Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Correction de l'examen de deuxième session du 15/06/2012

Exercice 1

1. Soient $f, g \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $h = \alpha f + \beta g$. On a
$$\varphi(h) = h(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g),$$
ce qui prouve que φ est une application linéaire.

2. Soit $f \in E$. On a
$$|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$
Donc φ est une application linéaire continue.

3. On a $\varphi(f_n) = f_n(1) = 1^n = 1$, et $\|f_n\|_2 = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Si φ était continue pour la norme $\|\cdot\|_2$, alors il existerait $M > 0$ tel que $\forall f \in E$, $|\varphi(f)| \leq M\|f\|_2$. Donc on aurait $\forall n \geq 0, |\varphi(f_n)| \leq M\|f_n\|_2$, c'est-à-dire $\forall n \geq 0, 1 \leq \frac{M}{n+1}$, et donc en passant à la limite $1 \leq 0$. On a donc une contradiction, ce qui signifie que φ n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 2 On considère le problème suivant :
$$(P)\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } J(x_1, x_2) = x_1^3 x_2\\ \text{sous la contrainte } x_1^3 - x_2 - 1 = 0.\end{array}\right.$$

1. La fonction J et la fonction $h(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2 - 1$ définissant la contrainte sont de classe C^1, et on peut remarquer que lorsque x tend vers l'infini sous la contrainte, alors x_1 et x_2 tendent tous les deux vers l'infini en étant de même signe, ce qui implique que $J(x_1, x_2)$ tend vers $+\infty$. Par conséquent la fonction J admet un minimum (pas forcément unique) sur l'ensemble des contraintes, et $\nabla h(x_1, x_2) = (3x_1^2, -1)$ étant toujours non nul, ce minimum vérifie la condition d'optimalité sous contrainte : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left\{\begin{array}{l}\nabla J(x) + \lambda\nabla h(x) = 0\\ h(x) = 0\end{array}\right. .$$

Or on a $\nabla J(x_1,x_2) = (3x_1^2 x_2, x_1^3)$ et $\nabla h(x_1,x_2) = (3x_1^2, -1)$. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1^2x_2 + 3\lambda x_1^2 = 0 \\ x_1^3 - \lambda = 0 \\ x_1^3 - x_2 - 1 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2 x_2 + x_1^5 = 0 \\ \lambda = x_1^3 \\ x_2 = x_1^3 - 1, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \lambda = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x_2 + x_1^3 = 0 \\ \lambda = x_1^3 \\ x_2 = x_1^3 - 1, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \lambda = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x_2 + 1 = 0 \\ \lambda = x_1^3 \\ x_1^3 = x_2 + 1, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \lambda = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x_2 = -1/2 \\ \lambda = 1/2 \\ x_1 = \sqrt[3]{1/2}. \end{array}\right.$$

On a donc deux points candidats : $(0,-1)$ et $(\sqrt[3]{1/2}, -1/2)$. Or

$$J(0,-1) = 0 \text{ et } J(\sqrt[3]{1/2}, -1/2) = -1/4.$$

Donc J admet un minimum unique en $(\sqrt[3]{1/2}, -1/2)$ sur l'ensemble de contraintes.

2. Sous la contrainte on a l'égalité $x_1^3 = x_2 + 1$; et donc en reportant cette égalité dans l'expression de J, on voit qu'on est ramené à minimiser la fonction $f(x_2) = (x_2+1)x_2$. Or cette fonction est un polynôme du second degré, admettant pour racines 0 et -1, et minimale en $x_2 = -1/2$. Ainsi le minimum de J sur l'ensemble des contraintes est le point (x_1, x_2) avec $x_2 = -1/2$ et $x_1 = \sqrt[3]{x_2+1} = \sqrt[3]{1/2}$.

Exercice 3 On cherche à calculer la projection d'un point $y \in \mathbb{R}^2$ sur l'ensemble

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 \leq x_2\right\}.$$

1. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^d$, et $y \in \mathbb{R}^d$. Alors il existe un point $\bar{y} \in C$ unique vérifiant

$$\forall x \in C, \quad \|x - \bar{y}\| \leq \|x - y\|.$$

Ce point est appelé projeté de y sur C.

2. C correspond à la partie du plan délimitée par la parabole d'équation $x_2 = x_1^2$.
3. Soient $x, y \in C_g$, $\lambda \in [0,1]$, et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $g(z) = g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$ car g est convexe. Or λ et $1-\lambda$ sont positifs, et $g(x)$ et $g(y)$ sont négatifs car x et y sont dans C_g. Ainsi $g(z) \leq 0$ et donc $z \in C_g$, ce qui prouve que C_g est convexe.
4. On a $C = C_g$ avec $g(x_1, x_2) = x - 1^2 - x_2$. Or g est une fonction de classe C^2 et sa matrice hessienne est égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont positives. Par conséquent g est une fonction convexe, et d'après le résultat précédent on en déduit que C est convexe.

5. Le théorème de projection s'applique puisque C est convexe. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ il existe un point y^* unique qui vérifie
$$\forall x \in C, \quad \|x - y^*\| \leq \|x - y\|,$$
c'est-à-dire que y^* est l'unique solution du problème
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(x_1, x_2) = \|x - y\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\ \text{sous la contrainte } g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{array} \right.$$

6. Les fonctions J et g sont de classe C^1. De plus $\nabla g(x_1, x_2) = (2x_1, -1)$ est toujours non nul, donc le point solution doit vérfier la condition d'optimalité : il existe $\mu \geq 0$ tel que
$$\left\{ \begin{array}{l} g(x_1, x_2) \leq 0 \\ \mu g(x_1, x_2) = 0, \\ \nabla J(x_1, x_2) + \mu \nabla g(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. .$$
1er cas Si $\mu = 0$ le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{l} g(x_1, x_2) \leq 0, \\ \nabla J(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ 2(x - y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x = y, \end{array} \right.$$
ce qui n'est possible que si $y \in C$.
2e cas Si $\mu > 0$ alors le système est équivalent à
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} g(x_1, x_2) = 0, \\ \nabla J(x_1, x_2) + \mu \nabla g(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - x_2 = 0, \\ 2(x_1 - y_1) + 2\mu x_1 = 0 \\ 2(x_2 - y_2) - \mu = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1^2, \\ (1 + \mu)x_1 - y_1 = 0 \\ \mu = 2(x_2 - y_2) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1^2, \\ (1 + 2(x_1^2 - y_2))x_1 - y_1 = 0 \\ \mu = 2(x_2 - y_2) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1^2, \\ 2x_1^3 + (1 - 2y_2)x_1 - y_1 = 0 \\ \mu = 2(x_2 - y_2) \end{array} \right. \end{aligned}$$
On voit donc que dans ce cas la solution est obtenue en résovant l'équation du troisième degré $2x_1^3 + (1 - 2y_2)x_1 - y_1 = 0$.

7. – Le point $y = (-1, 1/2)$ n'est pas dans C ; on est donc forcément dans le deuxième cas : $\mu > 0$. On doit donc résoudre
$$2x_1^3 + (1 - 2y_2)x_1 - y_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^3 + (1 - 2(1/2))x_1 - (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x_1^3 + 1 = 0.$$
La solution est $x_1 = -1/\sqrt[3]{2}$. Ensuite $x_2 = x_1^2 = 1/2^{2/3}$, et on vérifie que μ est positif : $\mu = 2(x_2 - y_2) = 2(1/2^{2/3} - 1/2) > 0$. Donc la solution vérifie bien la condition d'optimalité. Ainsi dans ce cas on a $y^* = (-1/\sqrt[3]{2}, 1/2^{2/3})$.
   – Le point $y = (3, 0)$ n'est pas dans C ; on doit résoudre
$$2x_1^3 + (1 - 2y_2)x_1 - y_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^3 + x_1 - 3 = 0.$$
$x_1 = 1$ est solution évidente de cette équation. On a alors
$$2x_1^3 + x_1 - 3 = 2(x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + \frac{3}{2}),$$
$\Delta = 1 - 4 \times 3/2 < 0$, donc il n'y a pas d'autre solution réelle. Ainsi $x_1 = 1$, $x_2 = x_1^2 = 1$ et on vérifie que μ est positif : $\mu = 2(x_2 - y_2) = 2(1 - 0) > 0$. Donc la solution vérifie bien la condition d'optimalité. Ainsi dans ce cas on a $y^* = (1, 1)$.

– Le point $y = (0, 1)$ est dans C, donc on a simplement $y^* = y = (0, 1)$.