Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen de deuxième session - 16 juin 2014 – durée 1h30

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés pendant l'examen.

Exercice 1

1. Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
   ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
   iii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. On a pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,

   $$|f(t) - f(s)| = |\|tx - y\| - \|sx - y\|| \leq \|(tx - y) - (sx - y)\| = \|(t - s)x)\| = |t - s|\|x\|.$$

   Donc f est lipschitzienne et donc continue (ou bien directement : lorsque s tend vers t, $f(t) - f(s)$ tend vers 0 d'après l'inégalité, ce qui prouve la continuité.

Exercice 2

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Cherchons les points critiques de f. On a

   $$\nabla f(x, y) = (2x + y + 2, 2y + x + 3),$$

   donc

   $$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ -3x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -2x - 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

   f admet donc un seul point critique $(-1/3, -4/3)$. Pour déterminer son type on regarde la matrice hessienne de f :

   $$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Hf(-1/3, -4/3).$$

   On a $\det Hf(-1/3, -4/3) = 3 > 0$ et $\operatorname{Tr} Hf(-1/3, -4/3) = 4 > 0$ donc cette matrice admet deux valeurs propres strictement positives. $(-1/3, -4/3)$ est donc un minimum local. De plus $Hf(x, y)$ étant constante, de valeurs propres strictement positives, f est une fonction convexe (même strictement convexe, et même elliptique), donc tout minimum local est minimum global. Ainsi :
   f admet un unique minimum global, qui est aussi l'unique minimum local, en $(-1/3, -4/3)$, et elle n'admet aucun maximum local ni global.

2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Cherchons les points critiques de f. On a

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x),$$

donc

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 = x^9 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc trois points critiques $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. La matrice hessienne s'écrit :

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Donc pour $(0,0)$ on a

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut -16 et la trace 0. On a donc ici deux valeurs propres de signes opposés et non nulles, et donc $(0,0)$ est un point selle.
Pour les deux autres points critiques on a

$$Hf(1,1) = Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant et la trace sont strictement positifs. Les deux valeurs propres sont donc strictement positives, et donc $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des minimums locaux.
Regardons ensuite si ces minimus sont globaux. Premièrement, $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$ donc soit ils sont tous deux minimums globaux, soit aucun des deux ne l'est. On remarque ensuite que dès que $|x|$ et $|y|$ sont plus grand que $\sqrt{2}$, on a $x^4 \geq 2x^2$ et $y^4 \geq 2y^2$ et donc

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \geq 2(x^2 + y^2 - 2xy) = 2(x-y)^2 \geq 0.$$

Donc f est positive en dehors du carré $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]^2$, tandis que dans ce carré elle admet forcément un minimum puisque c'est un ensemble compact. Par conséquent d'après l'étude précédente, $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont les minimus globaux de f sur le carré et donc aussi sur tout l'espace puisque la valeur de f en ces points est strictement négative tandis qu'elle est positive en dehors du carré.
Ainsi pour conclure, f admet deux minimums locaux qui sont aussi les deux minimus globaux : $(-1,-1)$ et $(1,1)$. Elle n'admet pas de maximum local ni global.

Exercice 3

1. C est défini comme l'intersection des images réciproques de 0 des applications continues $h_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $h_2(x,y,z) = x + y + z$. Par conséquent C est fermé. De plus $(x,y,z) \in C \Rightarrow \|(x,y,z)\| = 1$ puisque $h_1(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2$. Donc C est aussi borné, et ainsi C est compact. Par conséquent J, qui est une fonction continue, admet nécessairement un minimum sur l'ensemble compact C, et donc le problème (P) admet au moins une solution. C est en fait l'intersection de la sphère unité et du plan d'équation $x + y + z = 0$. C est donc un cercle de centre l'origine et de rayon 1.

2. C est défini par deux contraintes égalité, donc les deux contraintes sont actives en tout point de C. Un point (x, y, z) de C est donc admissible si et seulement si les gradients de h_1 et h_2 sont indépendants en ce point. On a $\nabla h_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ et $\nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Ces deux vecteurs sont indépendants sauf si $x = y = z$. Or si $x = y = z$ alors $x + y + z = 0$ implique que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ mais ce point n'est pas dans C. Par conséquent tous les points de C sont admissibles.
3. Les fonctions J, h_1 et h_2 sont C^1. On peut donc écrire les équations de Karush-Kuhn-

Tucker : cherchons les points (x, y, z) tels qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla J(x,y,z) + \lambda_1 \nabla h_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h_2(x,y,z) = 0 \\ h_1(x,y,z) = 0 \\ h_2(x,y,z) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-1) + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2(y-1) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(\lambda_1 + 1)x = 2 - \lambda_2 \\ 2(\lambda_1 + 1)y = 2 - \lambda_2 \\ 2(\lambda_1 + 1)z = -\lambda_2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \\ \text{(impossible)} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z =, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ 2\frac{(2-\lambda_2)^2}{4(\lambda_1+1)^2} + \frac{\lambda_2^2}{4(\lambda_1+1)^2} = 1 \\ 2\frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} - \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ 2(2-\lambda_2)^2 + \lambda_2^2 = 4(\lambda_1+1)^2 \\ 2(2-\lambda_2) - \lambda_2 = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ \frac{8}{9} + \frac{16}{9} = 4(\lambda_1+1)^2 \\ \lambda_2 = \frac{4}{3}, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{2-\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)} \\ \lambda_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \\ \lambda_2 = \frac{4}{3}, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \\ \lambda_2 = \frac{4}{3} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \lambda_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \\ \lambda_2 = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Ainsi les points de C solutions des équations de Karush-Kuhn-Tucker sont $a = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$

et $b = -a = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$.
On a vu que (P) admet au moins une solution, et de plus tous les points de C étant admissibles, la ou les solutions doivent nécessairement vérifier les conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Donc l'un des points a et b, ou les deux, sont les solutions de (P). Pour conclure on compare les valeurs de J en ces points :

$$\begin{aligned}
J(a) &= 2(-\frac{1}{\sqrt{6}} - 1)^2 + \frac{2}{3} \\
&= 2(\frac{1}{6} + 1 + 2\frac{1}{\sqrt{6}}) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} + 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \\
&= 3 + \sqrt{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(b) &= 2(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1)^2 + \frac{2}{3} \\
&= 2(\frac{1}{6} + 1 - 2\frac{1}{\sqrt{6}}) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} + 2 - \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \\
&= 3 - \sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

On a donc $J(b) < J(a)$, et donc $b = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ est l'unique solution de (P).