Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 04/11/2013

Exercice 1 On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit $y \in E$ un vecteur fixé non nul, et f la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \langle x, y \rangle \, e^{-\|x\|^2}. \tag{1}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f et en déduire son gradient.
2. Montrer que si x est un point critique de f alors x est colinéaire à y, puis déterminer les points critiques de f.
3. On se place à présent dans la cas plus général où E est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire et on considère la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ définie par la même formule (1). Montrer que f est différentiable, exprimer sa différentielle, son gradient et ses points critiques dans ce cas. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si g et h sont deux applications différentiables de E dans $\mathbb{R}$, alors $f = gh$ est différentiable et l'on a pour tous $x \in E$, $\alpha \in E$,

$$df(x).\alpha = (dg(x).\alpha)h(x) + g(x)(dh(x).\alpha).$$

Exercice 2 Soit $p_1, \dots, p_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - p_i\|^2,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne usuelle. Montrer que f admet un minimum unique sur $\mathbb{R}^2$ en un point que l'on déterminera. Interpréter le résultat en termes géométriques.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel. On appelle cône un sous-ensemble C de E tel que pour tout $x \in C$ et tout $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in C$.

1. Donner deux exemples de cônes dans $E = \mathbb{R}^2$, tels que l'un soit un ensemble convexe et l'autre non (les décrire précisément avec une notation ensembliste).
2. On suppose à présent que E est un espace de Hilbert. Soit C un cône convexe fermé de E, et π_C l'application de projection sur C. Soit $x \in E$ fixé et $y = \pi_C(x)$. En utilisant la caractérisation du projeté en termes de produits scalaires, montrer que l'on a

$$\langle y, y - x \rangle = 0.$$