Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen de deuxième session - 16 juin 2014 – durée 1h30

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés pendant l'examen.

Exercice 1

1. Rappeler la définition d'une norme sur un espace vectoriel.
2. On considère une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E, et $x, y \in E$ fixés. Montrer que l'application
$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \|tx + y\| \end{array} \right.$$
est continue.

Exercice 2 Pour chacune des deux fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer les points pour lesquels la fonction admet un minimum local, un maximum local, un minimum global, un maximum global.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$,
2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 3 On considère le problème d'optimisation suivant dans $\mathbb{R}^3$:
$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2, \\ \text{sous les contraintes } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x + y + z = 0. \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'ensemble des contraintes C est un ensemble compact. En déduire que le problème (P) admet une solution. A quelle figure géométrique correspond C ?
2. Quels sont les points admissibles de C vis-à-vis des conditions de Karush-Kuhn-Tucker ?
3. Ecrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker et en déduire la ou les solutions de (P).