq \varepsilon^2 > 0$ pout tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc lorsque $\varepsilon > 0$ f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
   Dans le cas $\varepsilon = 0$ $\sqrt{\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 \geq \varepsilon^2}$ sera différentiable dès que $x_{i+1} \neq x_i$. Donc f est différentiable sur $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, x_{i+1} \neq x_i\}$.
2. Pout tout $x \in \mathbb{R}^n$,

   $$f(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + (x_3 - x_2)^2} + \cdots + \sqrt{\varepsilon^2 + (x_{n-1} - x_{n-2})^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}.$$

   x_1 n'apparaît que dans le premier terme de cette somme. On a donc

   $$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2(x_1 - x_2)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}}. \end{aligned}$$

   Pour $2 \leq i \leq n-1$, x_i apparaît dans deux termes, donc on a alors :

   $$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + (x_i - x_{i-1})^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}\right) \\ &= \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + \frac{x_i - x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}. \end{aligned}$$

   Enfin x_n n'apparaît que dans le dernier terme, et donc

   $$\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}\right) = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}.$$

   Ainsi

   $$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} \\ \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} + \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_3 - x_2)^2}} \\ \cdots \\ \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_{n-1} - x_{n-2})^2}} + \frac{x_{n-1} - x_n}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}} \\ \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}, \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
Df(x)(\alpha) &= \langle \nabla f(x), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \alpha_i \\
&= \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} \right) \alpha_1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} + \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_3 - x_2)^2}} \right) \alpha_2 \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_{n-1} - x_{n-2})^2}} + \frac{x_{n-1} - x_n}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}} \right) \alpha_{n-1} \\
&\quad + \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}} \right) \alpha_n.
\end{aligned}$$

Cette formule se simplifie en regroupant les fractions ayant le même dénominateur :

$$\begin{aligned}
Df(x)(\alpha) &= \frac{(x_1 - x_2)\alpha_1 + (x_2 - x_1)\alpha_2}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} + \cdots + \frac{(x_{n-1} - x_n)\alpha_{n-1} + (x_n - x_{n-1})\alpha_n}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}} + \cdots + \frac{(x_n - x_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}.
\end{aligned}$$

3. (a) T_i est différentiable car linéaire, et on a $DT_i(x)(\alpha) = \alpha_{i+1} - \alpha_i$.
   (b) On a
   $$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \phi(T_i(x)).$$
   (c) On écrit la règle de différentiation des fonctions composées :
   $$\begin{aligned}
   Df(x)(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n-1} D\phi(T_i(x))(DT_i(x)(\alpha)) \\
   &= \sum_{i=1}^{n-1} \phi'(T_i(x)) DT_i(x)(\alpha) \\
   &= \sum_{i=1}^{n-1} \phi'(x_{i+1} - x_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i).
   \end{aligned}$$
   Or $\phi'(u) = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}}$, donc finalement
   $$Df(x)(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} (\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$