

MASTER 1

PROGRAMMATION

Aléatoire - Scilab

Exercice 1 Marche aléatoire. On souhaite dans cet exercice simuler une marche aléatoire sur le plan sous Scilab. On part du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$, et à chaque étape le nouveau point (x_{k+1}, y_{k+1}) est obtenu à partir du point courant (x_k, y_k) en se déplaçant dans le plan selon le schéma suivant :

- Tirer un entier i entre 1 et 4
 - Si $i = 1$, $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k - 1, y_k)$,
 - Si $i = 2$, $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k)$,
 - Si $i = 3$, $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k - 1)$,
 - Si $i = 4$, $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1)$.

Ecrire un programme qui simule et affiche (de manière animée) une promenade aléatoire sur le plan. A l'étape k , le programme affiche le segment qui relie les points (x_k, y_k) et (x_{k+1}, y_{k+1}) . On pourra imposer que l'affichage se fasse toujours dans le même cadre avec l'option `rect` de la fonction `plot2d`. Par exemple, pour afficher un segment entre les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) avec des bornes $[-40, 40]$ en abscisse et $[-30, 30]$ en ordonnée :

```
plot2d([x0; x1], [y0; y1], rect=[-40, -30, 40, 30]);
```

Pour voir la marche aléatoire s'afficher de manière animée, il faut ajouter des pauses à Scilab entre l'affichage de deux points, par exemple en ajoutant la commande `xpause(10000)` avant l'affichage de chaque segment (l'argument 10000 est un nombre de microsecondes).

A l'aide de la commande `x_choose`, on pourra faire apparaître une boîte de dialogue toutes les K itérations (par exemple avec $K = 5000$) qui demande à l'utilisateur s'il souhaite continuer à afficher la marche aléatoire ou pas.

Exercice 2 Anniversaires. On considère une classe de K étudiants, dont les dates d'anniversaires sont supposées indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur les 365 jours de l'année. Soit C le nombre de paires d'étudiants ayant la même date d'anniversaire (ce nombre est calculé exhaustivement ; si par exemple les étudiants 1, 2 et 3 ont la même date d'anniversaire, on comptera trois paires $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$).

Ecrire une fonction $p = \text{anniv}(K)$ qui renvoie la probabilité qu'il y ait au moins une paire d'étudiants avec la même date d'anniversaire dans la classe. Tester par exemple avec $K = 30$. Le résultat est-il étonnant ?

Tracer la courbe de la probabilité p obtenue en fonction de K .

Exercice 3 Promenade sur un "tore".

Ici, le tore désigne l'ensemble $\{0, 1, \dots, 9\}$ en convenant que le successeur de 9 est 0. Un mobile partant de 0, s'y déplace selon la règle suivante : à chaque instant, il reste sur place avec une probabilité $0 < p < 1$ et il avance d'un cran avec la probabilité $1 - p$.

1. Ecrire la fonction Scilab :

```
function y = suivant(x, p)
```

donnant la position aléatoire suivante de x (il s'agit d'une fonction dont le rendu est aléatoire).

2. Tracer une trajectoire issue de 0, pour $t = 0, 1, 2, \dots, 100$. On pourra par exemple tracer le vecteur x des positions prises successivement par le mobile en fonction de t . On utilisera la fonction `plot2d2` qui permet de tracer des fonctions constantes par morceaux.
3. On note T le temps de retour au point 0 :

$$T = \inf\{n \geq 1, x_n = 0\},$$

où x_n , position du mobile au temps n , suit l'évolution aléatoire décrite plus haut, avec $x_0 = 0$. Ecrire la fonction Scilab fonction $t = T(p)$ simulant cette v.a. (il s'agit, comme au dessus, d'une fonction dont le rendu est aléatoire). Donner, grâce aux fonctions `mean` et `variance` de Scilab, une estimation de l'espérance et de la variance de T pour 1000 tirages. Ces quantités dépendent-elles de la valeur de p ? Comment peut-on l'expliquer?

4. Simuler la position du mobile à l'instant $n > 0$ et tracer son histogramme pour 1000 tirages. Comparer entre les différentes valeurs de n .