Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Espaces euclidiens et optimisation - Licence 3e année
Examen de deuxième session, 20 juin 2016

Exercice 1 Soit E l'espace des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à trois.

1. Montrer que la formule suivante définit un produit scalaire sur E :

$$\forall f,g \in E, \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère à présent le problème d'optimisation suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$(P) \quad \text{Minimiser } J(a,b,c) \text{ pour } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \text{ où}$$

$$J(a,b,c) = \int_0^1 \left(at^2 + bt + c - t^3\right)^2 dt,$$

2. Interpréter le problème (P) comme un problème de projection sur un sous-espace de E pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
3. En déduire que la solution de (P) correspond à la solution d'un système linéaire d'équations pour les variables a,b,c. Trouver ce système d'équations et en déduire la solution de (P).

Exercice 2 On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant sur $\mathbb{R}^2$:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x,y) = xe^y, \\ \text{avec } x^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi on peut affirmer directement que (P) admet au moins une solution.
2. Écrire les équations de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (P) et en déduire la ou les solutions du problème.

Exercice 3 On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et on note $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire euclidiens canoniques.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|x\| = \sup\left\{|\langle x,v\rangle|,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leqslant 1\right\}.$$

2. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble $U = \mathrm{Vect}\{e_1\} \cup \mathrm{Vect}\{e_2\} \cup \mathrm{Vect}\{e_3\}$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|x\|_\infty = \sup\left\{|\langle x,v\rangle|,\ v \in U,\ \|v\| \leqslant 1\right\},$$

   où $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \{1,2,3\}\}$.
3. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble $V = \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\} \cup \mathrm{Vect}\{e_3\}$. On définit l'application $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad N(x) = \sup\left\{|\langle x,v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\right\}.$$

   Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant \|x\|$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $N(x) = \max\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ |x_3|\right\}$.