Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Espaces euclidiens et optimisation - Licence 3e année
Examen de deuxième session, 20 juin 2016 - Correction

Exercice 1

1. On doit montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
   - Soient $f, g \in E$. On a
   $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle,$$
   donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
   - Soient $f, g, h \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a
   $$\langle \alpha f + g, h \rangle = \int_0^1 (\alpha f(t) + g(t))h(t)dt = \alpha \int_0^1 f(t)h(t)dt + \int_0^1 g(t)h(t)dt = \alpha \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,$$
   donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est aussi linéaire à droite et donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.
   - Pour tout $f \in E$, $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geqslant 0$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.
   - Pour tout $f \in E$, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. L'application $t \mapsto f(t)^2$ est alors continue (car polynomiale) et positive sur $[0,1]$ donc son intégrale est nulle sur $[0,1]$ si et seulement si elle est nulle sur $[0,1]$. On a donc $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

   Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Si on note $\| \cdot \|$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on voit que l'on peut écrire J comme
$$J(a, b, c) = \|f - g\|^2,$$
où $f(t) = at^2 + bt + c$ et $g(t) = t^3$. Le problème (P) consiste donc à trouver la fonction polynomiale f de degré au plus 2 dont la distance à $g(t) = t^3$ est minimale. Autrement dit il s'agit du problème de projection orthogonale dans l'espace E de $g(t) = t^3$ sur le sous-espace vectoriel $F \subset E$ formé des fonctions polynomiales de degré au plus 2.
3. On sait que la projection orthogonale $f = \pi_F(g)$ de $g \in E$ sur le sous-espace F doit vérifier
$$\forall h \in F, \quad \langle f - g, h \rangle = 0,$$
avec $f(t) = at^2 + bt + c$. On peut écrire cette condition pour les trois fonctions $h_1(t) = 1$,

$h_2(t) = t$, $h_3(t) = t^2$ qui forment une base de F. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \langle f-g, h_1\rangle = 0 \\ \langle f-g, h_2\rangle = 0 \\ \langle f-g, h_3\rangle = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_0^1 (f(t)-g(t))h_1(t)dt = 0 \\ \int_0^1 (f(t)-g(t))h_2(t)dt = 0 \\ \int_0^1 (f(t)-g(t))h_3(t)dt = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_0^1 (at^2+bt+c-t^3)dt = 0 \\ \int_0^1 (at^2+bt+c-t^3)tdt = 0 \\ \int_0^1 (at^2+bt+c-t^3)t^2dt = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\int_0^1 t^2dt + b\int_0^1 tdt + c\int_0^1 dt - \int_0^1 t^3dt = 0 \\ a\int_0^1 t^3dt + b\int_0^1 t^2dt + c\int_0^1 tdt - \int_0^1 t^4dt = 0 \\ a\int_0^1 t^4dt + b\int_0^1 t^3dt + c\int_0^1 t^2dt - \int_0^1 t^5dt = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}-\frac{1}{5} = 0 \\ \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}-\frac{1}{6} = 0 \end{array}\right.$$

On a donc bien obtenu un système de trois équations linéaires pour les trois inconnues a, b, c. On résoud à présent ce système :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}-\frac{1}{5} = 0 \\ \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}-\frac{1}{6} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{2}+\frac{2}{3}b+c-\frac{2}{5} = 0 \\ \frac{3}{5}a+\frac{3}{4}b+c-\frac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{6}+\frac{b}{6}-\frac{3}{20} = 0 \\ \frac{4}{15}a+\frac{b}{4}-\frac{1}{4} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{9}{20} = 0 \\ \frac{8}{15}a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{9}{20} = 0 \\ \frac{a}{30}-\frac{1}{20} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{10} = \frac{1}{20} \\ b = \frac{9}{10}-a = \frac{9}{10}-\frac{3}{2} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \\ a = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ainsi le point $(a, b, c) = (1/20, -3/5, 3/2)$ est l'unique solution de (P) ; ou autrement dit la fonction $f(t) = t^2/20 - 3t/5 + 3/2$ est la fonction polynomiale de degré au plus 2 la plus proche de $g(t) = t^3$ au sens de la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 2

1. La fonction f est continue et l'ensemble des contraintes $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ qui est un ensemble compact. Or une fonction continue sur un compact admet toujours un minimum. Donc le problème (P) admet au moins une solution.
2. On a une seule contrainte inégalité $g(x, y) \leqslant 0$ avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Les fonctions f et g sont de classe C^1 et tout point de C est régulier car si $(x, y) \in C$ on a :
   - soit $g(x, y) < 0$ (intérieur du disque), auquel cas le point (x, y) est forcément régulier,
   - soit $g(x, y) = 0$ (sur le cercle unité), auquel cas on doit vérifier que $\nabla g(x, y)$ ne peut pas être nul. Or $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ ne s'annule que pour $(x, y) = 0$, point qui n'est pas sur cercle unité.

   On peut donc appliquer les conditions de Karush-Kuhn-Tucker : si (x, y) est solution de (P), alors il existe $\mu \geqslant 0$ tel que $\mu g(x, y) = 0$ et

   $$\nabla f(x, y) + \mu \nabla g(x, y) = 0.$$

   Or $\nabla f(x, y) = (e^y, xe^y)$, donc on obtient :

   $$\begin{cases} e^y + 2\mu x = 0 \\ xe^y + 2\mu y = 0. \end{cases}$$

   On discute maintenant suivant la position de (x, y) dans C :
   - Si $g(x, y) < 0$ (intérieur du disque) : alors $\mu g(x, y) = 0$ implique que $\mu = 0$ et donc on a
     $$\begin{cases} e^y = 0 \\ xe^y = 0. \end{cases}$$
     Ceci est impossible car $e^y > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   - Si $g(x, y) = 0$ (sur le cercle unité) : alors on a
     $$\begin{cases} e^y + 2\mu x = 0 \\ xe^y + 2\mu y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y + 2\mu x = 0 \\ 2\mu(y - x^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
     $\mu = 0$ est impossible car on aurait alors $e^y = 0$. Donc $y = x^2$ et la troisième équation donne alors $x^2 + x^4 - 1 = 0$. En posant $X = x^2$ on a $X^2 + X - 1 = 0$ ce qui donne $X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mais comme $X = x^2 \geqslant 0$ on a forcément $X = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. Mais par la première équation on a $\mu = -\frac{e^y}{2x}$. μ devant être positif, il faut que x soit négatif, ce qui implique que $x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

   On a donc trouvé une seule solution aux équations KKT :

   $$(x, y) = \left(-\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

   Comme on sait que (P) admet au moins une solution, et que toute solution de (P) vérifie KKT, on en conclut que ce point est en fait l'unique solution de (P).

Exercice 3

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tous $x, v \in \mathbb{R}^3$, $|\langle x, v\rangle| \leqslant \|x\|\|v\|$, et donc si $\|v\| = 1$, $|\langle x, v\rangle| \leqslant \|x\|$. Ceci montre que

$$\sup\left\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leqslant 1\right\} \leqslant \|x\|.$$

De plus si $x \neq 0$, en prenant $v = \frac{x}{\|x\|}$, on a $\|v\| = 1$ et $|\langle x, v\rangle| = \left|\frac{\langle x,x\rangle}{\|x\|}\right| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$ et donc

$$\sup\left\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leqslant 1\right\} \geqslant \|x\|,$$

ce qui prouve l'égalité dans ce cas. Mais si $x = 0$ l'égalité est aussi vraie de façon évidente.

2. U est l'union de trois droites vectorielles. Donc $v \in U$ signifie que $v = \lambda e_i$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$. Si de plus $\|v\| \leqslant 1$, c'est que $|\lambda| \leqslant 1$. Ainsi on peut réécrire

$$\sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in U,\ \|v\| \leqslant 1\} = \sup\{|\langle x, \lambda e_i\rangle|,\ |\lambda| \leqslant 1,\ i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Or $|\langle x, \lambda e_i\rangle| = |\lambda|\langle x, e_i\rangle = |\lambda||x_i|$, et $\sup\{|\lambda||x_i|, |\lambda| \leqslant 1\} = |x_i|$ (maximal pour $\lambda = 1$). Donc en fait

$$\sup\{|\langle x, \lambda e_i\rangle|,\ |\lambda| \leqslant 1,\ i \in \{1, 2, 3\}\} = \sup\{|x_i|, i \in \{1, 2, 3\}\} = \|x\|_\infty.$$

3. Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$:
   - $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $N(x) \geqslant 0$ (puisque c'est la borne supérieure de nombres positifs).
   - $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $N(x) = 0$ implique que $|\langle x, v\rangle| = 0$ pour tout $v \in V$, $\|v\| = 1$. En particulier on peut prendre $v = e_1$, $v = e_2$ ou $v = e_3$ car ces vecteurs sont dans V et de norme 1. On a donc $|\langle x, e_i\rangle| = |x_i| = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et donc $x = 0$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \sup\{|\langle \lambda x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} = \sup\{|\lambda||\langle x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} = |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

   - $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \sup\{|\langle x+y, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} = \sup\{|\langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{|\langle x, v\rangle| + |\langle y, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} + \sup\{|\langle y, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

   Ainsi N est bien une norme sur $\mathbb{R}^3$.
   De plus, puisque $U \subset V \subset \mathbb{R}^3$, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in U,\ \|v\| \leqslant 1\} \subset \{|\langle x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} \subset \{|\langle x, v\rangle|,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leqslant 1\}$$

   et donc

$$\sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in U,\ \|v\| \leqslant 1\} \leqslant \sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant 1\} \leqslant \sup\{|\langle x, v\rangle|,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leqslant 1\}$$

   c'est-à-dire $\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant \|x\|$.

4. L'ensemble V est l'union du plan $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$ et de la droite $\mathrm{Vect}\{e_3\}$. Donc un élément $v \in V$ s'écrit soit $v = (v_1, v_2, 0)$, soit $v = (0, 0, v_3)$. Par conséquent

$$N(x) = \max \left(\sup \{ | \langle x, v \rangle |, \ v = (v_1, v_2, 0), \ \|v\| \leqslant 1 \} \ , \ \sup \{ | \langle x, v \rangle |, \ v = (0, 0, v_3), \ \|v\| \leqslant 1 \} \right),$$

$$N(x) = \max \left(\sup \left\{ |x_1 v_1 + x_2 v_2|, \ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leqslant 1 \right\} \ , \ \sup \{ |x_3 v_3|, \ |v_3| \leqslant 1 \} \right).$$

La première borne supérieure est égale à $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (par le même raisonnement qu'à la question 1 en se plaçant dans $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^3$) ; et la deuxième est égale à $|x_3|$ (puisque $|x_3 v_3| \leqslant |x_3|$ si $v_3| \leqslant 1$ et que $|x_3 v_3| = 1$ en prenant $v_3 = 1$). Ainsi on a bien

$$N(x) = \max \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \ |x_3| \right).$$