

Contours et régions dans les images

Julie Delon

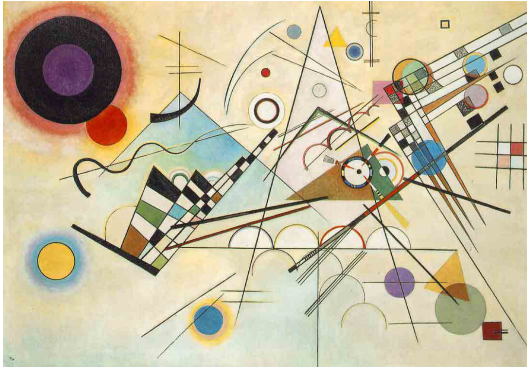
Cours de Master M2 MVA

Introduction



Quels sont les lois, principes gouvernant la construction visuelle ?

Introduction



Quels sont les lois, principes gouvernant la construction visuelle ?

Définition naïve

Definition

Segmenter une image = la diviser en *régions homogènes*, pour un ou plusieurs attributs donnés (niveau de gris, texture, etc). On appelle *bords* ou *contours* de l'image les frontières entre ces régions.

Dualité Contours / Régions.

« *Gestaltists and psychophysicists agree that such a segmentation process is at work at the very first stages of the visual perception process. In addition they proved that these first stages are highly independent of any learning or a priori knowledge of the world.* »

Dans Morel-Solimini, *Variational Methods in Image Segmentation*, Birkhäuser, 1995.

Un problème mal posé

La notion de bonne segmentation/bonne détection de contours dépend fortement du type d'image à traiter et des applications envisagées.

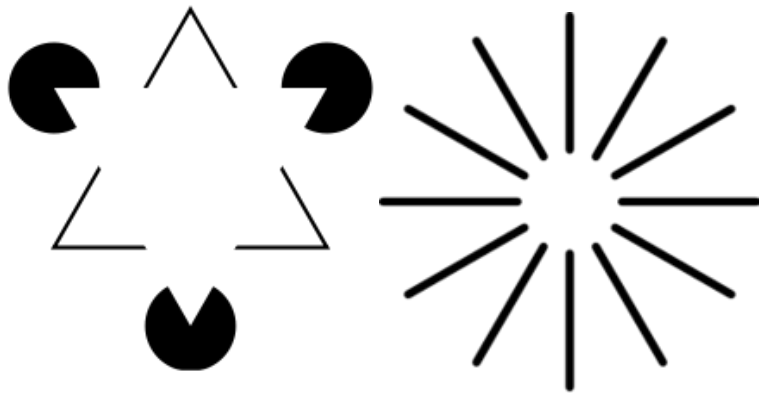
Un problème mal posé



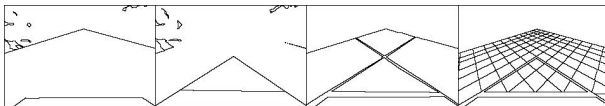
Un problème mal posé



Un problème mal posé



Problème mal posé



Base empirique de segmentations faites à la main, disponibles sur le site
<http://www.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/grouping/segbench/>
Martin et al., ICCV 2001

Problème mal posé



Base empirique de segmentations faites à la main, disponibles sur le site
<http://www.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/grouping/segbench/>
Martin et al., ICCV 2001

Etat de l'art

Approches "bords"

- Méthodes "historiques" de détection de contours : Hildreth, Marr, Haralick, Canny, méthodes d'edge-linking ;
- Contours actifs, *snakes*, level sets ;
- Méthodes basées sur la carte topographique.

Approches "régions"

- Méthodes de segmentation globales : segmentation de l'histogramme 1D, 2D... ;
- Méthodes par transformation de région : Region Growing, Split and Merge ;
- Méthodes par propagation de germes (*seeds*) ;
- Optimisation globale de type Graph-Cuts sur l'ensemble des régions ;

Approches "mixtes"

- Méthodes variationnelles (modèle de Mumford Shah).

Problème : garder les bords nets et bien localisés, tout en régularisant à l'intérieur de régions.

Notations

- Ω le domaine de l'image. Si l'image est discrète, Ω est une grille rectangulaire de pixels de taille $|\Omega| = M \times N$.
- $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $u_0 : \Omega \rightarrow \{0, \dots, 255\}$ l'image à segmenter (continue ou discrète).
- u ou v l'image segmentée (en général une image constante par morceaux).

Première partie I

Méthodes globales utilisant l'histogramme

Méthodes par seuillage d'histogramme

Principe

Une segmentation de l'histogramme de niveaux de gris h_{u_0} donne une segmentation de l'image u_0 .

Ces méthodes sont globales : elles n'utilisent pas l'information spatiale sur les pixels.

Binarisation, seuillage multiniveaux supervisé ou non, mélange de gaussiennes, seuillage local, etc.

Les différentes régions de la segmentation sont données par les composantes connexes des ensembles $\{x | \tilde{u}(x) = \text{cte}\}$.

[B. Sankur, M. Sezgin], A Survey Over Image Thresholding Techniques And Quantitative Performance Evaluation, *Journal of Electronic Imaging*, 13(1), 146-165, January, 2004.

Méthodes par seuillage d'histogramme

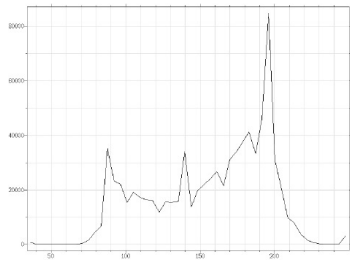
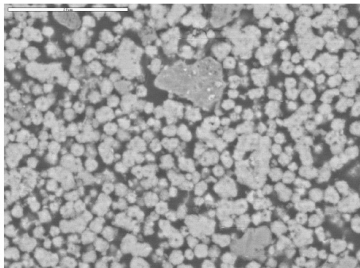
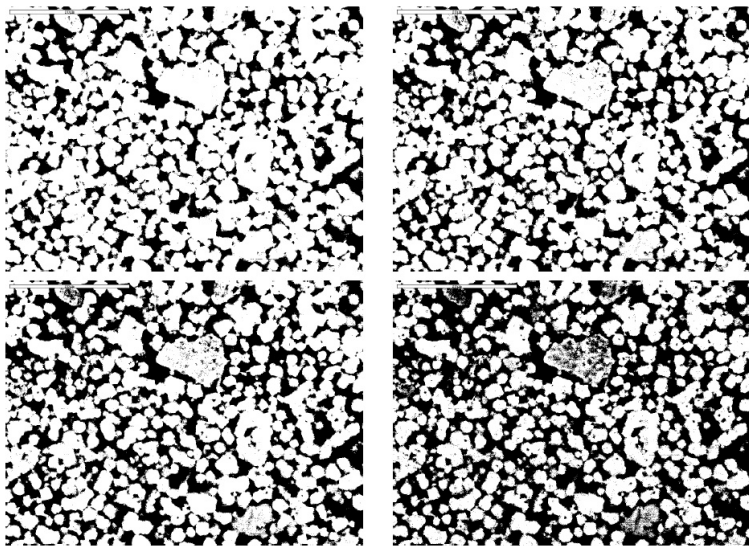


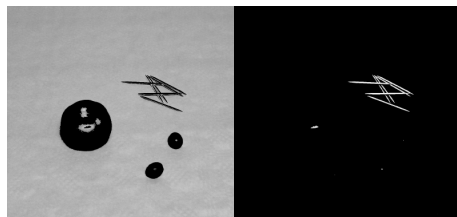
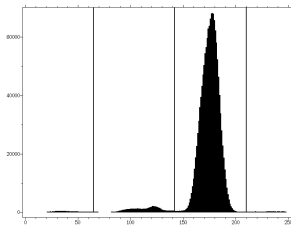
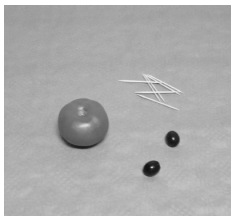
Image d'un milieu poreux et son histogramme de niveaux de gris.

Méthodes par seuillage d'histogramme



Binarisations avec seuils 135, 145, 155, 165.

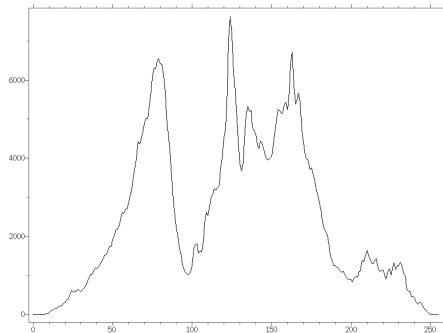
Méthodes par seuillage d'histogramme



Cas des images couleurs : seuillage de l'image de teinte (*Hue*) ou clustering de l'histogramme de couleurs de l'image.

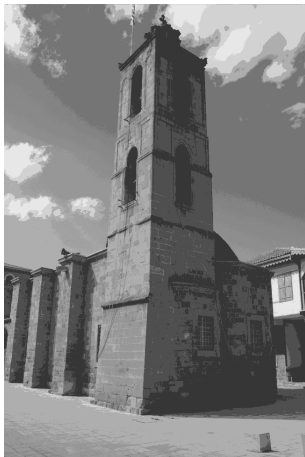
[J. Delon, A. Desolneux, J-L. Lisani et A-B. Petro], A non parametric approach for histogram segmentation, IEEE Transactions on Image Processing, vol.16, no 1, pp.253-261, Janvier 2007

Méthodes par seuillage d'histogramme



Une image naturelle et son histogramme de niveaux de gris.

Méthodes par seuillage d'histogramme



Segmentation de l'image précédente à l'aide de 9, 4 ou 2 seuils (respectivement 10, 5 ou 3 niveaux de gris dans les images finales).

Deuxième partie II

Méthodes classiques de détection de contours

Méthodes de détection de contours

Approches classiques basées sur les propriétés locales des bords (dérivées 1ère et 2nde de l'image). Approches liées historiquement à la théorie du filtrage linéaire.

Méthodes de détection de contours

Approche naïve : regarder les points où le gradient est fort, $|\nabla u_0| > \lambda$.



u_0 , $\|\nabla u_0\|$ et indicatrice de $\{x; |\nabla u_0(x)| > 10\}$.

Méthodes de détection de contours

Approche naïve : regarder les points où le gradient est fort, $|\nabla u_0| > \lambda$.

Pas pratique : donne des régions plutôt que des courbes et très sensible au bruit.



Même chose après ajout d'un bruit gaussien d'écart-type 10.

Méthodes de détection de contours

Approche naïve : regarder les points où le gradient est fort, $|\nabla u_0| > \lambda$.

Pas pratique : donne des régions plutôt que des courbes et très sensible au bruit.

Solution : Préfiltrage obligatoire pour éviter de détecter du bruit, des textures etc. (caractère oscillatoire de l'image).



Après convolution par un filtre gaussien d'écart-type 2.

Méthodes de détection de contours

Passages par zéro du Laplacien [Marr-Hildreth, 1980]

- 1 points où $\Delta G_\sigma * u_0$ change de signe (*zero-crossing*).
- 2 hysteresis.

Le laplacien peut être approché par une différence de Gaussiennes : $\Delta G_\sigma = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial \sigma}$.

`edge (u, 'log')` sous Matlab.

Marr, D. and Hildreth, "Theory of Edge Detection", *Proceedings of the Royal Society of London B*, vol 207 : 187-217. 1980

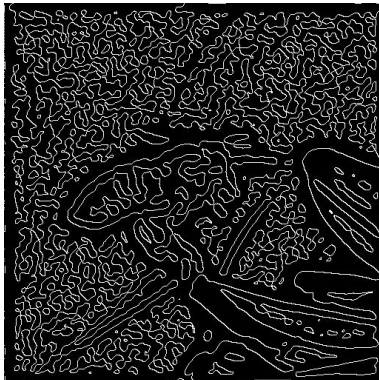
Passages par zéro du laplacien

Second ordre : u_0 et $\Delta G_\sigma * u_0$ pour $\sigma = 2$.



Passages par zéro du laplacien

Passages par 0 du Laplacien



Passages par zéro du laplacien

Restriction aux points où la norme du gradient est supérieure à 10.



Méthodes de détection de contours

Passages par zéro de $D^2 u_0(Du_0, Du_0)$ [Haralick 1984, Canny 1986, Deriche 1987]

- 1 maximas locaux de $|Du_0|$ dans la direction du gradient, *i.e.* points où $D^2 u_0(Du_0, Du_0)$ s'annule (u_0 est d'abord convolée avec G_σ).
- 2 hysteresis

`edge(u, 'canny')` sous Matlab.

Canny, J., A Computational Approach To Edge Detection, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8 :679-714, 1986.

Passage par 0 de la dérivée seconde dans la direction du gradient

Second ordre : u_0 et $\Delta G_\sigma * u_0$ pour $\sigma = 2$.



Passage par 0 de la dérivée seconde dans la direction du gradient

Passages par zéro de $\Delta u = D^2 u(Du, Du)$



Passage par 0 de la dérivée seconde dans la direction du gradient

Restriction aux points où la norme du gradient est supérieure à 10.



Troisième partie III

Méthodes de type “region-growing”, “edge-growing”

Méthodes de détection de contours et Edge-linking

Algorithmes d'**edge-linking** pour retrouver des courbes fermées.
Méthodes aujourd'hui délaissées pour les méthodes de contours actifs.

Formulation "synthétique" (voir [Morel-Solimini]) : on cherche K_λ qui minimise

$$E_\lambda(K_\lambda) = \lambda \left(\int_{K_\lambda} (1 + \text{curv}(K_\lambda)^2(\sigma)) d\sigma + \mu \text{card}(\partial K_\lambda) \right) - \int_{K_\lambda} |\nabla u_0(\sigma)|^2 d\sigma - \int_{K_\lambda} \left| \frac{\partial u_0}{\partial n}(\sigma) \right| d\sigma + \text{length}(K_\lambda \setminus K_0).$$

Tous les termes ne sont pas forcément nécessaires. Si on ne garde que les termes 1 et 3 on retrouve les "snakes" de [Kass, Witkin, Terzopoulos].

[Morel, J.-M., Solimini, S.], (1995), *Variational Methods in Image Segmentation*, Boston, Birkhäuser.

[M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos], 'Snakes : active contours models,' *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, pp. 321-331, January 1988.

Algorithmes de croissance de région ou de croissance de bords

Dés la fin des années 60's, début 70's.

Croissance de région :

- 1 **Initialisation** : une partition initiale (tous les pixels ou régions constituées de pixels connexes de même niveau de gris), ou un ensemble de germes ;
- 2 **Merging** : tant que c'est possible, réunion des paires de régions qui vérifient une propriété d'homogénéité donnée (contraste, variance...) ou réunion des paires de régions dont le regroupement améliore l'"énergie" de segmentation.

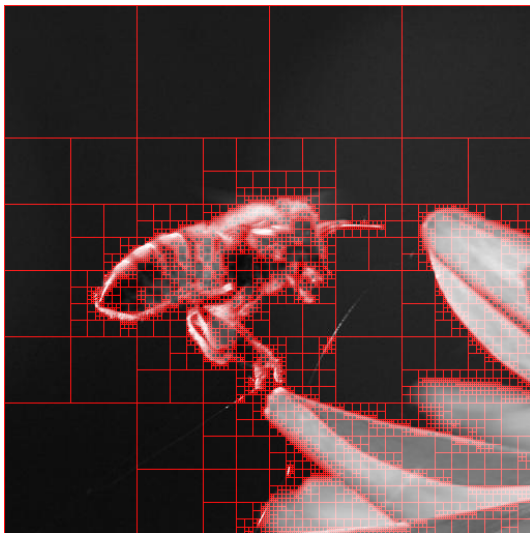
Partage de région (split) : on découpe jusqu'à ce que toutes les régions vérifient une propriété donnée ou tant que l'énergie décroît.
Existence d'algorithmes hybrides "split and merge".

Algorithmes de croissance de région ou de croissance de bords

Remarques :

- Algorithmes en général non basés sur des modèles théoriques, dépendant d'un grand nombre de paramètres (seuils) heuristiques et implicites.
- Mais certains de ces algorithmes ont une énergie "sous-jacente" ou explicite et peuvent se reformuler de manière variationnelle (minimisation d'une énergie).
- Les paramètres des méthodes sont ainsi transformés en poids devant les différents termes de la fonctionnelle à minimiser. Paramètre = notion d'échelle.

Algorithmes de croissance de région ou de croissance de bords



Fonction `qtdecomp` sous matlab : quadtree decomposition.

Algorithmes de croissance de régions

Algorithme de Brice et Fennema (1970)

Critère de ressemblance entre deux régions = faible saut de niveau de gris le long de leur bord commun.

- 1 Initialisation : pixels de mêmes niveaux de gris regroupés entre eux en régions ;
- 2 On réunit deux régions O_i et O_j adjacentes de bord commun $\partial(O_i, O_j)$ si

$$\beta \mathcal{L}(\partial(O_i, O_j)) < \mathcal{L}(\{x \in \partial(O_i, O_j) ; \left| \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) \right| < \delta\}),$$

où $0 < \beta < 1$ et δ sont deux paramètres ;

- 3 Recommencer 2 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus réunir deux régions adjacentes.

Revient à minimiser l'énergie variationnelle

$$E_\lambda(K) = \mathcal{L}(K)(1 - \beta) - \mathcal{L}(\{x \in K ; \left| \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) \right| \geq \delta\}).$$

Fonctionnelle "sans seuils" sur K : $E_\lambda(K) = \lambda \mathcal{L}(K) - \int_K \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| d\sigma \rightarrow \textit{snakes!}$

Algorithmes de croissance de régions

Algorithme de Pavlidis (1972)

- 1 Initialisation : régions = tous les pixels
- 2 On regroupe récursivement toutes les paires de régions telles que $Var(O_i \cup O_j) < \lambda$.

Algorithmes de croissance de régions

Algorithme de Pavlidis (1972)

- 1 Initialisation : régions = tous les pixels
- 2 On regroupe récursivement toutes les paires de régions telles que $Var(O_i \cup O_j) < \lambda$.

Revient au problème de minimisation sous contrainte suivant

$$\min_{Var(O_i) < \lambda} Card((O_i)_i)$$

où $((O_i)_i)$ parcourt l'ensemble des partitions finies de Ω .

Pas de contrôle de la régularité des contours.

Algorithmes de croissance de régions

Algorithme de Beaulieu et Goldberg (1989)

- 1 Initialisation : régions = tous les pixels
- 2 On réunit les deux régions O_i et O_j telles que $Var(O_i \cup O_j) - Var(O_i) - Var(O_j)$ est minimale.
- 3 L'algorithme s'arrête quand on a le nombre de régions désiré.

[J. BEAULIEU and M. GOLDBERG]. Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach. IEEE on Trans. on Patt. Anal. and Mach. Int., 11(2) : 150-163, 1989.

Algorithmes de croissance de régions

Algorithme de Beaulieu et Goldberg (1989)

- 1 Initialisation : régions = tous les pixels
- 2 On réunit les deux régions O_i et O_j telles que $Var(O_i \cup O_j) - Var(O_i) - Var(O_j)$ est minimale.
- 3 L'algorithme s'arrête quand on a le nombre de régions désiré.

Revient à minimiser l'énergie

$$E((O_i)_i) = \sum_i Var(O_i) \text{ sous la contrainte } Card((O_i)_i) = c.$$

Compromis cardinal / variance.

Fonctionnelle "sans seuil" à minimiser : $E((O_i)_i) = \sum_i Var(O_i) + \lambda Card((O_i)_i)$. λ est le paramètre d'échelle. Condition d'arrêt $Var(O_i \cup O_j) - Var(O_i) - Var(O_j) < \lambda$

A nouveau, pas de contrôle de la régularité des contours !

[J. BEAULIEU and M. GOLDBERG]. Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach. IEEE on Trans. on Patt. Anal. and Mach. Int., 11(2) : 150-163, 1989.

Formulation variationnelle

Energie naturelle associée à toute segmentation (u, K) de l'image u_0 , qui mesure

- la quantité d'information contenue dans u version régularisée de u_0 ;
- la longueur et la régularité des bords K .

$$E(u, K) = \beta \mathcal{L}(K) + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2.$$

Fonctionnelle de Mumford et Shah : énergie multiéchelle à minimiser en (u, K)

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{L}(K)}_{\text{coût de la segmentation}} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{\text{attache aux données}}.$$

Minimiser F revient à trouver u régulière qui soit proche de u_0 sans avoir trop de bords.

Formulation variationnelle : cas particulier

Si u supposée constante sur chaque région, revient à minimiser

$$E(K) = \beta \mathcal{L}(K) + \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2,$$

où u est constante sur chaque région connexe ($\bar{u}_i = u|_{O_i} = \frac{1}{|O_i|} \int_{O_i} u_0$).

- terme $\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx$ équivalent du terme $\sum_i \text{Var}(O_i)$ dans la méthode de croissance de régions de Beaulieu de Goldberg.

Paramètre d'échelle β

- petit \Rightarrow grand nombre de bords (segmentation fine)
- grand \Rightarrow faible nombre de bords (segmentation grossière).

Exemple de non-unicité de la solution : $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et $u_0 = \chi_{D(0,1)}$.

- $\beta < \beta_0$:
- $\beta > \beta_0$:
- $\beta = \beta_0$:

Formulation variationnelle : cas particulier

Si u supposée constante sur chaque région, revient à minimiser

$$E(K) = \beta \mathcal{L}(K) + \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2,$$

où u est constante sur chaque région connexe ($\bar{u}_i = u|_{O_i} = \frac{1}{|O_i|} \int_{O_i} u_0$).

- terme $\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx$ équivalent du terme $\sum_i \text{Var}(O_i)$ dans la méthode de croissance de régions de Beaulieu de Goldberg.

Paramètre d'échelle β

- petit \Rightarrow grand nombre de bords (segmentation fine)
- grand \Rightarrow faible nombre de bords (segmentation grossière).

Exemple de non-unicité de la solution : $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et $u_0 = \chi_{D(0,1)}$.

- $\beta < \beta_0$: solution $(u_\beta, K_\beta) = (u_0, \partial D)$
- $\beta > \beta_0$: solution $(u_\beta, K_\beta) = (\bar{u}_0, \emptyset)$
- $\beta = \beta_0$: deux solutions

Quatrième partie IV

Fonctionnelle de Mumford-Shah

Fonctionnelle de Mumford et Shah

On cherche (u, K) avec $K \subset \Omega$ un ensemble de discontinuités, qui minimisent

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{L}(K) + \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{\text{terme de régularité}} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{\text{attache aux données}},$$

avec β et α positifs.

Conjecture (Mumford-Shah, 1989)

Il existe au moins un minimiseur (u, K) de F tel que K est constitué d'une union finie d'arcs C^1 dont chaque extrémité libre est

- *soit un point triple, auxquels trois arcs se rencontrent avec des angles de $2\pi/3$,*
- *soit un point de $\partial\Omega$ que l'arc rencontre perpendiculairement.*

Reste une question ouverte, mais un certain nombre de choses ont été démontrées.

Problème : on ne peut pas imposer *a priori* que K est constitué d'un ensemble d'arcs réguliers. Ambiguïté du terme $\mathcal{L}(K)$ pour un quelconque K fermé de Ω .

Fonctionnelle de Mumford et Shah

Definition

Pour $K \subset \Omega$, on définit la **mesure de Hausdorff** $\mathcal{H}^1(K)$ comme

$$\mathcal{H}^1(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i \in I} |\text{diam}(A_i)| \ ; \ \text{diam}(A_i) \leq \delta \text{ et } K \subset \cup A_i \right\}.$$

- Si $0 < \mathcal{H}^1(K) < \infty$, on dit que la dimension de Hausdorff de K est égale à 1.

Permet d'**étendre la notion de longueur au cas de courbes non C^1** . Si K est C^1 (décrite par $x : [0, 1] \rightarrow \Omega$), $\mathcal{H}^1(K) = \int_0^1 \|x'(t)\| dt$.

On peut donc reformuler le problème comme la minimisation de

$$F(u, K) = \beta \mathcal{H}^1(K) + \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2,$$

pour $K \subset \Omega$ fermé et $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$.

Fonctionnelle de Mumford et Shah

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{H}^1(K)}_{(1)} + \underbrace{\alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{(3)},$$

avec $K \subset \Omega$ fermé et $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$.

Si on enlève un des trois termes, le minimiseur est trivial :

- (2) + (3)
- (1) + (2)
- (1) + (3)

Fonctionnelle de Mumford et Shah

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{H}^1(K)}_{(1)} + \underbrace{\alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{(3)},$$

avec $K \subset \Omega$ fermé et $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$.

Si on enlève un des trois termes, le minimiseur est trivial :

- (2) + (3) $\Rightarrow F(u, \Omega) = 0$,
- (1) + (2)
- (1) + (3)

Fonctionnelle de Mumford et Shah

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{H}^1(K)}_{(1)} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{(3)},$$

avec $K \subset \Omega$ fermé et $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$.

Si on enlève un des trois termes, le minimiseur est trivial :

- (2) + (3) $\Rightarrow F(u, \Omega) = 0$,
- (1) + (2) $\Rightarrow F(0, \emptyset) = 0$,
- (1) + (3)

Fonctionnelle de Mumford et Shah

$$F(u, K) = \underbrace{\beta \mathcal{H}^1(K)}_{(1)} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2}_{(3)},$$

avec $K \subset \Omega$ fermé et $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$.

Si on enlève un des trois termes, le minimiseur est trivial :

- (2) + (3) $\Rightarrow F(u, \Omega) = 0$,
- (1) + (2) $\Rightarrow F(0, \emptyset) = 0$,
- (1) + (3) $\Rightarrow F(u_0, \emptyset) = 0$.

Fonctionnelle de Mumford et Shah : minimisation

Étapes “génériques” en calcul des variations pour trouver un point qui atteint

$$\inf_{x \in X} F(x),$$

- 1 construction d'une suite minimisante x_n de F (i.e. t.q. $\lim F(x_n) = \inf_{x \in X} F(x)$);
- 2 si possible, extraction d'une sous-suite (x_{n_j}) de (x_n) qui converge en un certain sens vers un x_0
- 3 on essaye de prouver que x_0 est un minimiseur de F

Difficultés pour appliquer ces étapes dans le cas $\inf_{(u,K)} F(u, K)$: 2 inconnues de natures différentes.

⇒ besoin d'une formulation différente pour prouver l'existence de solutions.

Fonctionnelle de Mumford et Shah

Alternative Minimiser pour $u \in SBV(\Omega)$

$$G(u) = \beta \mathcal{H}^1(S_u) + \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2.$$

Deux résultats importants :

- 1 Ambrosio, (1989) : montre que $\inf\{G(u); u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\} \leq \inf\{F(u, K); u \in W^{1,2}(\omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } K \text{ fermé tel que } \mathcal{H}^1(K) < \infty\}$.
- 2 Par ailleurs, il a été montré que G a au moins un minimiseur u à partir duquel on peut construire un minimiseur (u, K) de F .

Donc **Existence d'un minimiseur (u, K) de F .**

Par contre : **pas de résultat d'unicité !**

Propriétés des minimiseurs de F

Théorème (Mumford-Shah)

Si (u, K) est un minimiseur de F tel que

- K est composé d'un nombre fini d'arcs $C^{1,1}$ (notés γ_i) ne se coupant et ne rencontrant $\partial\Omega$ qu'à leurs extrémités,
- u est C^1 sur chaque composante connexe de $\Omega \setminus K$,

Alors

$$\alpha\Delta u = u - u_0 \text{ sur } \Omega \setminus K \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ sur } K \cap \Omega \text{ et sur } \partial\Omega \quad (2)$$

$$e(u_{int}) - e(u_{ext}) + \beta \text{curv} \gamma_i = 0 \text{ sur } \gamma_i, \quad (3)$$

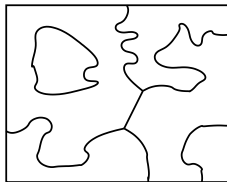
où $e(u) = (u - u_0)^2 + \alpha|\nabla u|^2$, u_{int} et u_{ext} étant les valeurs de u des deux côtés de γ_i .

Propriétés des minimiseurs de F

Sous les mêmes hypothèses sur K , Mumford et Shah ont démontré que les seules singularités possibles pour K sont

- les points triples P où trois arcs γ_i se rencontrent en formant des angles de 120° ;
- les points P où un arc γ_i rencontre $\partial\Omega$ perpendiculairement ;
- les points terminaux (dits *crack tips*) P où un arc se termine sans en rencontrer un autre.

[D.MUMFORD, J.SHAH] - Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problem, Commun. Pure Appl. Math., vol42 :577-685, 1989



→ influence des conditions de régularité sur K sur la **non-unicité** de la solution.

Pour d'autres résultats plus généraux sur les minimiseurs de F , voir :

[G.AUBERT, P.KORNPROBST] - Mathematical Problems in Image Processing - Partial Differential Equations and the calculus of variations, Applied Mathematical Sciences. vol17, Springer 2001.

Approximation pratique : u constante par morceaux

u supposée constante sur chaque région, les régions sont les composantes connexes de $\Omega \setminus K$. On rappelle que la fonctionnelle devient :

$$E(K) = \beta \mathcal{L}(K) + \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2,$$

où sur chaque région $\bar{u}_i = u|_{O_i} = \frac{1}{|O_i|} \int_{O_i} u_0$.

Algorithmiquement, comment trouver le meilleur K ?

[J.-M. Morel et S. Solimini], Variational methods in image segmentation, Birkhauser, 1995.

[G. Koepfler, J.-M. Morel, et S. Solimini], Segmentation by minimizing functionals and the merging methods, in Actes du 13^{eme} Colloque GRETSI, Juan-les-Pins, septembre 1991, pp. 1033-1036.

Approximation pratique : segmentation 2-normale (G. Koepfler)

Une segmentation K est dite **2-normale** si pour toute paire de régions voisines O_i et O_j , la nouvelle segmentation K' obtenue en fusionnant ces régions vérifie $E(K') > E(K)$.

Pour deux régions voisines O_i et O_j , on a le critère de fusion

$$E(K \setminus \partial(O_i, O_j)) - E(K) < 0, \text{ i.e. } \frac{|O_i||O_j|}{|O_i| + |O_j|} \cdot \|u_i - u_j\|^2 < \beta \mathcal{L}(\partial(O_i, O_j)).$$

On peut donc calculer la valeur de β à partir de laquelle éliminer le bord $\partial(O_i, O_j)$ fait décroître l'énergie.

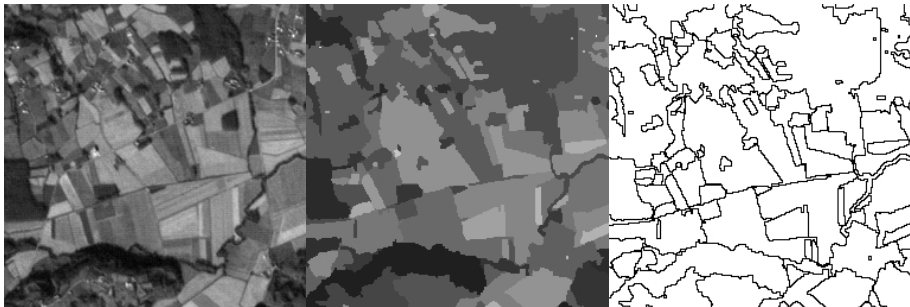
Algorithme

- 1 Initialisation : K_0 union des frontières de tous les pixels et u est constante sur les pixels
- 2 pour tout couple de régions voisines, calculer la valeur β pour laquelle la réunion des régions fait décroître E
- 3 réunir le couple de régions pour lequel le β trouvé est minimum puis mettre à jour les données
- 4 répéter l'étape 3 jusqu'à ce qu'on ait le nombre de régions demandé (ou le β voulu).

Cet algorithme est pyramidal en ce sens que si $\beta \leq \beta'$ alors $K_{\beta'} \subset K_{\beta}$.

Remarque : peut se généraliser à des images vectorielles (images couleurs, images de réponse à différents filtres, etc.)

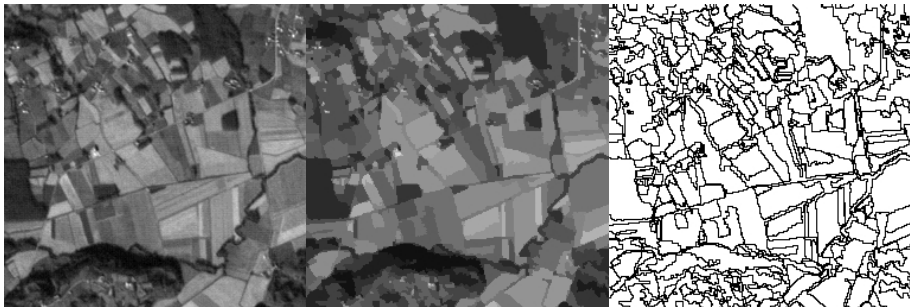
Segmentation 2-normale - Expériences



65536 régions initiales et 130560 bords.

116 régions finales à $\beta = 2455$

Segmentation 2-normale - Expériences



65536 régions initiales et 130560 bords.

827 régions finales à $\beta = 500$

Segmentation 2-normale - Expériences

Segmentation d'images à plusieurs canaux (ex images couleurs).



426400 régions initiales et 851467 bords.
499 régions finales à $\beta = 2455$

Segmentation 2-normale - Expériences

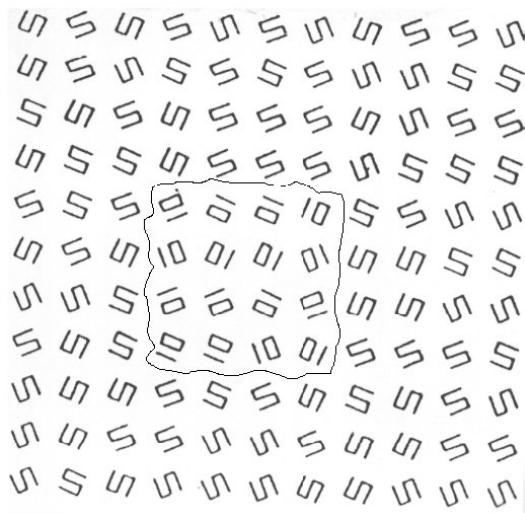
Segmentation d'images à plusieurs canaux (ex images couleurs).



425867 régions initiales et 850402 bords.

500 régions finales à $\beta = 1409$

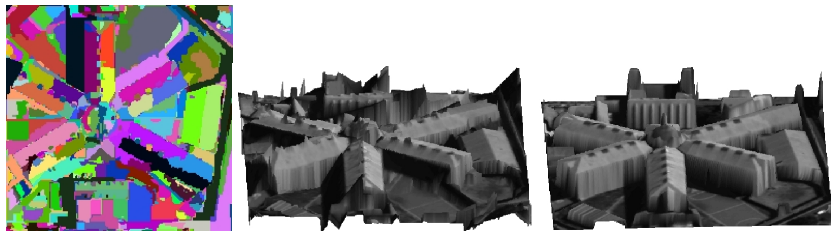
Segmentation 2-normale - Expériences



Segmentation utilisant la courbure.

Application à la reconstruction 3D

Reconstruction affine par morceaux à partir d'une première carte de disparités et d'une segmentation de l'image.



A gauche : segmentation utilisée ; au milieu : reconstruction 3d obtenue ; à droite : vérité terrain.

[L. Igual, J. Preciozzi, L. Garrido, A. Almansa, V. Caselles, B. Rougé], Automatic low baseline stereo in urban areas, *Inverse Problems and Imaging IPI*.

Cinquième partie V

Contours actifs

Contours actifs - Snakes

But : trouver le contour des objets présents dans l'image

Principe : à partir d'un contour initial grossier, faire évoluer la courbe pour qu'elle se rapproche du contour de l'objet (d'où le nom "snakes").

Energie d'un contour se décompose en

- une énergie externe qui mesure l'adéquation du contour aux données (gradient de l'image par ex)
- une énergie interne qui mesure la régularité du contour.

Modèle Kass-Witkin-Terzopoulos (1988)

Kass-Witkin-Terzopoulos (1988) *Snakes : Active Contours Models*

Contours représentés par un ensemble de courbes continues de \mathbb{R}^2 du type $c : [a, b] \rightarrow \Omega$, C^1 par morceaux telles que $c(a) = c(b)$. On cherche alors à minimiser

$$J(c) = \underbrace{\int_a^b \|c'(q)\|^2 dq + \beta \int_a^b \|c''(q)\|^2 dq}_{\text{énergie interne, régularité}} + \lambda \underbrace{\int_a^b g^2(|\nabla u_0(c(q))|) dq}_{\text{attache aux données}},$$

où $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est décroissante telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{\infty} g = 0$.

Si q est l'abscisse curviligne, le terme de régularité est en fait

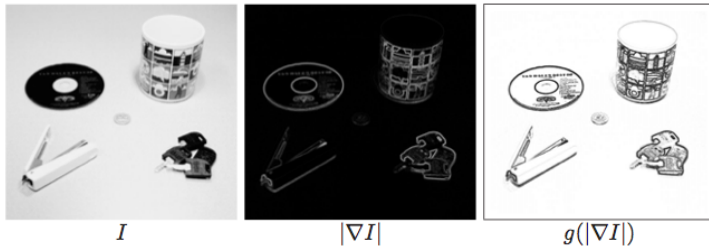
$$\mathcal{L}(c) + \beta \underbrace{\int \|\kappa(s)\|^2 ds}_{\text{terme d'élasticité}}$$

⇒ formulation non intrinsèque, dépend de la paramétrisation !

[M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos], *Snakes : Active contour models*, Int. J. Comput. Vis., vol. 1, pp. 321-331, 1988.

Modèle Kass-Witkin-Terzopoulos (1988)

Fonction g grande aux points de bord.



Exemple tiré des *Mathematical Problems in Image Processing* de G. Aubert et P. Kornprobst.

Modèle Kass-Witkin-Terzopoulos (1988)

Equation d'Euler-Lagrange : on peut montrer que J admet au moins un minimum global sur $(W^{2,2}(a, b))^2$ et que ce minimum satisfait une équation différentielle d'ordre 4

$$-c'' + \beta c^{(iv)} + \frac{\lambda}{2} \nabla h(c) = 0 \text{ et } c(a) = c(b),$$

où $h = g^2(|\nabla u_0|)$.

Résolution possible par différences finies. Mais J **non convexe** \Rightarrow pas de résultats d'unicité et la résolution de cette équadiff ne permet que d'atteindre un minimum local.

Autre possibilité de résolution : équation d'évolution en temps en initialisant la courbe à $c(t = 0, q) = c_0(q)$ autour de l'objet à détecter

Problèmes de ce modèle :

- c_0 doit être choisi très proche de l'objet à détecter ;
- pas intrinsèque
- ne gère pas les changements de topologie ;
- problème de discrétisation de la courbe (concentration ou espacement de points...)

Contours actifs géodésiques

Caselles, Kimmel, Sapiro 1995 *Geodesic Active Contours*

$$J_2(c) = \int_a^b g(|\nabla u_0(c(q))|) |c'(q)| dq.$$

- ne dépend pas de la paramétrisation $q \rightarrow$ **intrinsèque** !
- J_2 est une mesure de longueur pondérée par $g(|\nabla u_0|)$ le long de la courbe.

Evolution en temps : $J_2(t) = J_2(c(t, q))$ avec $c(0, q) = c_0(q)$, alors

$$J_2'(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, N \right\rangle [\langle \nabla h \circ c, N \rangle - \kappa h \circ c],$$

avec $h = g \circ |\nabla u_0|$, $\kappa(q)$ et $N(q)$ respectivement la courbure et la normale à la courbe c en q .

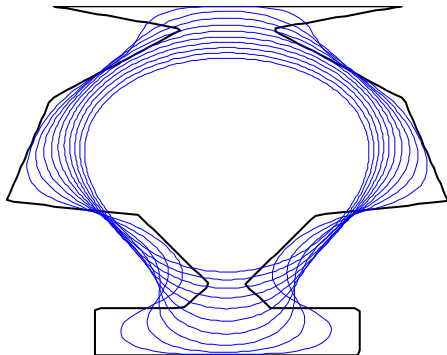
\Rightarrow **direction de plus grande pente** $\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa h \circ c - \langle \nabla h \circ c, N \rangle) N$.

Forme d'équivalence entre les formulations J et J_2 sous de bonnes conditions sur g .

[V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro], On geodesic active contours, *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 22, no. 1, pp. 61-79, 1997.

Mouvement par courbure moyenne

Si $g = 1$, pas d'attache aux données, on retrouve le mouvement par courbure moyenne, soit $\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa N$.



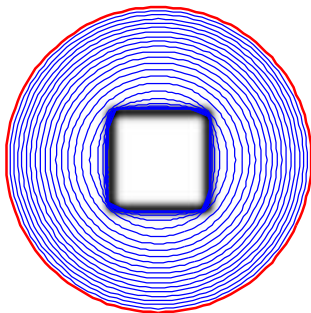
Contours actifs géodésiques

En pratique, minimisation améliorée en ajoutant un terme α à la courbure de manière à ce que $\kappa + \alpha$ soit de signe constant

$$\frac{\partial c}{\partial t} = ((\kappa + \alpha)h \circ c - \langle \nabla h \circ c, N \rangle)N.$$

Résolution possible : paramétrisation de c et discrétisation de l'équation, mais

- discrétisation peut devenir très irrégulière (accumulations, parties vides) avec t ;
- problème topologiques.



Contours actifs géodésiques : formulation *level sets*

Formulation *level sets* : la courbe est vue comme l'ensemble de niveau zéro d'une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. $\forall q, \forall t \geq 0 \phi(t, c(t, q)) = 0$. Si ϕ suffisamment régulière

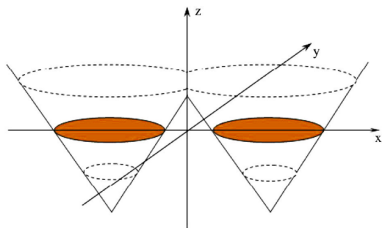
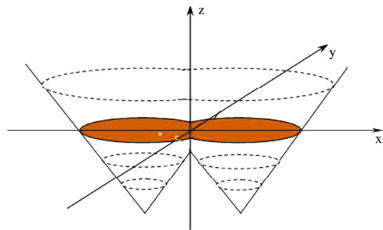
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = h \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \alpha |\nabla \phi| + \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle \right), \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \Omega$$

$\phi(0, x) =$ distance de x à c_0 et $\frac{\partial \phi}{\partial N} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \partial \Omega$.

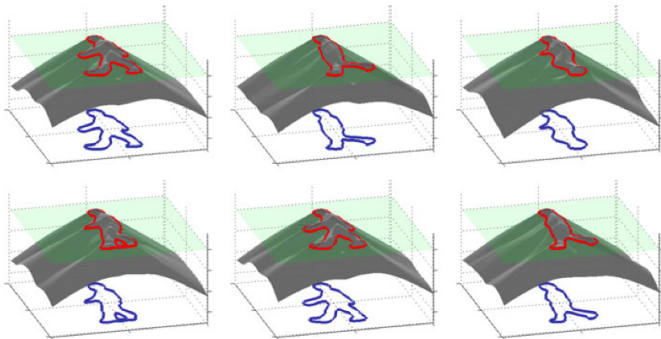
Avantages

- permet des changements de topologie
- grille discrète pour ϕ , schéma de type différences finies, pas de problème de discrétisation de courbe.

Contours actifs géodésiques

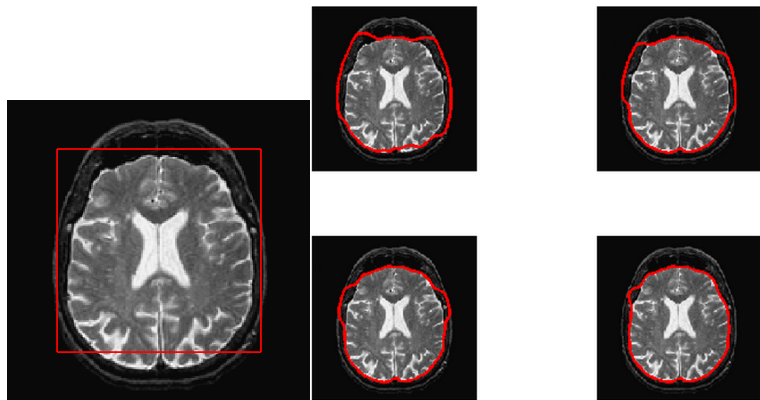


Contours actifs géodésiques



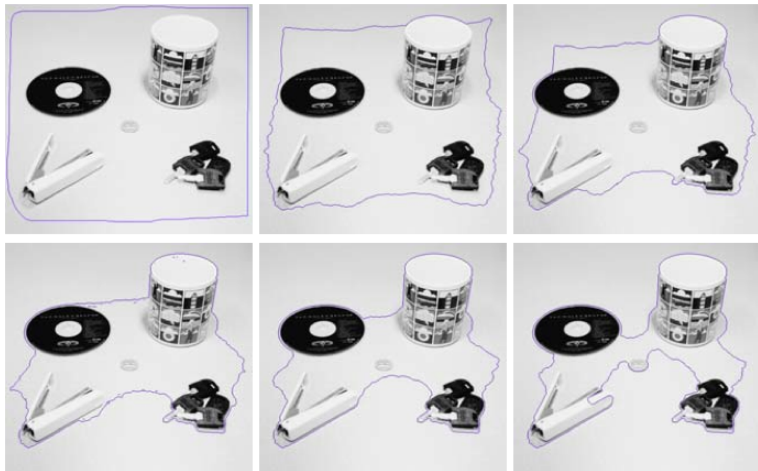
Exemple pris dans *Handbook of Mathematical methods in imaging*, Schnoerr, 2011.

Contours actifs géodésiques



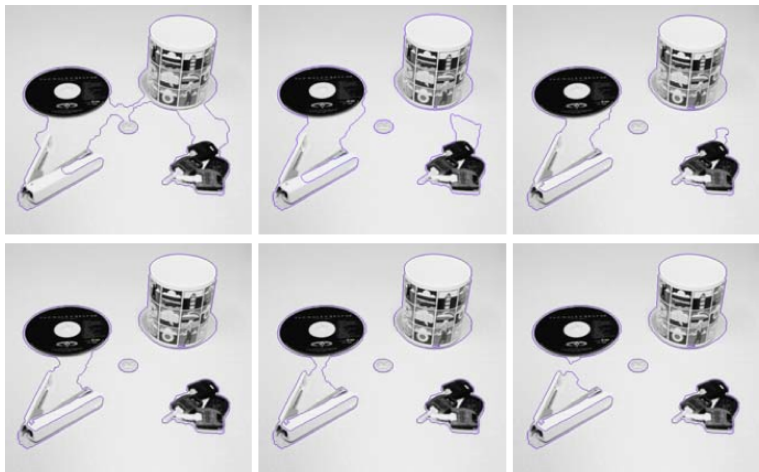
Exemple tiré des *Numerical Tours* de Gabriel Peyré.

Contours actifs géodésiques



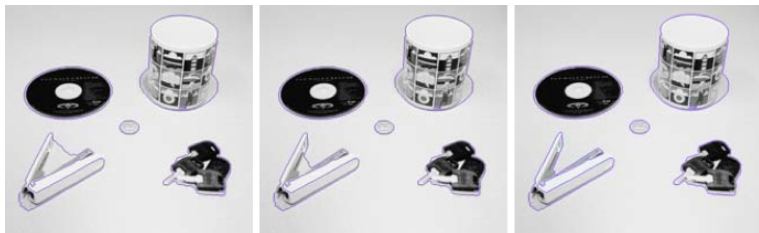
Exemple tiré des *Mathematical Problems in Image Processing* de G. Aubert et P. Kornprobst.

Contours actifs géodésiques



Exemple tiré des *Mathematical Problems in Image Processing* de G. Aubert et P. Kornprobst.

Contours actifs géodésiques



Exemple tiré des *Mathematical Problems in Image Processing* de G. Aubert et P. Kornprobst.

Approche level-sets pour la fonctionnelle de Mumford-Shah(Chan-Vese)

Cas particulier de la fonctionnelle de M-S : on cherche à minimiser

$$F(c_1, c_2, K) = \beta \mathcal{L}(K) + \lambda_1 \int_{\text{inside}(K)} |u_0 - c_1|^2 + \lambda_1 \int_{\text{outside}(K)} |u_0 - c_2|^2.$$

Pour K fixé, c_1 = moyenne de u_0 à l'intérieur de K et c_2 = moyenne de u_0 à l'extérieur de K .

Formulation level-sets :

- $K = \{\phi = 0\}$,
- $\text{inside}(K) = \{\phi > 0\}$,
- $\text{outside}(K) = \{\phi < 0\}$ et

$$F(c_1, c_2, K) = \beta \int_{\Omega} \delta_0(\phi) |\nabla \phi| + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0 - c_1|^2 H(\phi) + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0 - c_2|^2 (1 - H(\phi)),$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et H la fonction Heaviside $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$.

[T.F.CHAN, L.VESE] - Active Contours Without Edges, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol10(2) :266-277, 2001.

Approche level-sets pour la fonctionnelle de Mumford-Shah(Chan-Vese)

En pratique, pour calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée à ϕ , δ_0 et H sont remplacées par des régularisées δ_ϵ et H_ϵ .

Équation d'évolution de ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta \delta_\epsilon(\phi) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 - \lambda_2 (u_0 - c_2)^2 \right],$$

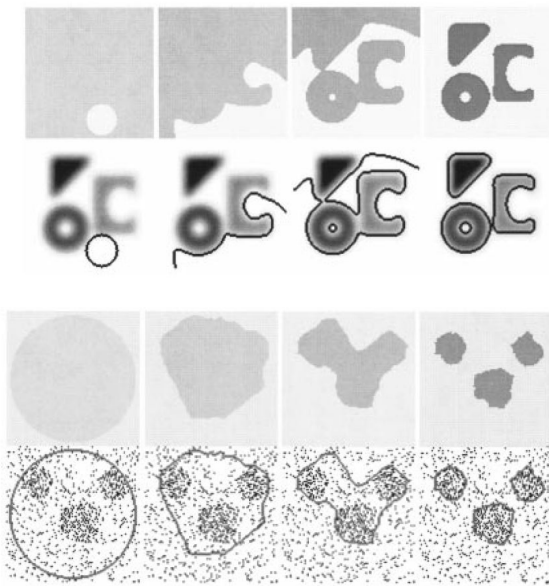
+ conditions aux limites

Résolution :

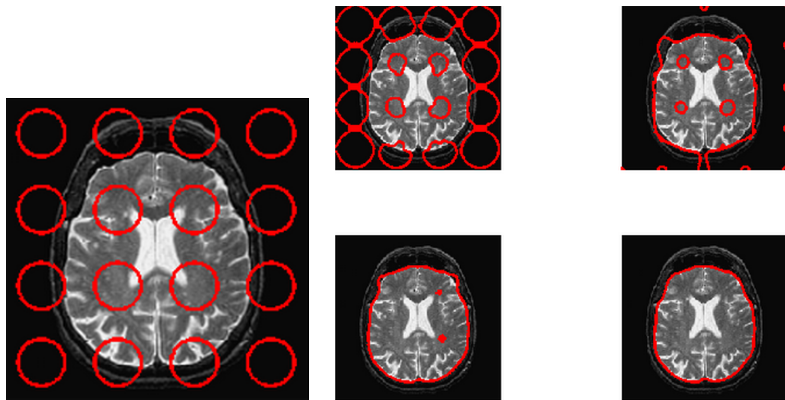
- calcul des valeurs c_1 et c_2 au temps t à l'aide de $\phi(t, \cdot)$
- calcul de ϕ au temps $t + 1$ à l'aide de l'équation discrétisée.

[T.F.CHAN, L.VESE] - Active Contours Without Edges, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol10(2) :266-277, 2001.

Approche level-sets pour la fonctionnelle de Mumford-Shah(Chan-Vese)



Approche level-sets pour la fonctionnelle de Mumford-Shah(Chan-Vese)



Exemple tiré des *Numerical Tours* de Gabriel Peyré.

Convexification

Fonctionnelle toujours non convexe !

—→ Le minimum trouvé dépend donc fortement de la position du contours initial.

Convexification [Chan et al. 2006, Bresson et al. 2007], etc On cherche une énergie convexe, dont le/les minimiseurs globaux sont liés aux minimiseurs globaux de l'énergie des contours actifs

Fonctionnelle toujours non convexe !

→ Le minimum trouvé dépend donc fortement de la position du contours initial.

Convexification [Chan et al. 2006, Bresson et al. 2007], etc On cherche une énergie convexe, dont le/les minimiseurs globaux sont liés aux minimiseurs globaux de l'énergie des contours actifs

Convexification de la fonctionnelle de Chan-Vese. On cherche w image à valeurs dans $\{0, 1\}$ et c_1, c_2 qui minimisent

$$F(c_1, c_2, w) = \underbrace{\int_{\Omega} \|u - c_1\|^2 w + \int_{\Omega} \|u - c_2\|^2 (1 - w)}_{G(w)} + \underbrace{\beta \int_{\Omega} \|\nabla w\|}_{\beta TV(w)}$$

Energie convexe en w pour c_1 et c_2 fixé ! Minimisation par exemple avec l'algo primal-dual de Chambolle-Pock (2011), en prenant

$$c_1 = \frac{\int u w}{\int w}, \quad c_2 = \frac{\int (1 - w) u}{\int (1 - w)}.$$

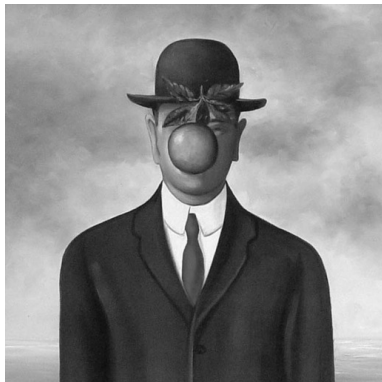
Convexification

$\beta = 0.1$, minimisation par l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock.



Convexification

$\beta = 0.1$, minimisation par l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock.



Convexification



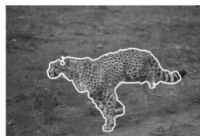
Segmentation de textures

Le terme $\int_{inside(K)} |u_0 - c_1|^2 + \int_{outside(K)} |u_0 - c_2|^2$ est remplacé par une distance de Kulback entre des densités de probabilités (choisies pour bien représenter la texture) sur les deux régions.

Segmentation de textures



(p)



(q)



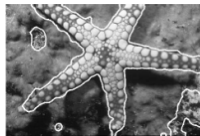
(s)



(t)



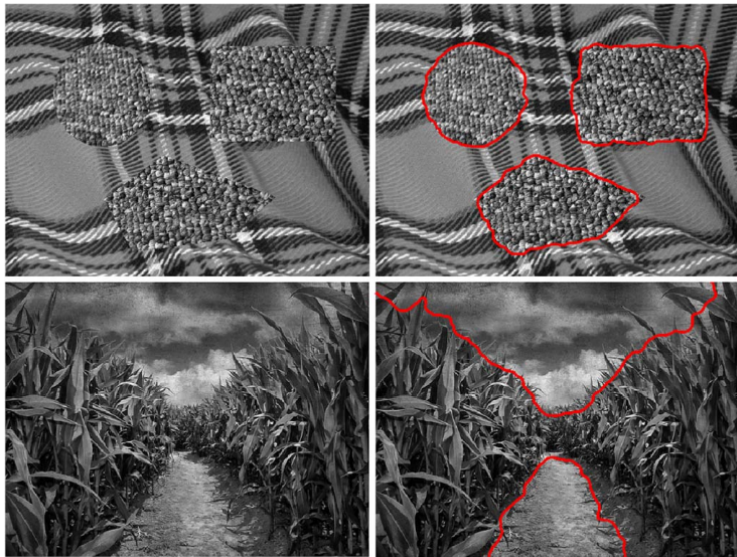
(v)



(w)

Houhou, N. ; Thiran, J.-P. ; Bresson, X. Fast texture segmentation model based on the shape operator and active contour, CVPR 2008.

Segmentation de textures



G-S Xia, J. Delon and Y. Gousseau, Shape-based invariant texture indexing, International Journal of Computer Vision, vol. 88, no. 3, pp. 382-403

Sixième partie VI

Bords significatifs

Introduction

Principe de la constance de couleur (ou de niveau de gris) en théorie de la Gestalt.

Invariance de la perception aux changements de contraste

Quelles courbes regarder dans une image ?

- toutes les courbes ? (temps de calcul)
- candidats naturels : lignes de niveau ou morceaux de lignes de niveau

Méthode dite ***a contrario***, inspirée des tests d'hypothèse statistiques, proposée par Desolneux, Moisan, Morel (2001) pour déterminer les lignes de niveaux suffisamment contrastées dans les images.

Ensembles de niveau

Definition

Les ensembles de niveau supérieur de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\chi_\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \geq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille décroissante : $\forall \lambda \leq \mu, \chi_\mu \subset \chi_\lambda$.
La connaissance de cette famille est suffisante pour reconstruire u par $u(x) = \sup\{\lambda; x \in \chi_\lambda\}$.

Definition

Les ensembles de niveau inférieur de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\chi^\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \leq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille croissante : $\forall \lambda \leq \mu, \chi^\lambda \subset \chi^\mu$.

Si g est strictement croissante, u et $g(u)$ ont globalement les mêmes ensembles de niveau supérieurs ($\forall \lambda \exists \mu$ s.t. $\chi_\lambda(u) = \chi_\mu(g(u))$ et réciproquement) et inférieurs.

Ensembles de niveau

Definition

Les ensembles de niveau supérieur de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\chi_\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \geq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille décroissante : $\forall \lambda \leq \mu, \chi_\mu \subset \chi_\lambda$.
La connaissance de cette famille est suffisante pour reconstruire u par
 $u(x) = \sup\{\lambda; x \in \chi_\lambda\}$.

Definition

Les ensembles de niveau inférieur de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\chi^\lambda(u) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; u(\mathbf{x}) \leq \lambda\}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces ensembles forment une famille croissante : $\forall \lambda \leq \mu, \chi^\lambda \subset \chi^\mu$.

Si g est strictement croissante, u et $g(u)$ ont globalement les mêmes ensembles de niveau supérieurs ($\forall \lambda \exists \mu$ s.t. $\chi_\lambda(u) = \chi_\mu(g(u))$ et réciproquement) et inférieurs.

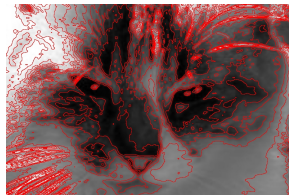
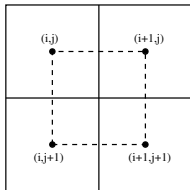
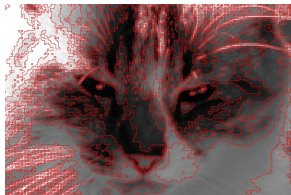
⇒ **Lignes de niveau de u = frontières topologiques de ses ensembles de niveau**

Si u est C^1 : courbes de Jordan C^1 pour presque tout λ .

Lignes de niveau et interpolation bilinéaire

Interpolation : si u discrète définie sur $[1, M] \times [1, N]$,

- interpolation constante par morceaux sur chaque pixel \rightarrow lignes irrégulières, pixelisées, morceaux en commun entre lignes de niveaux différents ;
- interpolation bilinéaire : u est interpolée sur chaque pixel dual par une fonction du type $f(x, y) = axy + bx + cy + d$ qui coïncide avec u au sommets du pixel dual.



Equation d'une ligne de niveau pour l'interpolation bilinéaire

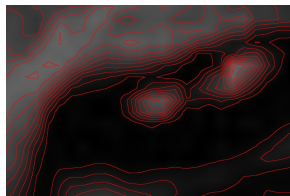
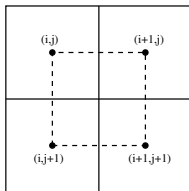
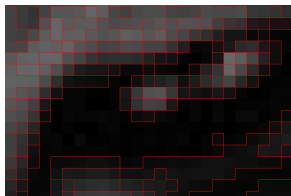
$$f(x, y) = \lambda \Leftrightarrow a(x - x_s)(y - y_s) + (\lambda_s - \lambda) = 0.$$

Lignes de niveau formées de concaténations de morceaux d'hyperboles.

Lignes de niveau et interpolation bilinéaire

Interpolation : si u discrète définie sur $[1, M] \times [1, N]$,

- interpolation constante par morceaux sur chaque pixel \rightarrow lignes irrégulières, pixelisées, morceaux en commun entre lignes de niveaux différents ;
- interpolation bilinéaire : u est interpolée sur chaque pixel dual par une fonction du type $f(x, y) = axy + bx + cy + d$ qui coïncide avec u au sommets du pixel dual.



Equation d'une ligne de niveau pour l'interpolation bilinéaire

$$f(x, y) = \lambda \Leftrightarrow a(x - x_s)(y - y_s) + (\lambda_s - \lambda) = 0.$$

Lignes de niveau formées de concaténations de morceaux d'hyperboles.

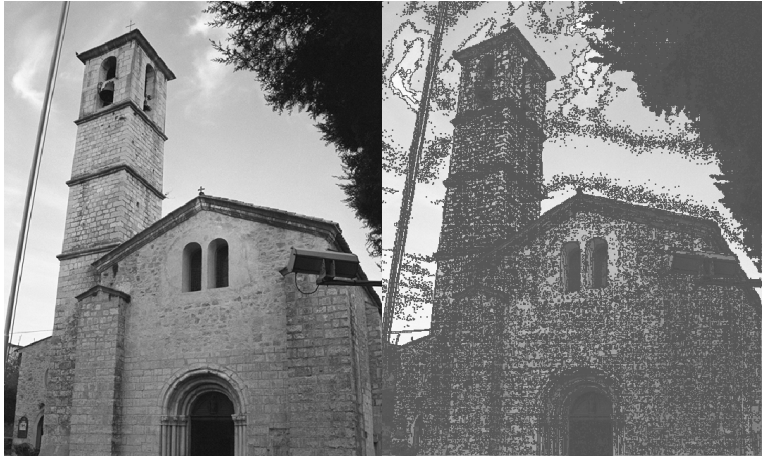
Exemples

Lignes de niveaux λ multiples de 5.



Exemples

Lignes de niveaux λ multiples de 20.



Exemples

Lignes de niveaux λ multiples de 50.



Carte topographique, *Tree of Shapes*

“A local and contrast invariant representation of the images is *the set of the connected components of all the level sets*” [Monasse-Guichard].

L'ensemble des composantes connexes des ensembles de niveau supérieur a une structure d'arbre (de même pour les ens. de niv. inférieur). Ces deux arbres peuvent être fusionnés en un unique arbre, appelé *Tree of Shapes*.

Une “shape” correspond à une composante connexe dont on a bouché les trous. Les lignes de niveau sont les frontières des shapes.

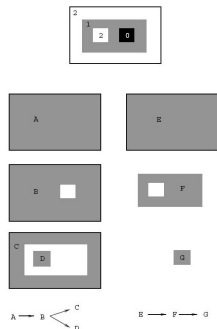


Fig. 4. The trees of connected components of upper and lower level sets of a simple image.

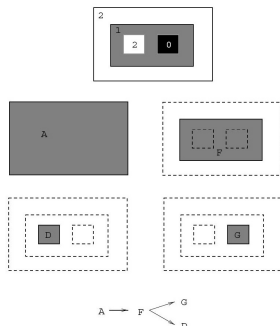


Fig. 6. The tree given by the FLLT corresponding to a simple image. Notice that *D* is a hole in *F*.

FLST : [Monasse, Guichard], Fast computation of contrast-invariant image representation, in *IEEE Trans on Image processing*, 1999. → lien avec les MSER [Matas et al., 2004].

Contours contrastés

Soit u_0 image discrète de taille $N \times N$ et $N_{||}$ son nombre de lignes de niveau.

Soit L une ligne de niveau de u_0 de longueur l (discrète) mesurée en points indépendants $\{x_1, \dots, x_l\}$.

On définit le **contraste de u_0 en x** comme $c(x) = |\nabla u_0(x)|$.

Definition

Une frontière significative est une ligne de niveau “suffisamment” longue et “suffisamment” contrastée pour ne pas apparaître par hasard.

Quel hypothèse nulle \mathcal{H}_0 sur le contraste pour détecter ?

- uniforme ?
- Donné par l'image elle-même $H(\mu) = \frac{1}{N^2} \#\{x, |\nabla u_0|(x) \geq \mu\}$
- Pour éviter l'influence des zones plates $H(\mu) = \frac{\#\{x; |\nabla u_0|(x) \geq \mu\}}{\#\{x; |\nabla u_0|(x) \neq 0\}}$

Contours contrastés

Soit X_j la v.a. mesurant le contraste au point x_j .

Hypothèse \mathcal{H}_0

On fait l'hypothèse \mathcal{H}_0 que les X_j sont iid et que leur distribution est donnée par $H(\mu) = \mathbb{P}[X_j \geq \mu]$.

Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , on a

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\forall i, X_i \geq \mu] = H(\mu)^l.$$

Definition

Soit H la distribution empirique $\mathbb{P}[|Du_0| \geq \mu]$. On définit le nombre de fausses alarmes d'une ligne de niveau L de longueur discrète l et de contraste minimal $\mu = \min_{x \in L} |\nabla u_0(x)|$ par

$$NFA(L) = N_{ll} H(\mu)^l.$$

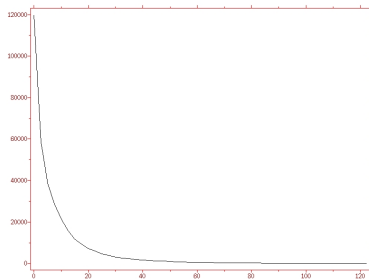
La ligne de niveau L est dite ε -**significative** ssi $NFA(L) \leq \varepsilon$.

Proposition

Les lignes de niveau ε -significatives sont **invariantes** aux changements de contraste affines.

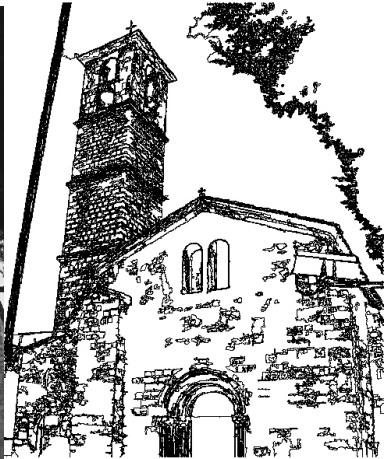
Exemples

Image et sa distribution de norme du gradient.



Exemples

Toutes les lignes significatives à $\epsilon = 1$.



Propriétés

Soit $F(\mu, l) = H(\mu)^l$.

- Si $l \leq l'$ et μ fixé : $F(\mu, l) \geq F(\mu, l')$ car $H(\mu) \leq 1$. A contraste fixé, la courbe la plus longue est la plus significative.
- Si $\mu \leq \mu'$ et l fixé : $F(\mu, l) \geq F(\mu', l)$ (car H décroissante). A longueur fixée, la courbe la plus contrastée est la plus significative.
- Une ligne de niveau de contraste minimal μ est ε -significative ssi sa longueur est supérieure à

$$l_{\min}(\mu) = \frac{\log \varepsilon - \log N_{ll}}{\log H(\mu)}.$$

- Une ligne de niveau de longueur l est ε -significative ssi son contraste minimal μ est supérieur à

$$\mu_{\min}(l) = H^{-1} \left(\left(\frac{\varepsilon}{N_{ll}} \right)^{\frac{1}{l}} \right).$$

Maximalité

L'ensemble des lignes de niveau hérite de la structure d'arbre des formes (*shapes*). Les lignes de niveau ε -significatives en forment un sous-arbre.

Definition

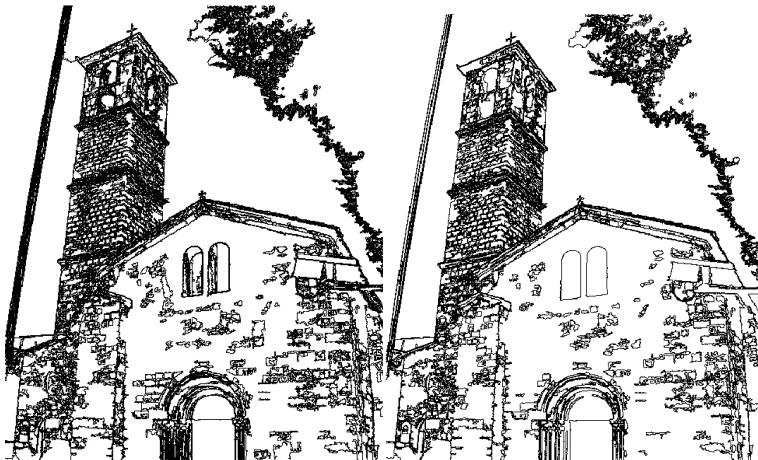
Une **branche monotone** de l'arbre des lignes de niveau est une branche le long de laquelle le niveau de gris est monotone (pas de changement de contraste) et dont chaque ligne possède un unique descendant. Une branche monotone est maximale si elle n'est pas contenue dans une autre branche monotone.

Definition

Une ligne de niveau est dite **maximale significative** si elle est significative et que son *NFA* est minimal dans une branche maximale monotone de l'arbre des lignes de niveau.

Exemples

A gauche, toutes les lignes significatives à $\varepsilon = 1$, à droite toutes les lignes maximales significatives à $\varepsilon = 1$.

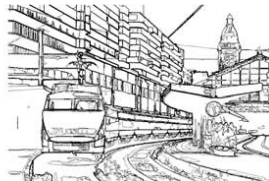
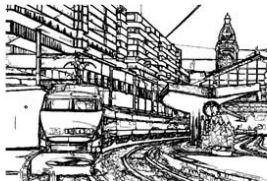


Exemples

83759 lignes de niveau dans l'image d'origine.

11505 lignes 1-significatives

883 lignes maximales significatives



F. Cao, P. Musé, F. Sur. Extracting meaningful curves from images. J. Math. Image and Vision, 22(2) :159-181, 2005.

Reconstruction

99829 lignes de niveau dans l'image d'origine.

394 lignes maximales significatives



F. Cao, P. Musé, F. Sur. Extracting meaningful curves from images. *J. Math. Image and Vision*, 22(2) :159-181, 2005.

Justification mathématique

Remarque : si u est une image aléatoire et $E = \{C_1, \dots, C_N\}$ un ensemble de courbes aléatoires telles que

- les valeurs $|Du|(x)$ sont iid (de distribution donnée par la fonction $H(\mu) = \mathbb{P}[|Du|(x) \geq \mu]$),
- chaque C_i est composée de L_i points indépendants,
- N est indépendant de chaque C_i ,

Alors

Proposition

L'espérance du nombre de courbes C_i telles que $N \times H(\min_{x \in C_i} |\nabla u|(x))^{L_i} \leq \varepsilon$ est inférieure à ε .

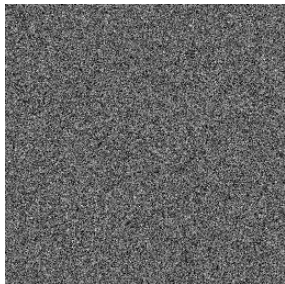
Donc, si une ligne de niveau est ε -significative, elle ne peut pas avoir été entièrement générée par du bruit blanc (à une probabilité ε près).

Expérience avec un bruit blanc gaussien

A gauche, image de bruit blanc gaussien ($\sigma = 40$).

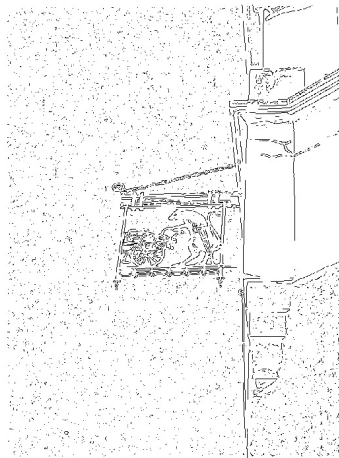
Au centre, lignes significatives pour $\varepsilon = 100$ (aucune détection pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 10$).

A droite, résultat de la segmentation de Mumford-Shah (constante par morceaux) avec moins de 300 régions.



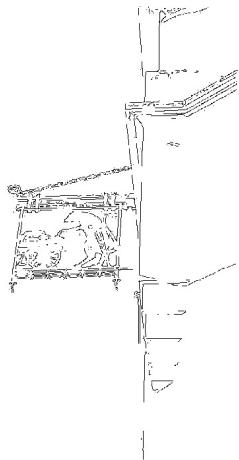
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

Détecteur de Canny, seuils sur le module du gradient à 2.



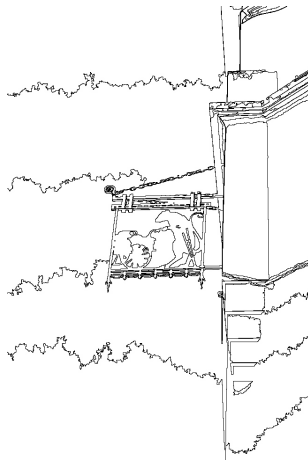
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

Détecteur de Canny, seuils sur le module du gradient à 15.



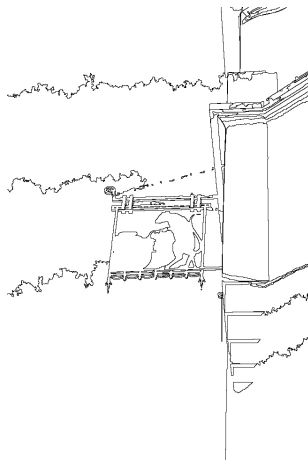
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

Mumford-Shah constant par morceaux, 1000 régions.



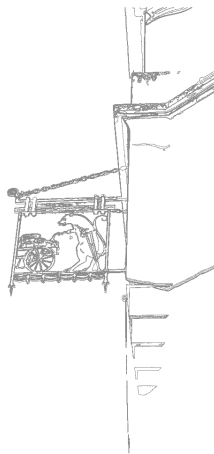
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

Mumford-Shah constant par morceaux, 300 régions.



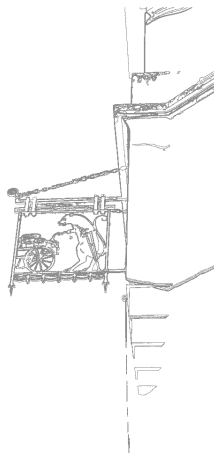
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

$\epsilon = 1$, 696 lignes maximales significatives



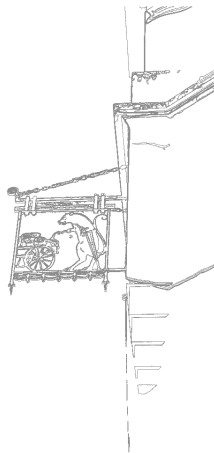
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

$\epsilon = 10$, 579 lignes maximales significatives



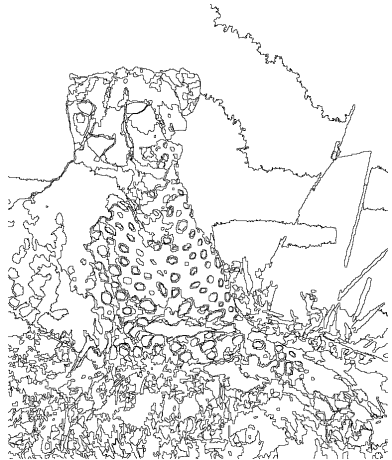
Comparaison avec des détecteurs de contours classiques

$\varepsilon = 100$, 516 lignes maximales significatives



Autre Exemple

Mumford-Shah constant par morceaux, 1000 régions.



Autre Exemple

1738 lignes maximales significatives pour $\varepsilon = 1$.



Bonnes continuations

Soit C une courbe paramétrée par son abscisse curviligne s et l_0 un entier (petit devant la longueur de C).

Definition

On appelle **régularité** d'une courbe C en $x = C(s_0)$ (à l'échelle l_0) la valeur

$$R_{l_0}(x) = \frac{\max(|x - C(s_0 - l_0)|, |x - C(s_0 + l_0)|)}{l_0}.$$

On a toujours $0 \leq R_{l_0}(x) \leq 1$ avec égalité ssi $C((-l_0, 0))$ ou $C((0, l_0))$ est un segment.

Lien avec la courbure de C . Moins sensible au bruit qu'une définition purement locale de la courbure.

Bonnes continuations

Soit $\mathcal{H}_{l_0}(r)$ la probabilité qu'un point x d'une ligne de niveau C dans image de bruit blanc ait une régularité supérieure à r .

Pour tout r , $\mathcal{H}_{l_0}(r)$ peut être estimée empiriquement.

Definition

Une ligne de niveau L de longueur l (comptée en points indépendants) dans u_0 est une ε -bonne continuation si

$$NFA_{gc}(L) = N_{ll}(\mathcal{H}_{l_0}(\rho))^{\frac{2l}{2l_0}} \leq \varepsilon,$$

où $\rho = \min\{|R_{l_0}(x)|, x \in L\}$.

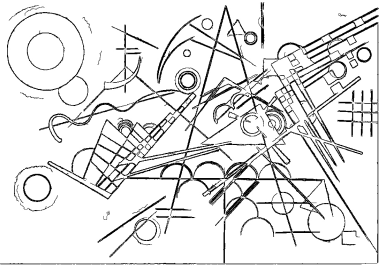
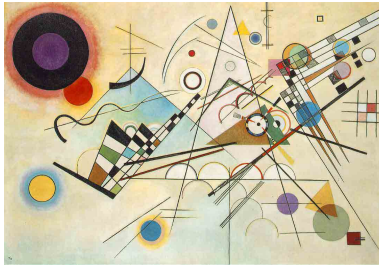
[F. Cao, P. Musé, F. Sur], Extracting meaningful curves from images. J. Math. Image and Vision, 22(2) :159-181, 2005.

Bonnes continuations

Bonne continuations pour $\varepsilon = 1$.



Kandinsky



Lien avec les snakes

Recherche de lignes à la fois bien contrastées et régulières :

Definition

Une ligne de niveau L est un bord régulier ε -significatif si

$$NFA_{CS}(L) = N_{||} H(\mu)^l (\mathcal{H}_{l_0}(\rho))^{\frac{2l}{l_0}} \leq \varepsilon,$$

où $\rho = \min\{|R_{l_0}(x)|, x \in L\}$ et $\mu = \min_{x \in L} |Du_0(x)|$.

Ce sont les lignes le long desquelles la quantité

$$l \underbrace{\log H(|Du_0|)}_{\text{fonction décroissante du contraste}} + \frac{l}{l_0} \underbrace{\log \mathcal{H}_{l_0}(R_{l_0}(L))}_{\text{fonction croissante de la courbure}} \quad \text{est petite.}$$

Les Snakes de Kass *et al.* minimisent une énergie du type

$$J(c) = l + \lambda \underbrace{\int_0^l g^2(Du_0(c))}_{\text{fonction décroissante du contraste}} + \beta \underbrace{\int_0^l \text{curv}(c)^2}_{\text{fonction croissante de la courbure}} .$$

Septième partie VII

Méthodes morphologiques

Méthodes morphologiques

Segmentation par ligne de partage des eaux

Construction d'une ligne de partage des eaux par simulation d'un processus d'inondation sur l'image de la norme du gradient, à partir de tous les minima. Une dynamique est associée à chaque contour → segmentation hiérarchique.

Alternative : LPE à partir de marqueurs sur l'image indiquant les différents objets à segmenter.

Segmentation par partitions de Voronoï

A partir d'une pseudo-distance ϕ et d'un ensemble de germes S , on construit la partition de Voronoï associée. S peut être par exemple l'ensemble des minima locaux de u_0 et

$$\phi(x, y) = \inf_{\gamma} VT(u_0 \circ \gamma).$$

Produit souvent une "sur-segmentation" (comme pour la LPE).

Les régions obtenues peuvent être fusionnées à l'aide de la donnée d'une mesure de dissimilarité entre régions :

$$d^c(O_i, O_j) = \sum_{x \in O_i, y \in O_j} \frac{d(u_0(x), u_0(y))}{|\partial O_i \cap \partial O_j|}.$$

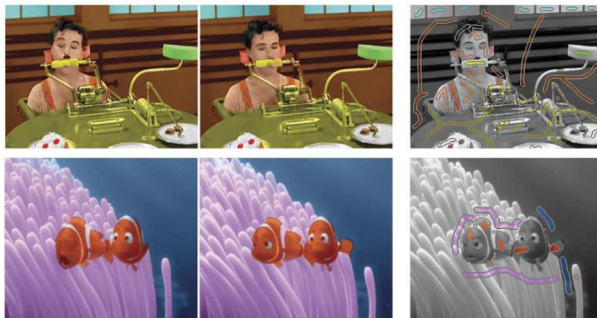
Donne une partition hiérarchique de l'image.

[P. Arbelaez and L. Cohen], Segmentation d'Images Couleur par Partitions de Voronoï, Revue Traitement du Signal, Vol. 21. No. 5. pp.407-421. 2004.

Application à la coloration d'images

Coloration d'images à partir de "germes" colorés donnés par l'utilisateur. La couleur d'un point est une combinaison linéaire des couleurs des germes les plus "proches". La distance utilisée est toujours

$$\phi(x, y) = \inf_{\gamma} VT(u_0 \circ \gamma).$$



[Yatziv, L. ; Sapiro, G.] Fast image and video colorization using chrominance blending, Image Processing, IEEE Transactions on Volume 15, Issue 5, May 2006 Page(s) :1120 - 1129

Application à la coloration d'images

Coloration d'images à partir de "germes" colorés donnés par l'utilisateur. La couleur d'un point est une combinaison linéaire des couleurs des germes les plus "proches". La distance utilisée est toujours

$$\phi(x, y) = \inf_{\gamma} VT(u_0 \circ \gamma).$$



[Yatziv, L. ; Sapiro, G.] Fast image and video colorization using chrominance blending, Image Processing, IEEE Transactions on Volume 15, Issue 5, May 2006 Page(s) :1120 - 1129