Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen de deuxième session - 15/06/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $\varphi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Montrer que φ est continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que φ n'est pas continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ (*indication : considérer la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$*).

Exercice 2 On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } J(x_1,x_2) = x_1^3 x_2 \\ \text{sous la contrainte } x_1^3 - x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

1. Résoudre (P) en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.
2. Retrouver le résultat en se ramenant à la minimisation sans contrainte d'une fonction d'une variable réelle.

Exercice 3 On cherche à calculer la projection d'un point $y \in \mathbb{R}^2$ sur l'ensemble

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 \leq x_2\right\}.$$

1. Rappeler l'énoncé du théorème de projection sur un convexe.
2. A quel ensemble géométrique correspond C ? Faire une représentation graphique de C.
3. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction, où E est un espace vectoriel, et $C_g = \{x \in E, g(x) \leq 0\}$. Montrer que si g est convexe alors C_g est convexe.
4. Utiliser le résultat précédent pour montrer que C est convexe.
5. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ le problème de projection sur C admet une solution unique y^* et écrire ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte inégalité d'une fonctionnelle J.
6. Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange au problème d'optimisation précédent, et montrer que dans le cas non trivial on se ramène à une équation du troisième degré (on ne cherchera pas à résoudre cette équation pour y quelconque).
7. Calculer y^* dans les cas suivants : $y = (-1, 1/2)$, $y = (3, 0)$, $y = (0, 1)$. Sur le graphique de la question 1, représenter le segment joignant y à y^* dans les trois cas.