Algorithmes stochastiques

Examen du mercredi 19 décembre 2018

Durée : 15h-17h30 (2,5 heures). *Téléphone et calculatrices interdits.*

Exercice 1 - Monte Carlo Soit

$$f(x,y) = \mathbf{1}_{x^2+y^2\leq 1}$$

une fonction binaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui vaut 1 sur le disque de rayon 1 centré en 0, et qui vaut 0 ailleurs. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^2$. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer $f * \phi(x_0)$, avec ϕ un noyau gaussien $\mathcal{N}(0, Id)$ en dimension 2 (Id est la matrice identité 2×2).

Exercice 2 - Echantillonnage préférentiel On souhaite dans cet exercice calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

1. Proposer une méthode de Monte Carlo pour estimer cette intégrale. Ecrire la variance de l'estimateur obtenu en fonction de la valeur I à estimer.
2. On souhaite maintenant estimer I par échantillonnage préférentiel en tirant N variables aléatoires $\{Y_i\}_{i=1,\ldots,N}$ de loi $\mathcal{N}(1.5, \sigma^2)$. Construire un nouvel estimateur de I à partir des Y_i.

Exercice 3- Méthode du rejet

1. Ecrire un pseudo-code permettant de simuler à l'aide de l'algorithme du rejet un échantillon de variables aléatoires i.i.d. de densité

$$f(x) = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi x \times 0.55}$$

sur l'intervalle $[a,b]$ pour $a = (1-\sqrt{0.55})^2$ et $b = (1+\sqrt{0.55})^2$. On pourra admettre que cette fonction est bornée par 1 sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 4 - MCMC - Sudoku par Recuit simulé Dans cet exercice, on veut utiliser l'algorithme de recuit simulé pour résoudre une grille de Sudoku. On suppose qu'on a une grille Γ à 9 lignes et 9 colonnes, donc 81 cases, dans laquelle m cases ont des valeurs déjà connues, comme sur

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

FIGURE 1 – Exemple d'une grille de sudoku avec $m = 30$ chiffres déjà connus.

l'exemple de la Figure 1. On cherche donc les valeurs des $81 - m$ autres cases, qui peuvent chacune prendre 9 valeurs $\{1, 2, \dots, 9\}$.

1. Quelle est la taille $\#E$ de l'ensemble E des configurations possibles sur ces $81 - m$ cases restantes ?

On note x une de ces configurations, avec x_{ij} qui désigne le contenu de la case de ligne i et colonne j. Parmi les $\#E$ configurations possibles, on souhaite en trouver une qui vérifie les contraintes du Sudoku, c'est-à-dire

- chaque colonne ne contient qu'une seule occurence de chaque chiffre ;
- chaque ligne ne contient qu'une seule occurence de chaque chiffre ;
- chacun des 9 grands sous-carrés ne contient qu'une seule occurence de chaque chiffre.

Pour cela, pour tout chiffre r entre 1 et 9, on va noter $n(r, i, j)$ le nombre de fois où le chiffre r se répète dans l'union de la ligne i, de la colonne j et du sous-carré contenant le point (i, j). L'énergie d'une configuration x est alors définie comme

$$H(x) = \sum_{i=1}^{9} \sum_{i=1}^{9} (n(x_{ij}, i, j) - 1).$$

2. Montrer que l'énergie $H(x)$ est toujours positive et qu'une configuration x est solution du jeu de Sudoku si et seulement si $H(x) = 0$.

Pour calculer une telle solution x, on va utiliser l'algorithme de recuit simulé vu en cours. On dira que deux configurations x et y sont voisines si l'une peut s'obtenir à partir de l'autre en changeant le chiffre d'une seule case (une des $81 - m$ cases non fixées à l'avance).

3. Ecrire un pseudo-code qui calcule l'énergie H d'une configuration donnée x.
4. A quoi ressemble le noyau de transition $Q : E \times E \mapsto [0, 1]$ qui va nous permettre de simuler aux différentes itérations de l'algorithme ?
5. Ecrire un pseudo-code (détaillé et commenté) permettant de résoudre ce problème de sudoku par l'algorithme de recuit simulé. On supposera que la fonction $\beta(t)$ croissante est donnée. Le critère d'arrêt du code est que soit on a atteint le nombre maximum d'itérations, soit on a atteint l'énergie $H(x) = 0$.