Cogmaster, PROBABILITÉS DISCRÈTES

Feuille de TD n°3 : Indépendance d'événements, variables aléatoires, lois discrètes

Exercice 1 Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour Denise 0.5, pour Nicole 0.9 et pour André 0.7. Le succès de chaque candidat est indépendant du succès des autres. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

1. $B =$"Denise est la seule à réussir",
2. $R =$"Les trois candidats réussissent",
3. $E =$"les trois candidats échouent",
4. $P =$"au moins un candidat est reçu" ?

Correction Notons A, D et N (respectivement) les évènements respectifs « André réussit », « Denise réussit » et « Nicole réussit ». Ces trois évènements sont indépendants mutuellement d'après l'énoncé. Ainsi,

1. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap D \cap N^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(N^c) = 0.3 \times 0.5 \times 0.1 = 0.015$
2. $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(A \cap D \cap N) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(N) = 0.7 \times 0.5 \times 0.9 = 0.315$
3. $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A^c \cap D^c \cap N^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(D^c)\mathbb{P}(N^c) = 0.3 \times 0.5 \times 0.1 = 0.015$
4.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(A \cup D \cup N)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(A \cap D) - \mathbb{P}(A \cap N) - \mathbb{P}(D \cap N) + \mathbb{P}(A \cap D \cap N)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(N)\\ &= 0.7 + 0.9 + 0.5 - 0.7 * 0.5 - 0.7 * 0.9 - 0.5 * 0.9 + 0.7 * 0.9 * 0.5 = 0.985\end{aligned}$$

Exercice 2 Trois chasseurs tirent simultanément sur un oiseau, avec des probabilités de succès de 70%, 50% et 90% respectivement. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction Il faut donc calculer la probabilité qu'au moins un chasseur touche l'oiseau. C'est exactement le même calcul qu'à la question 4 de l'exercice précédent. Les succès respectifs des chasseurs sont des évènements indépendants mutuellement.

Exercice 3 Trois étudiants x, y et z attendent dans une file à la porte du secrétariat. On considère les deux événements

- A : "y attend derrière x"
- B : "z attend derrière x"

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur l'ordre d'arrivée des étudiants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction On a 6 ordres d'arrivées possible : xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx. Ils sont équiprobables, donc chaque ordre arrive avec probabilité $\frac{1}{6}$. Donc,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{xyz, xzy, zxy\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{xyz, xzy, yxz\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{xyz, xzy\}) = \frac{1}{3}$$

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, les deux évènements A et B ne sont donc pas indépendants !

Exercice 4 On considère l'ensemble des familles de 2 enfants en admettant que les naissances sont indépendantes et qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille (resp. un garçon) est $1/2$. Soient les événements A ="Le premier enfant est une fille", B ="Le second enfant est une fille", et C ="la famille a des enfants des deux sexes". Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

Correction On a clairement $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad \text{(donc } A \text{ et } B \text{ sont indépendants),}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B^c) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \quad \text{(donc } A \text{ et } C \text{ sont indépendants) et}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A^c \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \quad \text{(donc } B \text{ et } C \text{ sont indépendants).}$$

Cependant, si A et B sont vérifiés, C ne peut pas l'être, donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, donc ces trois évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 5 On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?
2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouez au jeu du 1) ou à celui-ci ?

Correction La loi de G est donnée par le tableau suivant :

k	0	6	15
$\mathbb{P}(G = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

et $\mathbb{E}(G) = 0 * \frac{1}{2} + 6 * \frac{1}{3} + 15 * \frac{1}{6} = 4.5$ euros.

Dans la deuxième version du jeu, le tableau devient

k	0	27
$\mathbb{P}(G = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

et $\mathbb{E}(G) = 0 * \frac{5}{6} + 27 * \frac{1}{6} = 4.5$ euros. En moyenne, l'espérance de gain est donc la même qu'avec la première version du jeu.

Exercice 6 On lance une fois un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On pose $Y = X^2$ et $Z = (X-3)^2$.

1) Quelle est la loi de Y ?
2) Donner la loi de Z et la représenter sous forme d'un graphique (diagramme en bâtons).

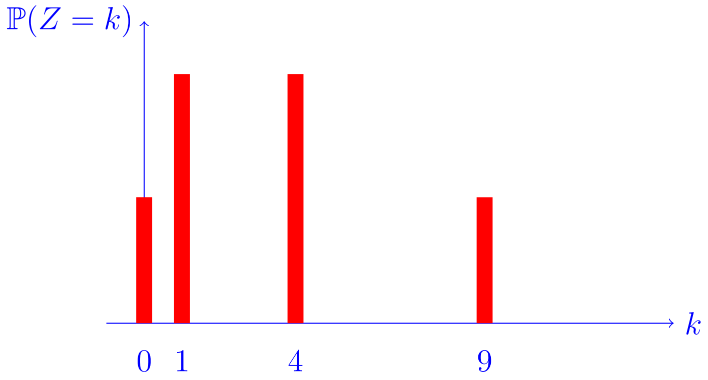
Correction La loi de Y est

k	1	4	9	16	25	36
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La variable Z peut prendre les valeurs $(1-3)^2 = 4$, $(2-3)^2 = 1$, $(3-3)^2 = 0$, $(4-3)^2 = 1$, $(5-3)^2 = 4$, $(6-3)^2 = 9$ et sa loi est représentée par le tableau

k	0	1	4	9
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Sous forme graphique :



Exercice 7 On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire successivement une boule, **avec remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.
2) On tire successivement une boule, **sans remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Correction

1. La variable aléatoire X prend des valeurs entières. Pour tout entier n, l'évènement $\{X = n\}$ est égal à l'évènement « on tire des boules noires lors des $n-1$ premiers tours et au n-ième tirage on tire une boule rouge ». Puisque l'on tire avec remise, et qu'il y a deux boules rouges parmi six, la probabilité de tirer une boule rouge à chaque tour est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, et la probabilité de tirer une boule noire est $\frac{2}{3}$. Par suite, pour tout entier n,

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}.$$

Remarquons que c'est bien une loi de probabilité puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} * \frac{1}{3} = 1.$$

2. Dans le cas d'un tirage sans remise, le rang de la première boule rouge est forcément inférieur à cinq puisqu'il n'y a que quatre boules noires. Dans ce cas, la loi de X est représentée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}\frac{2}{5}$	$\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}$	$\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}$

=

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Exercice 8 On lance trois fois de suite un dé. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple $X = 3$ si le résultat des lancers est $(1, 2, 6)$ et $X = 2$ s'il est $(4, 4, 2)$). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Correction Il y a en tout 6^3 triplets possibles de résultats lorsqu'on tire un dé trois fois de suite. La variable X ne peut prendre que les valeurs 1, 2 et 3. X est égal à 1 si et seulement si les trois valeurs successives obtenues sont égales, donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{6}{6 * 6 * 6} = \frac{1}{36}.$$

De même, $X = 2$ si et seulement si deux valeurs sur les trois sont distinctes. On a $\binom{3}{2}$ choix pour les positions des deux valeurs égales, et $6 * 5$ choix pour les valeurs en question, donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \frac{6 * 5}{6 * 6 * 6} = \frac{5}{12}.$$

Enfin, $X = 3$ si et seulement si les trois valeurs successives sont distinctes, donc

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{6 * 5 * 4}{6 * 6 * 6} = \frac{5}{9}.$$

On vérifie bien que $\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1$.

Exercice 9 Le participant d'un jeu télévisé doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste une première fois, il peut tenter de répondre à l'autre. La question facile rapporte un euro et la question difficile 3 euros. Les questions sont indépendantes, et il estime avoir 30% de chances de bien répondre à la question difficile, et 60% de chances pour la question facile. Calculer la loi et l'espérance de son gain dans le cas où il choisit la question facile en premier, puis dans le cas contraire. Quelle question doit-il choisir ?

Correction Notons X la variable aléatoire représentant le gain du joueur à la fin de la partie. X peut prendre les valeurs 0, 1, 3 et 4.

1. S'il choisit la question facile en premier, la probabilité qu'il se trompe dès la première question est 0.4. La probabilité qu'il réussisse la première question (facile) puis se trompe à la deuxième question (difficile) est $0.6 * 0.7 = 0.42$. La probabilité qu'il réussisse les deux questions est $0.6 * 0.3 = 0.18$. On en déduit le tableau représentant la loi de son gain :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.4	0.42	0.18

L'espérance de X est alors

$$\mathbb{E}[X] = 0.4 * 0 + 0.42 * 1 + 0.18 * 4 = 1.14.$$

2. S'il choisit la question difficile en premier, le tableau devient

k	0	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.7	$0.3 * 0.4$	$0.3 * 0.6$

L'espérance de X est alors

$$\mathbb{E}[X] = 0.7 * 0 + 0.12 * 3 + 0.18 * 4 = 1.08.$$

Le joueur a donc intérêt à choisir la première stratégie !

Exercice 10 Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note X le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de X. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe ?

Correction Il y a en tout $25 + 30 + 35 = 90$ étudiants. La variable aléatoire X ne peut prendre que trois valeurs : 25, 30 et 35. Sa loi est représentée par le tableau

k	25	30	35
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{25}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{35}{90}$

L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = 25 * \frac{25}{90} + 30\frac{30}{90} + 35\frac{35}{90} = \frac{2750}{90} \simeq 30.555556.$$

Cette espérance est différente de la moyenne du nombre d'étudiants par groupe qui est de 30.

Exercice 11 (*) Soient $c \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire de support égal à $\mathbb{N}$, avec $P(X = n) = c\frac{2^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de c puis l'espérance de X.

Correction
On sait qu'on a forcément

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

On reconnaît le développement en série entière de l'exponentielle et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c\frac{2^n}{n!} = ce^2.$$

On en déduit que $c = e^{-2}$.

Exercice 12 Au bowling, Lucie a une probabilité 3/4 de faire tomber toutes les quilles ("strike"). Dans une soirée elle lance 18 boules et on considère les lancers indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de "strike" réussis par Lucie.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer la probabilité pour que Lucie réussisse dix "strike".
3. Quelle est l'espérance du nombre de "strike" réussis dans une soirée, sa variance ?

Correction Pour tout $i = 1, \dots 18$, notons X_i la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si Lucie fait un strike, et 0 sinon. Le nombre de strikes réussi au cours de la soirée est représenté par la variable aléatoire

$$X = \sum_{i=1}^{18} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_{18}.$$

Comme les X_i sont indépendants et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{4}$, cette somme suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(18, \frac{3}{4})$. On en déduit que la probabilité que Lucie réussisse exactement dix strikes dans la soirée est

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{18}{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{8}.$$

L'espérance et la variance du nombre de strikes réussis par Lucie dans la soirée valent :

$$\mathbb{E}[X] = 18 * \frac{3}{4} = 13.5, \quad \text{et}$$

$$\mathbf{Var}[X] = 18 * \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{27}{8}.$$