Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 05/11/2014

Exercice 1 On considère l'ensemble $E = C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions infiniement dérivables sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $N_\infty : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall f \in E, \qquad N_\infty(f) = \sup\left\{|f(x)|, x \in [0,1]\right\},$$
est bien définie sur E et que c'est une norme sur cet espace.
2. Pour tout $f \in E$ on pose $T(f) = f'$. Montrer que $T(f) \in E$ pour tout $f \in E$, et que T est une application linéaire.
3. En considérant les fonctions $f_n(x) = \cos(2\pi n x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que T n'est pas une application continue sur E muni de la norme N_∞.
4. On se demande s'il est possible de trouver une autre norme N sur E telle que l'application T devienne continue pour la norme N. En considérant les fonctions $g_n(x) = \exp(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que c'est en fait impossible.

Exercice 2

1. Rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe C dans un espace vectoriel réel E.
2. Soient F et G deux espaces vectoriels réels, et $E = F \times G$. Montrer que si C est un sous-ensemble convexe de F et D est un sous-ensemble convexe de G alors $C \times D$ est un sous-ensemble convexe de E.
3. Rappeler la définition de la projection $\pi_C(x)$ d'un point x sur un convexe fermé non vide C dans un espace euclidien.
4. On suppose à présent que $F = \mathbb{R}^p$, $G = \mathbb{R}^q$ et $E = \mathbb{R}^n$ avec $n = p+q$, et on considère les normes euclidiennes canoniques sur ces espaces. On suppose de plus que $C \subset F$ et $D \subset G$ sont des sous-ensembles convexes fermés non vides. On considère deux points $x_F \in F$, $x_G \in G$, et leurs projetés $\bar{x}_F = \pi_C(x_F)$, $\bar{x}_G = \pi_D(x_G)$. Montrer que $\bar{x} = (\bar{x}_F, \bar{x}_G)$ est le projeté de $x = (x_F, x_G)$ sur $C \times D$ *(indication : montrer que pour tout $y \in C \times D$, $\|y - x\| \geq \|x - \bar{x}\|$)*.
5. A présent $F = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}^2$, $C = [0,1]$ et D est le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Donner sans démonstration les expressions des projections sur C et sur D, et en déduire l'expression de la projection sur $C \times D$ grâce au résultat précédent.
6. Représenter dans un repère tri-dimensionel l'ensemble $C \times D$ ainsi que le point $x = (2,2,0)$ et son projeté $\bar{x}$.