Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 05/11/2014 - Correction

Exercice 1

1. Toute fonction de E est continue donc bornée sur l'intervalle $[0,1]$. Donc N_∞ est bien définie sur E. Vérfifions que c'est une norme :
   - Pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) \geq 0$ car $|f(x)| \geq 0$ donc $\sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \geq 0$.
   - Pour tout $f \in E$,
   $$\begin{aligned} N_\infty(f) = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0. \end{aligned}$$
   - Pour tous $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} N_\infty(\lambda f) &= \sup\{|\lambda f(x)|, x \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|\lambda| \times |f(x)|, x \in [0,1]\} \\ &= |\lambda| \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \\ &= |\lambda| N_\infty(f). \end{aligned}$$
   - Pour tous $f, g \in E$,
   $$\begin{aligned} N(f+g) &= \sup\{|f(x)+g(x)|, x \in [0,1]\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)|, x \in [0,1]\} \\ &\leq \sup\{N_\infty(f) + |g(x)|, x \in [0,1]\} \\ &\leq N_\infty(f) + \sup\{|g(x)|, x \in [0,1]\} \\ &\leq N_\infty(f) + N_\infty(g). \end{aligned}$$

   Ainsi N_∞ est bien une norme sur E.
2. Pour tout $f \in E$, f est dérivable donc $T(f) = f'$ est bien définie. De plus, puisque f est infiniement dérivable, f' l'est aussi et donc $f' = T(f) \in E$. Montrons que T est linéaire : pour tous $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :
   $$T(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
   Donc T est bien une application linéaire.
3. Si T était continue pour la norme N_∞, il existerait une constante $\alpha > 0$ telle que
   $$\forall f \in E, \quad N_\infty(T(f)) \leq \alpha N_\infty(f).$$
   Supposons que c'est vrai. Les fonctions $f_n(x) = \cos(2\pi n x)$ sont bien dans E car infiniement dérivables, donc on peut écrire l'inégalité précédente pour ces fonctions :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_\infty(T(f_n)) \leq \alpha N_\infty(f_n).$$

Or

$$N_\infty(f_n) = \sup\{|\cos(2\pi nx)|, x \in [0,1]\} = 1$$

car $|\cos(2\pi nx)|$ est toujours inférieur ou égal à 1 et vaut 1 lorsque $x = 0$.
De plus si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} N_\infty(T(f_n)) &= N_\infty(f_n') = \sup\{|-2\pi n\sin(2\pi nx)|, x \in [0,1]\} \\ &= 2\pi n \sup\{|\sin(2\pi nx)|, x \in [0,1]\} \\ &= 2\pi n \end{aligned}$$

car $|\sin(2\pi nx)|$ est toujours inférieur ou égal à 1 et vaut 1 lorsque $x = \frac{1}{4n}$ (car alors $\sin(2\pi nx) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$). L'inégalité précédente devient donc :

$$\forall n \leq 1, \quad 2\pi n \leq \alpha \times 1.$$

Ceci est impossible dès que $n > \frac{\alpha}{2\pi}$. Ainsi l'hypothèse est fausse et donc T n'est pas continue.

4. On reprend le même raisonnement : on suppose que T est continue pour la norme N, et donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \quad N(T(f)) \leq \alpha N(f).$$

Les fonctions $g_n(x) = \exp(nx)$ sont infiniement dérivables ; on peut donc leur appliquer l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(T(g_n)) \leq \alpha N(g_n).$$

Ici on ne peut pas calculer $N(g_n)$ car la norme N est quelconque, mais par contre on remarque que $g_n'(x) = n\exp(nx) = ng_n(x)$, et donc

$$N(T(g_n)) = N(g_n') = N(ng_n) = nN(g_n).$$

L'inégalité devient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nN(g_n) \leq \alpha N(g_n).$$

En divisant par $N(g_n)$ (qui est non nul car g_n n'est pas la fonction nulle), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq \alpha,$$

ce qui est impossible dès que $n > \alpha$. Ainsi T ne peut pas être continue quelle que soit la norme sur E.

Exercice 2

1. Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel réel E est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
2. Soient $x = (x_F, x_G)$ et $y = (y_F, y_G)E$ deux éléments de $C \times D$, et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(x_F, x_G) + (1-\lambda)(y_F, y_G) \\ &= (\lambda x_F + (1-\lambda)y_F, \lambda x_G + (1-\lambda)y_G). \end{aligned}$$

Or x_F et y_F sont dans C qui est convexe donc $\lambda x_F + (1-\lambda)y_F \in C$. De même $\lambda x_G + (1-\lambda)y_G \in D$ car $x_G, y_G \in D$ qui est convexe. Donc $\lambda x + (1-\lambda)y = (\lambda x + (1-\lambda)y_F, \lambda x_G + (1-\lambda)y_G) \in C \times D$, ce qui prouve que $C \times D$ est convexe.

3. Soit E un espace euclidien, C un ensemble convexe fermé non vide de E, et $x \in E$. Il existe un unique point $\pi_C(x)$ dans C qui soit le plus proche de x parmi les points de C, c'est-à-dire tel que pour tout $y \in C$, $\|\bar{x} - x\| \leq \|y - x\|$. Ce point est appelé projeté de x sur C.
4. On doit montrer que pour tout $y \in C \times D$, $\|y-x\| \geq \|x-\bar{x}\|$. Ceci correspond à l'inégalité de la définition du projeté de x sur $C \times D$, et par conséquent permettra de conclure que $\bar{x} = \pi_{C\times D}(x)$ puisque par d'après la définition, $\pi_{C\times D}(x)$ est l'unique point de $C \times D$ qui vérifie cette propriété. On a, pour tout $y = (y_F, y_G) \in C \times D$,

$$\|y - x\| = \|(y_F, y_G) - (x_F, x_G)\| = \|(y_F - x_F, y_G - x_G)\| = \sqrt{\|y_F - x_F\|^2 + \|y_G - x_G\|^2}.$$

   Or

$$\|y_F - x_F\| \geq \|\bar{x}_F - x_F\|$$

   puisque $\bar{x}_F$ est le projeté de x_F sur C. De même,

$$\|y_G - x_G\| \geq \|\bar{x}_G - x_G\|.$$

   Donc

$$\|y - x\| \quad \geq \quad \sqrt{\|\bar{x}_F - x_F\|^2 + \|\bar{x}_G - x_G\|^2} = \|(\bar{x}_F - x_F, \bar{x}_G - x_G)\| = \|\bar{x} - x\|.$$

   Par conséquent $\bar{x}$ est bien le projeté de x sur $C \times D$.
5. Le projeté de $x \in \mathbb{R}$ sur $[0,1]$ vaut :

$$\pi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ x \text{ si } x \in [0,1], \\ 1 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

   On peut l'écrire en une seule expression ainsi :

$$\pi_{[0,1]}(x) = \min(1, \max(x, 0)).$$

   Le projeté de $x \in \mathbb{R}^2$ sur $D = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ vaut :

$$\pi_D(x) = \begin{cases} x \text{ si } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|} \text{ si } \|x\| > 1, \end{cases}$$

   soit encore

$$\pi_D(x) = \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

   D'après le résultat précédent, le projeté de $x = (x_F, x_G)$ sur $C \times D$ s'écrit

$$\pi_{C\times D}(x) = (\pi_C(x_F), \pi_D(x_G)) = \left(\min(1, \max(x_F, 0)), \frac{x}{\max(1, \|x_G\|)}\right).$$

   En coordonnées on a $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_F = x_1$ et $x_G = (x_2, x_3)$, donc $\|x_G\| = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Ainsi

$$\pi_{C\times D}(x) = \left(\min(1, \max(x_1, 0)), \frac{x_2}{\max(1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2})}, \frac{x_3}{\max(1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2})}\right).$$

6. $C \times D$ est un cylindre, et le projeté du point $x = (2, 2, 0)$ est égal à

$$\pi_{C\times D}(x) = \left(\min(1, \max(2,0)), \frac{2}{\max(1, \sqrt{2^2+0^2})}, \frac{0}{\max(1, \sqrt{2^2+0^2})}\right) = (1, 1, 0).$$