Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Espaces euclidiens et optimisation - Licence 3e année
Examen partiel du 17/11/2015

Exercice 1 Est-ce que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^3$?

1. $N_1(x) = \min(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$,
2. $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3|$,
3. $N_3(x) = \sup\{|x_1 + tx_2 + t^2 x_3|, t \in [-1, 1]\}$.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, sur lequel on considère la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Pour tout $f \in E$, on définit l'application $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad Tf(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, Tf est élément de E.
2. Montrer que $T : f \mapsto Tf$ est une application linéaire de E dans E, continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, et que la norme subordonnée $|||T|||$ vérifie $|||T||| \leqslant 1$.
3. En considérant la suite $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$, montrer que $|||T||| = 1$.

Exercice 3

1. Montrer que
$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2.
2. Déterminer la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer la distance, pour ce produit scalaire, de X^2 au sous-espace
$$F = \{aX + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 4 Soit E un espace euclidien, et $C \subset E$ un ensemble convexe, fermé et non vide.

1. Soit $x \in E$. Rappeler la définition du projeté $\pi_C(x)$ de x sur C, ainsi que la caractérisation de $\pi_C(x)$ en terme de produit scalaire.
2. Soit $\bar{x} \in C$. On note D l'ensemble
$$D = \{x \in E,\ \pi_C(x) = \bar{x}\}.$$
En utilisant la caractérisation du projeté en terme de produit scalaire, montrer que D est convexe.
3. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble D dans le cas où $C = [0,1]^2$ et $\bar{x} = (1,1)$.