PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation, Licence 3ème année

Examen 2e session, mardi 7 juin 2011, durée = 1h30

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et tout appareil électronique. La notation tiendra compte du soin et de la qualité de la rédaction.

Cours Soient $(E, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé de dimension n et B une forme bilinéaire symétrique définie sur $E \times E$. On note Q la forme quadratique associée à B et M la matrice associée à B dans une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E.

1. Rappeler les définitions de Q et M.
2. Soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de M. Montrer que $\forall\, x \in E, \lambda_1 |x|^2 \leq B(x) \leq \lambda_n |x|^2$.

Exercice 1 Rechercher les éventuels extrema de la fonction

$$\begin{array}{rll} g: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longrightarrow -\dfrac{x^2}{z} + xyz - z - y. \end{array}$$

Exercice 2 Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$\begin{array}{rll} f: &]0, +\infty[^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow x \log(y) + y \log(x) + a(x^3 + y^3). \end{array}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2.
2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f admet un extremum en $(1, 1)$ et préciser la nature de cet extremum.

Exercice 3 On considère une fonction J définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, et vérifiant la propriété de coercivité

$$\lim_{|x| \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

1. Montrer que J admet une borne inférieure d et qu'il existe une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que
$$\lim_{k \to +\infty} J(x_k) = d.$$
2. Montrer que $(x_k)_{k \geq 1}$ est bornée.
3. En déduire qu'il existe une suite convergente $(y_k)_{k \geq 1}$ telle que $\lim_{k \to +\infty} J(y_k) = d$.
4. Prouver qu'il existe un élément $x^\star$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $J(x) \geq J(x^\star)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
5. On considère la fonctionnelle quadratique J définie par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >,$$
où A est une matrice symétrique définie positive de taille $n \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que J admet un minimum global.