Cogmaster, PROBABILITÉS DISCRÈTES

Feuille de TD n°2 - Dénombrement et probabilités conditionnelles

Exercice 1

1. Etant donnés 3 événements A, B, C, montrer la formule suivante (en supposant que $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) > 0$) :
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(C|A\cap B).$$
2. On tire trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer trois piques ?
3. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique sachant que les deux dernières le sont ?

Correction

1. D'après la loi de Bayes, on a (de proche en proche)
$$\mathbb{P}((A\cap B)\cap C) = \mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}(C|A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A\cap B).$$
2. Sur un jeu de 32 cartes, il y a 8 piques. Notons A (resp. B, C) l'évènement que la première (resp. deuxième, troisième) carte tirée soit un pique. On veut calculer la probabilité de l'évènement $A\cap B\cap C$. Or d'après la question 1 on a
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A\cap B) = \frac{8}{32}\frac{7}{31}\frac{6}{30} \simeq 0.011$$
3. La probabilité pour que les deux dernières cartes soient des piques est
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B\cap C) &= \mathbb{P}(A\cap B\cap C) + \mathbb{P}(A^c\cap B\cap C)\\ &= \mathbb{P}(A\cap B\cap C) + \mathbb{P}(C|A^c\cap B)\mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)\\ &= \frac{8}{32}\frac{7}{31}\frac{6}{30} + \frac{7}{30}\frac{8}{31}\frac{24}{32} \simeq 0.056.\end{aligned}$$
La probabilité pour que la première carte soit un pique sachant que les deux dernières le sont s'écrit
$$P(A|(B\cap C)) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)} = \frac{\frac{8}{32}\frac{7}{31}\frac{6}{30}}{\frac{8}{32}\frac{7}{31}\frac{6}{30} + \frac{7}{30}\frac{8}{31}\frac{24}{32}} = \frac{1}{5}$$

Exercice 2 J'ai 8 clefs qui se ressemblent toutes ; une seule ouvre mon appartement. En revenant chez moi j'essaie au hasard les clefs une par une. Calculer, dans chacun des cas suivants, la probabilité que j'ouvre ma porte en trois essais au plus :

1. 1er cas. Je suis stupide, et je choisis au hasard une des 8 clefs à chaque essai.
2. 2e cas. Je le suis un peu moins, et je mets de côté les mauvaises clefs au fur et à mesure.

Correction

1. — Correction $n^o\,1$ (raisonnement par dénombrement). Il y a en tout 8^3 triplets de choix de clefs (avec remise). Parmi eux, il y a 7^3 triplets n'ouvrant pas la porte, donc la probabilité de ne pas trouver la bonne clef en trois essais est $\frac{7^3}{8^3}$.
   — Correction $n^o\,2$ = Posons A_i l'évènement « je tire ma clef au i-ième essai ». Il est clair que les A_i sont indépendants et que $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{8}$. Ainsi, la probabilité de ne pas trouver la bonne clef en trois essais est

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3^c) = \frac{7 \times 7 \times 7}{8 \times 8 \times 8} = \frac{7^3}{8^3}.$$

   La probabilité d'ouvrir la porte en moins de trois essais est donc de $1 - \frac{7^3}{8^3} \simeq 0.33$.
2. Si je mets de côté les clefs au fur et à mesure, les évènements ne sont plus indépendants donc la probabilité de ne pas trouver la bonne clef en trois essais est

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c|A_1^c)\mathbb{P}(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c) = \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{8}.$$

Exercice 3 On sait que 4% de la population est atteinte d'une certaine maladie. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie qui présente les caractéristiques suivantes : si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 95% ; si la personne est saine, le test est positif avec une probabilité de 15%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. (*) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction Soit une personne tirée au hasard dans la population. Notons A l'évènement « cette personne est malade » et B l'évènement « son test est positif ». On sait d'après l'énoncé que

$$\mathbb{P}(A) = 0.04, \;\; \mathbb{P}(B|A) = 0.95 \text{ et } \mathbb{P}(B|A^c) = 0.15.$$

1. Remarquons dans un premier temps (loi des causes totales) que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) = 0.95 * 0.04 + 0.15 * (1 - 0.04) = 0.038 + 0.144 = 0.182$$

   La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif s'écrit

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = 0.95 \times 0.04/0.182 \simeq 0.21$$

2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c|B^c) &= 1 - \mathbb{P}(A|B^c) = 1 - \mathbb{P}(B^c|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} = 1 - (1 - \mathbb{P}(B|A))\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} \\ &= 1 - (1 - 0.95) * \frac{0.04}{1 - 0.182} = 0.997.\end{aligned}$$

Exercice 4 On a décelé dans un élevage de moutons, une probabilité de 0.3 qu'un animal soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0.9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est 0.8.

1. Quelle est la probabilité que le test d'un mouton pris au hasard ait une réaction positive ?
2. Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Correction Etant donné un mouton tiré au hasard, soit M l'évènement indiquant qu'il est atteint de la maladie, et T qu'il répond positivement au test.

1. On a $\mathbb{P}(M) = 0.3$, $\mathbb{P}(T^c|M^c) = 0.9$ et $\mathbb{P}(T|M) = 0.8$. On en déduit que la probabilité que le test d'un mouton pris au hasard ait une réaction positive est

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|M^c)\mathbb{P}(M^c) = 0.8 * 0.3 + 0.1 * 0.7 = 0.31$$

2. La probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M est

$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0.8 * 0.3}{0.31} \simeq 0.77$$

Exercice 5 (*) Avant d'être acceptés par une banque de sang, des échantillons de sang sont testés contre la présence de virus de l'hépatite A ou B. La probabilité que l'échantillon soit accepté quand aucun virus de l'hépatite n'est présent est de 0.95. La probabilité que l'échantillon soit rejeté quand le virus de l'hépatite A est présent est de 0.8. La probabilité que l'échantillon soit rejeté quand le virus de l'hépatite B est présent est de 0.95. On suppose que 4% de la population des donneurs de sang sont porteurs du virus de l'hépatite A et 1% du virus de l'hépatite B, aucun individu n'étant porteur à la fois des virus A et B.

1. Calculer la probabilité d'accepter un échantillon.
2. Calculer la probabilité que dans un échantillon accepté le virus de l'hépatite A ou B soit présent.

Correction Etant donné un individu tiré au hasard dans la population, notons A l'évènement « cet individu est atteint de l'hépatite A », et B l'évènement « cet individu est atteint de l'hépatite B ». Notons K l'évènement « l'échantillon de cet individu est accepté ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A) = 0.04, \quad \mathbb{P}(B) = 0.01, \quad \mathbb{P}(K^c|A) = 0.8, \quad \mathbb{P}(K|A^c \cap B^c) = 0.95 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(K^c|B) = 0.95.$$

1. On veut calculer la probabilité de l'évènement K. Commençons par remarquer que comme aucun individu ne peut être porteur à la fois de l'hépatite A et de l'hépatite B, les évènements A et B sont disjoints, et par conséquent A, B et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ forment une partition de l'espace Ω des possibles.
On en déduit que

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(K|A^c \cap B^c)\mathbb{P}(A^c \cap B^c) + \mathbb{P}(K|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K|B)\mathbb{P}(B).$$

Or, $\mathbb{P}(K|A) = 1 - \mathbb{P}(K^c|A) = 0.2$ et $\mathbb{P}(K|B) = 1 - \mathbb{P}(K^c|B) = 0.05$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 0.95$. Finalement,

$$\mathbb{P}(K) = 0.95^2 + 0.2 * 0.04 + 0.05 * 0.01 = 0.911$$

2. La probabilité que dans un échantillon accepté le virus de l'hépatite A ou B soit présent s'écrit

$$\mathbb{P}(A\cup B|K) = \frac{\mathbb{P}(K\cap(A\cup B)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\mathbb{P}(A|K)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|K)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{0.008 + 0.0005}{0.911} \simeq 0.0093$$

Exercice 6 (*) Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs (on suppose que ces tiroirs sont équiprobables). On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Correction Notons A_1 l'évènement « le document se trouve dans le premier tiroir », et ainsi de suite A_2, $A_3, \ldots, A_7$. Le document ne peut pas se trouver dans deux tiroirs simultanéments donc les A_i sont deux à deux disjoints. Comme

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_7) = p,$$

on en déduit que

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_7) = \frac{p}{7}.$$

Maintenant, sachant que le document n'est pas dans les 6 premiers tiroirs (donc que l'évènement $A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c$ est vérifié), la probabilité qu'il soit dans le septième tiroir est

$$\mathbb{P}(A_7|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c) = \frac{\mathbb{P}(A_7 \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c)}{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c)}.$$

Or, $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c) = 1 - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6)) = 1 - 6\frac{p}{7}$ car les évènements $A_1, \ldots A_6$ sont disjoints donc la probabilité de leur union est la somme de leurs probabilités. Par ailleurs, $A_7 \subset A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c$ car si le document est dans le septième tiroir il ne peut être dans aucun des six autres. On en déduit que $\mathbb{P}(A_7 \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c) = \mathbb{P}(A_7) = \frac{p}{7}$. Ainsi, la probabilité recherchée vaut

$$\mathbb{P}(A_7|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_6^c) = \frac{\frac{p}{7}}{1 - 6\frac{p}{7}} = \frac{p}{7 - 6p}.$$

Exercice 7 (Paradoxe de Monty-Hall *) Un candidat à un jeu télévisé est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles il y a un trésor. Le candidat commence par se placer devant une des trois portes, sans que ce qui se cache derrière soit révélé. Puis le présentateur (qui connaît l'emplacement du trésor) ouvre (obligatoirement) une des deux autres portes, en choisissant bien une porte derrière laquelle il n'y a pas de trésor. Enfin, le présentateur donne au candidat la possibilité de changer de choix quant à la porte à ouvrir définitivement : soit le candidat conserve son choix initial, soit il choisit la seule porte restante (celle que le présentateur a laissée fermée et que le candidat n'avait pas choisit). Le joueur augmente-t-il ses chances de trouver le trésor s'il modifie son choix initial ?

Correction Supposons par exemple que le joueur se place devant la porte 3 et que le présentateur ouvre la porte 1. Calculons la probabilité que le trésor se trouve derrière la porte

2 restante sous ces conditions. Notons T_i l'évènement « le trésor se trouve derrière la porte i » et O_i l'évènement « le présentateur ouvre la porte i ». On a clairement

$$\mathbb{P}(T_2|O_1) = \frac{\mathbb{P}(O_1|T_2)\mathbb{P}(T_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(O_1|T_i)\mathbb{P}(T_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la probabilité que le trésor se trouve derrière la porte 2 est de $\frac{2}{3}$ et celle que le trésor se trouve derrière la porte 3 (premier choix du joueur) est de $\frac{1}{3}$. Le joueur a donc intérêt à changer de porte !

Ce résultat peut sembler contre-intuitif, mais pour s'en convaincre on peut imaginer qu'il y a un nombre extrêmement élevé de portes, une seule cachant un trésor, et que le présentateur les ouvre toutes sauf une.