

Feuille de TD n°1 - Événements et probabilités

**Exercice 1** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont égaux entre eux ?

- $A = \{n + 4, n \in \mathbb{N}\},$
- $B = \{n, n = k + 4, k \in \mathbb{N}\},$
- $C = \{n, n + 4 \in \mathbb{N}\},$
- $D = \{n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\},$
- $E = \{n, n \in \mathbb{N}, n \geq 4\},$
- $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

**Correction**  $A = B = E$  et  $D = F$ .

**Exercice 2** Remplir les espaces avec l'un des symboles  $\in, \subset, =$  lorsque c'est possible :

- $\{3, 5\} \dots \mathbb{N}$
- $(3, 5) \dots \{(3, 5)\}$
- $(3, 5) \dots \{5, 3\}$
- $(3, 5) \dots \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $(3, 5) \dots (5, 3)$
- $\{3, 5\} \dots \{5, 3\}$
- $\{3, 5\} \dots \{4, 5, 3\}$
- $\{3, 5\} \dots \mathcal{P}(\{4, 5, 3\})$

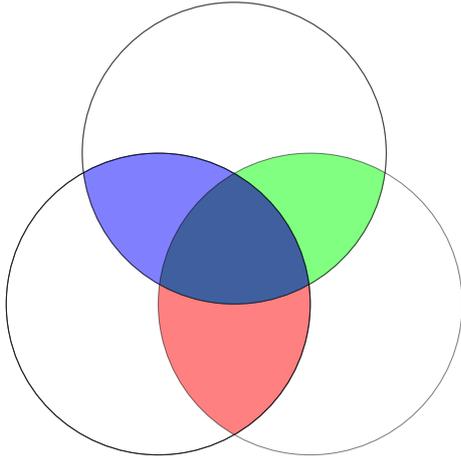
**Correction**

- $\{3, 5\} \subset \mathbb{N}$
- $(3, 5) \in \{(3, 5)\}$
- $(3, 5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $\{3, 5\} = \{5, 3\}$
- $\{3, 5\} \subset \{4, 5, 3\}$
- $\{3, 5\} \in \mathcal{P}(\{4, 5, 3\})$

**Exercice 3**  $A, B, C$  sont trois événements d'un espace d'épreuves  $\Omega$ . Exprimer à l'aide de  $A, B, C$ , les événements suivants :

1.  $A, B, C$  se produisent simultanément.
2. Au moins un des trois événements se produit.
3. Parmi  $A, B, C$ , seul  $C$  se produit.
4. Aucun des trois événements ne se produit.
5.  $A$  ou  $B$  se réalisent mais pas ensemble.
6. Un seul de ces trois événements se produit.
7. Deux et pas plus de deux, se produisent.
8. Pas plus de deux se produisent.

**Correction**



1.  $A \cap B \cap C$
2.  $A \cup B \cup C$
3.  $A^c \cap B^c \cap C$
4.  $A^c \cap B^c \cap C^c$
5.  $A \cup B \setminus (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
6.  $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$
7.  $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$
8.  $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

**Exercice 4** Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ . Montrer l'inégalité  $\frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$ .

**Correction** On a  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \mathbb{P}(A \cap B)$ . Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1.5 - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Or

$$0.75 = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1.$$

Donc

$$0.5 = 1.5 - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1.5 - 0.75 = 0.75.$$

**Exercice 5** En 1999, 23% des ménages étaient équipés d'un ordinateur et 28% d'un téléphone portable. Ils étaient 70% à n'avoir ni ordinateur ni téléphone portable.

1. Quelle est la probabilité pour un ménage pris au hasard d'être équipé d'un ordinateur et d'un téléphone portable ?
2. Ces chiffres sont contestés et on prétend qu'ils étaient en fait 73% à n'avoir ni ordinateur ni téléphone portable. Est-ce possible ?

**Correction**

Notons  $A$  l'évènement « un ménage tiré au hasard possède un ordinateur » et  $B$  l'évènement « un ménage tiré au hasard possède un téléphone portable ». D'après l'énoncé, on a  $\mathbb{P}(A) = 0.23$  et  $\mathbb{P}(B) = 0.28$ , et  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.7$ .

1. L'évènement « un ménage tiré au hasard est équipé d'un téléphone portable et d'un ordinateur » peut s'écrire  $A \cap B$ . Remarquons d'abord que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.3.$$

Donc  $A \cap B$  a pour probabilité

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.23 + 0.28 - 0.3 = 0.21.$$

2. Si  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.73$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.27$  alors que  $\mathbb{P}(B) = 0.28$  ! C'est donc impossible.

**Exercice 6** En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre, et 12,5% sont allés au cinéma et au théâtre. On considère une personne tirée au hasard parmi cette population et on note les événements suivants :

- $C$  = "elle est allée au cinéma",
- $T$  = "elle est allée au théâtre".

Calculer la probabilité que cette personne

1. soit allée au cinéma ou au théâtre.
2. ne soit pas allée au cinéma.
3. ne soit allée ni au cinéma ni au théâtre.
4. soit allée au cinéma mais pas au théâtre.

**Correction** D'après l'énoncé, on a  $\mathbb{P}(C) = 0.4$ ,  $\mathbb{P}(T) = 0.25$  et  $\mathbb{P}(C \cap T) = 0.125$ . Ainsi,

1.  $\mathbb{P}(C \cup T) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(C \cap T) = 0.4 + 0.25 - 0.125 = 0.525$ .
2.  $\mathbb{P}(C^c) = 1 - \mathbb{P}(C) = 0.6$ .
3.  $\mathbb{P}(C^c \cap T^c) = \mathbb{P}((C \cup T)^c) = 1 - \mathbb{P}(C \cup T) = 1 - 0.525 = 0.475$ .
4.  $\mathbb{P}(C \cap T^c) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C \cap T) = 0.4 - 0.125 = 0.275$ .

**Exercice 7** On pipe un dé de sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on le jette soit proportionnelle au résultat (il a deux fois plus de chances de tomber sur le 2 que sur le 1, trois fois plus de chances de tomber sur le 3 que sur le 1, etc.).

1. Donner la probabilité de chaque résultat possible après un lancer.
2. On considère à présent les événements  $A$  = "le résultat est pair",  $B$  = "le résultat est un nombre premier",  $C$  = "le résultat est un nombre impair". Calculer  $\mathbb{P}(A)$ ,  $\mathbb{P}(B)$  et  $\mathbb{P}(C)$ .
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
  - (a)  $D$  : on obtient un nombre pair ou un nombre premier
  - (b)  $E$  : on obtient un nombre premier impair
  - (c)  $F$  :  $A$  mais non  $B$  se réalise

**Correction**

1. Pour  $i$  entre 1 et 6, soit  $p_i$  la probabilité que le dé tombe sur la valeur  $i$ . On a clairement  $p_i = i \times p_1$ . Comme on a forcément  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ , on en déduit que  $(1+2+3+4+5+6)p_1 = 1$  et donc que  $p_1 = \frac{1}{21}$ . Ainsi, pour tout  $i$  entre 1 et 6, on a

$$p_i = \frac{i}{21}.$$

- 2.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{21}(2 + 4 + 6) = \frac{12}{21}.$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{21}(2 + 3 + 5) = \frac{10}{21}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{21}(1 + 3 + 5) = \frac{9}{21}.$$

3.

$$\mathbb{P}(D) = \frac{1}{21}(2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{20}{21}.$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{21}(3 + 5) = \frac{9}{21}.$$

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{21}(4 + 6) = \frac{10}{21}.$$

**Exercice 8** Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Montrer que la probabilité qu'un seul des deux se produise est

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

**Correction** L'évènement que  $A$  ou  $B$  se produise mais qu'ils ne se produisent pas simultanément peut s'écrire  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Or,  $A \cap B \subset A \cup B$  donc

$$\mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

**Exercice 9** Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements. Montrer l'égalité

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

**Correction** On peut écrire  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

**Exercice 10** (Nécessite d'avoir fait l'exercice précédent.) On a mené à Paris une étude sur les trois moyens de locomotion métro, voiture et vélib. Les conclusions sont les suivantes :

1. deux tiers des habitants utilisent parfois le métro pour se déplacer,
2. deux tiers utilisent parfois la voiture,
3. deux tiers utilisent parfois le vélib,
4. les trois quarts utilisent deux moyens différents,
5. personne n'utilise les trois.

Décrire la situation en notant chaque évènement en jeu puis dessiner le diagramme ensembliste correspondant. Calculer la probabilité qu'un habitant tiré au hasard utilise un des trois moyens de locomotion cités. En déduire que les conclusions de l'étude sont fausses.

**Correction** Pour un habitant tiré au hasard, posons  $A$  l'évènement que cet habitant utilise parfois la voiture,  $B$  qu'il utilise parfois le vélo et  $C$  l'évènement qu'il utilise parfois le métro. D'après l'énoncé, on a les égalités suivantes

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{3}{4} \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

D'après ces données, la probabilité qu'un habitant tiré au hasard utilise un des trois moyens de locomotion cités est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 0 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

On trouve un résultat strictement plus grand que 1, ce qui est impossible. Les conclusions de l'étude sont donc forcément fausses.