Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Correction de l'examen partiel du 04/11/2013

Exercice 1

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \langle x, y \rangle \, e^{-\|x\|^2}. \tag{1}$$

1. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle x, y \rangle \right) e^{-\|x\|^2} + \langle x, y \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{-\|x\|^2} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle x, y \rangle \right) e^{-\|x\|^2} - \langle x, y \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\|x\|^2 \right) e^{-\|x\|^2}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les règles de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$.
Or $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_i y_i + \cdots + x_n y_n$, donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle x, y \rangle \right) = y_i.$$

De même $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2$, donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\|x\|^2 \right) = 2x_i.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} &= y_i e^{-\|x\|^2} - 2 \langle x, y \rangle x_i e^{-\|x\|^2} \\ &= e^{-\|x\|^2} \left(y_i - 2 \langle x, y \rangle x_i \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\nabla f(x) = e^{-\|x\|^2} \left(y - 2 \langle x, y \rangle x \right).$$

2. x est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\|x\|^2} \left(y - 2 \langle x, y \rangle x \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 2 \langle x, y \rangle x = 0 \quad \text{(car l'exponentielle est strictement positive)} \\ &\Leftrightarrow \quad y = 2 \langle x, y \rangle x \end{aligned}$$

Ceci montre que x et y sont colinéaires. Puisque $y \neq 0$, on peut écrire $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'égalité $y = 2 \langle x, y \rangle x$ s'écrit alors

$$y = 2 \langle \lambda y, y \rangle \lambda y = 2\lambda^2 \langle y, y \rangle y = 2\lambda^2 \|y\|^2 y,$$

et donc on doit avoir $2\lambda^2 \|y\|^2 = 1$, soit encore $\lambda^2 = \frac{1}{2\|y\|^2}$. On a donc deux solutions pour λ : $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\|y\|}$, ce qui donne deux points critiques :

$$x = \frac{y}{\sqrt{2}\,\|y\|} \qquad \text{et} \qquad -\frac{y}{\sqrt{2}\,\|y\|}.$$

3. On a $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g(x) = \langle x, y\rangle$ et $h(x) = e^{-\|x\|^2} = \phi \circ u(x)$ où $u(x) = \|x\|^2$ et $\phi(r) = e^{-r}$. La fonction g est linéaire donc différentiable est sa différentielle vaut

$$dg(x).\alpha = \langle \alpha, y\rangle .$$

Les fonctions ϕ et u sont différentiables et leurs différentielles valent

$$d\phi(r).s = -e^{-r}s \qquad \text{et} \qquad du(x).\alpha = 2\langle x, \alpha\rangle .$$

Donc la fonction h est différentiable en tant que composée de deux fonctions différentiables, et sa différentielle vaut $dh(x).\alpha = d\phi(u(x)).du(x).\alpha = -e^{-\|x\|^2}2\langle x, \alpha\rangle$. Finalement f est donc différentiable en tant que produit de deux fonctions différentiables et on a

$$\begin{aligned} df(x).\alpha &= (dg(x).\alpha)h(x) + g(x)(dh(x).\alpha) \\ &= \langle y, \alpha\rangle e^{-\|x\|^2} - \langle x, y\rangle e^{-\|x\|^2}2\langle x, \alpha\rangle \\ &= e^{-\|x\|^2}\left(\langle y, \alpha\rangle - 2\langle x, y\rangle \langle x, \alpha\rangle\right). \end{aligned}$$

Pour obtenir le gradient à partir de la différentielle on écrit la différentielle sous frome d'un produit scalaire avec α :

$$df(x).\alpha = \left\langle e^{-\|x\|^2}\left(y - 2\langle x, y\rangle x\right), \alpha\right\rangle .$$

Puisque par définition on a $df(x).\alpha = \langle \nabla f(x), \alpha\rangle$, on en déduit que

$$\nabla f(x) = e^{-\|x\|^2}\left(y - 2\langle x, y\rangle x\right).$$

On retrouve donc bien l'expression du gradient obtenue dans la cas euclidien.

Exercice 2 La fonction f admet un minimum car elle est continue et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. De plus f est de classe C^1. En effet on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_1 - p_{i,1})^2 + (x_2 - p_{i,2})^2,$$

donc f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_1 - p_{i,1}) = 2nx_1 - 2\sum_{i=1}^{n}p_{i,1},$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_2 - p_{i,2}) = 2nx_2 - 2\sum_{i=1}^{n}p_{i,2}.$$

Ces dérivées partielles sont des fonctions continues donc f est C^1. Le gradient vaut

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2nx_1 - 2\sum_{i=1}^{n}p_{i,1} \\ 2nx_2 - 2\sum_{i=1}^{n}p_{i,2} \end{pmatrix} = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Puisque f est C^1, le point x qui minimise f doit vérifier $\nabla f(x) = 0$, ce qui donne

$$2nx - 2\sum_{i=1}^{n}p_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Par conséquence la fonction f est minimisée pour $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$, ce qui correspond au barycentre des points p_i.

Exercice 3

1. Comme exemples de cône convexe de $\mathbb{R}^2$ on peut prendre $\mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R}_+)^2$, $\mathbb{R} \times 0$, $0 \times \mathbb{R}_-$. Pour des cônes non convexes : $(\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R})$, $(\mathbb{R}_+)^2 \cup (\mathbb{R}_-)^2$.
2. La caractérisation du projeté en termes de produits scalaires dit que $y = \pi_C(x)$ est l'unique point de C qui vérifie
$$\forall z \in C, \quad \langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$
Puisque C est un cône, tous les points λy pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sont dans C, en particulier $0 \times y = 0 \in C$ et $2y \in C$. En choisissant $z = 0$ puis $z = 2y$ dans la caractérisation, on obtient
$$\begin{cases} \langle x - y, 0 - y \rangle \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \langle x - y, y \rangle \geq 0, \\ \langle x - y, 2y - y \rangle \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \langle x - y, y \rangle \leq 0, \end{cases}$$
et donc finalement $\langle x - y, y \rangle = 0$.