

INTRODUCTION A L'ANALYSE DES COMPARAISONS
POUR LE TRAITEMENT DES DONNEES EXPERIMENTALES

par

Henri ROUANET

C.N.R.S. et Université René Descartes (U.E.R. de
Mathématiques, Logique Formelle et Informatique) (*)

et

Dominique LEPINE

Laboratoire de Psychologie Expérimentale, E.P.H.E.
3ème section et Université René Descartes associé
au C.N.R.S. (*)

(*) 12, rue Cujas 75005 Paris

(*) 28, rue Serpente 75006 Paris

AVANT-PROPOS

Depuis maintenant quelque dix années, nous avons poursuivi, en liaison constante avec des expérimentalistes (travaillant dans le domaine de la psychologie), des recherches statistiques d'ordre théorique et pratique (informatique).

Les travaux théoriques ont porté sur la construction d'une approche algébrique de l'analyse des données expérimentales, dont la notion centrale est celle de "comparaison" ; c'est pourquoi nous désignons cette approche, et les procédures qui s'ordonnent autour d'elle, sous le terme d'analyse des comparaisons.

Les travaux informatiques, qui prolongent directement les recherches théoriques, ont conduit à un ensemble de programmes-machine, dont les plus importants à l'heure actuelle sont ceux de la série VAR (VAR3 et VAR4 étant les derniers en date de la série), rédigés par M-O LEBEAUX ; d'autres programmes ont été rédigés par des collègues à double formation psychologique et informatique, notamment V. Duquenne et J-M Hoc.

La plupart des développements théoriques sont exposés dans des articles, certains encore sous presse (cf. bibliographie du présent texte). Par ailleurs, la Réf. 1976a (dite "brochure verte"), constitue pour les utilisateurs du programme VAR3 (à l'heure actuelle le plus utilisé de nos programmes), le "document technique de base" (1).

Cependant, étant donné le nombre croissant des utilisateurs et leur plus grande diversité, la demande a été exprimée d'un texte de caractère introductif sur l'analyse des comparaisons, lequel, rassemblant et situant les idées essentielles, pourrait faciliter l'accès aux développements théoriques et à l'utilisation des programmes. Le présent texte constitue une tentative pour répondre à cette demande (2).

Dans une entreprise de cette sorte, un obstacle majeur est la diversité des lecteurs potentiels, beaucoup moins cruciale à notre avis, du

(1) Toutefois la "notice technique" (p.46 sq. de cette brochure) devra être remplacée par la nouvelle "Notice d'utilisation de programme VAR3", en date de Novembre 1977 (document disponible sur demande). Par ailleurs, une nouvelle version de la "brochure verte" est en cours de rédaction ; elle tiendra compte des derniers aménagements de VAR3 et englobera le programme VAR4.

(2) Une tentative antérieure était la Réf. 1976, qui, malgré sa brièveté, pourrait déjà permettre un premier "survol" (le présent texte en constitue un élargissement direct ; nous avons notamment, repris le même exemple expérimental).

point de vue de leur "niveau mathématique", que de leur expérience préalable avec la statistique et avec la problématique expérimentale (sans compter la variété de leurs attentes et de leurs intérêts). Dans la rédaction du présent texte, on a cherché à tenir compte de cette diversité. Le "texte principal" est en principe autonome, et ses seuls "préalables" ne vont guère au-delà du langage ensembliste élémentaire et d'une certaine ouverture à l'"état d'esprit expérimental" (1) ; l'usage d'un style "littéraire" délibérément plus illustratif que démonstratif, vise à fournir, non un substitut "adouci" des développements formalisés, mais un éclairage de ces derniers. D'autre part, en marge du texte principal, on a inséré plusieurs "aperçus théoriques", lesquels, sans prétendre résumer les développements formalisés, donneront une idée de leur style. Enfin, une longue digression, au milieu du chapitre V, s'adresse plus particulièrement aux lecteurs déjà familiarisés avec les pratiques ou théories courantes de l'analyse des données expérimentales.

Il va de soi que tous les commentaires suscités par ce texte seront les bienvenus.

(1) On constatera en particulier que les bases "statistiques" (par opposition à "mathématiques") se réduisent à peu de chose ; nous sommes de plus en plus convaincus qu'un accès authentique à bien des théories statistiques dépend davantage d'une "culture mathématique générale" préalable que de connaissances proprement statistiques ; conviction reflétée dans nos textes théoriques récents, accessibles à des mathématiciens même peu "statisticiens" au sens traditionnel du terme.

CHAPITRE I - DE L'ANALYSE DE VARIANCE A L'ANALYSE DES COMPARAISONS

Spécificité des méthodes d'analyse statistique des données expérimentales.

On entendra ici, par données expérimentales, des données qui mettent en jeu d'une part une intervention provoquée, ou "traitement" (condition expérimentale, médicament, innovation pédagogique, etc.) et d'autre part un plan d'expérience, qui spécifie les modalités de "contrôle" des facteurs essentiels susceptibles de se traduire par un effet. La notion de "données expérimentales" s'opposera donc ici, essentiellement, à celle de données de simple observation.

L'expérimentation intervient généralement à un moment où sont considérées comme suffisamment cernées les principales variables pertinentes relatives aux phénomènes étudiés. Le but premier d'une expérimentation sera donc rarement de partir en quête de "structures cachées", et dans l'analyse statistique, les méthodes d'analyse factorielle ou typologique pourront jouer un rôle, mais qui sera subordonné à l'objectif principal : celui d'examiner et d'évaluer les effets de l'intervention provoquée ; d'où une spécificité marquée des méthodes d'analyse statistique des données expérimentales.

Par ailleurs, presque toujours, les données recueillies au cours d'une expérimentation ne portent que sur une partie de la population sur laquelle le chercheur souhaite parvenir à des conclusions ; d'où il résulte que même lorsque les procédures statistiques mises en oeuvre seront seulement descriptives, la visée de l'analyse sera essentiellement inductive (c'est-à-dire généralisante) ; normalement, cette visée s'exprimera à travers des procédures expressément conçues pour conduire à des conclusions inductives quantitatives, c'est-à-dire inférentielles (stricto sensu, c'est-à-dire reposant sur un modèle d'échantillonnage explicite).

La pertinence de l'inférence statistique n'est certainement pas réservée aux données expérimentales, et on peut l'envisager également pour certaines données sociologiques, archéologiques, etc. Mais pour les données expérimentales, le modèle d'échantillonnage nécessaire à la validité de ces procédures sera souvent bien davantage qu'une "conjecture raisonnable" ; en effet, il peut dans une certaine mesure être incorporé à l'organisation même de l'expérimentation (notamment au moyen de l'affectation au hasard des "uni-

tés expérimentales" aux divers "traitements"), ce qui confère aux procédures inférentielles alors utilisées un degré de légitimité vraiment privilégié.

Néanmoins, cette pertinence globale et cette légitimité de la problématique inférentielle n'entraîneront nullement que les diverses méthodes inférentielles soient toujours pertinentes, ni qu'elles soient toutes pertinentes au même degré ; les tests de signification, notamment, qui constituent à l'heure actuelle la procédure inférentielle de loin la plus répandue, apparaissent bien insuffisants lorsque les objectifs de recherche amènent à des questions un peu "fines" (ainsi que nous le développerons au chapitre VII).

L'analyse de la variance classique

Nous désignerons ici par "analyse de la variance classique" l'ensemble des méthodes conçues par R.A. Fisher pour l'analyse des données expérimentales ; ensemble qui fut rapidement porté, par lui et ses contemporains, à un degré d'"achèvement" resté insurpassé, notamment du point de vue de l'équilibre entre les préoccupations théoriques et l'élaboration pratique des procédures ; il suffira d'évoquer ici quelques grands textes comme "Statistical methods for research workers" et "the Design of experiments" de Fisher lui-même, ainsi que "Experimental designs" de Cochran et Cox.

Les caractéristiques essentielles d'une analyse de la variance classique peuvent être résumées en quelques lignes :

- à un plan d'expérience donné, l'analyse associe une décomposition particulière, la "décomposition standard", selon les sources de variation canoniquement associées au plan : effets globaux des différents facteurs, effets résiduels, effets d'interaction, etc. ; pour chaque source de variation, on calcule une somme de carrés (que nous appellerons également : inertie), un nombre de degrés de liberté (d.l.), et un carré-moyen (rapport de l'inertie au nombre de d.l.) ;

- à chaque source de variation dont on examine l'effet, on associe une source de variation, que nous appellerons source adjointe, susceptible de lui servir de "terme de référence", et traditionnellement utilisée pour procéder à un test de signification. Dans ce but, on constitue le rapport "F de Fisher" : rapport du carré-moyen de la source examinée au carré-moyen adjoint ;

si la valeur de ce rapport est "significative" (aux seuils conventionnels usuels), on conclut (inférentiellement) à un effet de la source de variation examinée.

L'ensemble des analyses de la décomposition standard est selon la coutume rassemblé dans le tableau d'analyse de la variance familier aux expérimentalistes. Dans la sortie n° 2 de l'Annexe, la partie intitulée : "Analyse standard" constitue un exemple d'un tel tableau. (Données H & B).

"Pratiques établies" : tableau d'analyse de la variance et analyses complémentaires.

L'analyse de la variance classique apportait des réponses élaborées, théoriques et pratiques, à certaines préoccupations restées longtemps insatisfaites : notamment, celle de pouvoir examiner les effets de "plusieurs facteurs variant à la fois". D'où l'immense succès de ces méthodes, et le fait que pendant longtemps, le tableau d'analyse de la variance classique a constitué la base essentielle à partir de laquelle l'expérimentaliste cherchait à formuler les conclusions de la recherche effectuée.

Cependant, progressivement, sont venues d'adjoindre des analyses diverses visant à "compléter" les informations fournies par le tableau ; aujourd'hui, ces "analyses complémentaires" ont proliféré à un point tel qu'elles tendent parfois à "étouffer" le tableau classique (sans le supplanter cependant, du moins en théorie, aucune "révision déchirante" de la "doctrine" n'étant intervenue) ; de sorte que pour schématiser les "pratiques établies" actuelles, il suffira d'évoquer la juxtaposition : tableau classique et analyses complémentaires.

La mise en oeuvre de ces pratiques fait montre, à l'occasion, d'un déploiement d'ingéniosité et d'érudition tellement considérable que d'aucuns pourraient imaginer que les méthodes d'analyse statistique des données expérimentales ne laissent désormais plus rien à désirer quant à leur adéquation aux objectifs courants des recherches expérimentales. Malheureusement, un examen attentif révèle, au-delà d'apparences parfois brillantes, certaines faiblesses inattendues : notamment, le fait que dans maint mémoire expérimental, l'énoncé des conclusions ne semble avoir qu'un lien lointain, ou artificiel, avec les indications fournies par les analyses statistiques ; parfois,

le décalage est tellement flagrant qu'un lecteur candide pourrait presque s'interroger sur l'intérêt, ou la véritable finalité, de tout l'appareil statistique déployé ...

Les raisons profondes d'un tel décalage entre les pratiques statistiques et les conclusions des chercheurs n'ont pas été pour nous si immédiates à cerner, même si nous nous sommes rapidement convaincus que la source du décalage, en tout état de cause, ne pouvait être imputée aux seules ignorances ou maladroites de "praticiens" qui auraient imparfaitement assimilé la "théorie", mais qu'il fallait la rechercher bel et bien dans les insuffisances de cette théorie elle-même (Sinon, comment s'expliquer, au niveau des pratiques, autant d'"accommodements au coup par coup", compromis entre les désirs de l'expérimentaliste et les apparences de l'objectivité scientifique ?).

La "théorie reçue" : statistique probabiliste "orthodoxe" et modèle linéaire général de la régression.

Parallèlement (ou plus exactement : avec un léger décalage dans le temps) aux développements de l'analyse de variance classique, se développaient les constructions théoriques générales de la statistique probabiliste sous l'auto-appellation de "statistique mathématique", et parmi elles, la construction de l'école "orthodoxe" de Neyman et Pearson, dont l'emprise devait être grande dans beaucoup de domaines, voire quasi-exclusive comme dans celui des données expérimentales.

Rapidement, les procédures (*) léguées par les "pères fondateurs" se virent intégrées, "récupérées" dans une construction qui n'allait pas tarder à devenir la "théorie reçue" de l'analyse de la variance. Parmi les nombreux textes exposant cette construction, on se bornera ici à mentionner le traité de Scheffé : "The Analysis of Variance," paru en 1959, car il constitue l'entreprise d'intégration non seulement la plus complète mais sans doute aussi la plus lucide (l'auteur ne dissimulant guère les obstacles sur lesquels, malgré un arsenal technique impressionnant et impeccable, butait l'entreprise) ; la plupart des textes parus depuis ont d'ailleurs repris la conception d'ensemble de Scheffé, certains cherchant à en "simplifier la présentation", mais sans toujours parvenir à en égaler la richesse et la solidité.

(*) ou plus précisément : la plupart des procédures, l'exception des méthodes fiduciaires (que nous évoquerons au chapitre 8) étant vraiment bien là pour confirmer la règle.

Du point de vue de son contenu, ce qui sans doute est le plus frappant dans cette construction, c'est la portion congrue à laquelle est réduite la spécificité de la problématique expérimentale. La principale notion de base authentiquement expérimentale, celle de "matrice de plan" ("design matrix") est plongée d'emblée dans le cadre du "modèle linéaire général de la régression". Quant aux autres notions de base, elles ne renvoient pas à une construction formalisée qui serait propre à l'expérimentation, mais à des résultats généraux de statistique probabiliste (de l'école "orthodoxe"). Enfin le "style" de raisonnement est fondé sur un usage intensif du calcul matriciel, ponctué par quelques représentations "géométriques" (dans des espaces multidimensionnels), au statut analogique et toujours marginal.

Certes il est incontestablement important de montrer comment des procédures applicables à un domaine particulier peuvent être dérivées de théories plus générales ; et il serait déraisonnable de nier tous les acquis qui ont pu être obtenus par cette voie. Mais il serait non moins aventuré, à l'inverse, de dissimuler que certains concepts que cette voie a amené à mettre en avant prêtent encore largement à discussion, lorsqu'on les envisage selon une problématique centrée sur l'expérimentation.

Bien révélatrice, à cet égard, fut la discussion qui suivit un exposé de J. Nelder (Journal of the Royal Statistical Society, 1977) sur les recherches actuellement en cours chez les statisticiens de la station agronomique de Rothamsted, naguère rendue illustre par Fisher ; cette discussion opposa les statisticiens les plus éminents sur le statut de notions aussi fondamentales, pour l'interprétation des données expérimentales, que celle d'"effet global" d'un facteur en présence d'interaction, ou encore celle de "facteur aléatoire" (notion post-fishérienne, mais qu'on aurait pu croire définitivement acquise), etc.

Un "diagnostic" ; vers une "approche algébrique de l'analyse des données expérimentales".

Peut-on concevoir, sur le plan théorique et pratique, des procédures statistiques qui seraient davantage intégrées à la démarche expérimentale, depuis l'explicitation des objectifs, jusqu'à la formulation des conclusions à tirer des données recueillies ? Pour aborder ce problème, il nous est ap-

paru indispensable de prendre un certain recul vis-à-vis aussi bien des "pratiques établies" que de la "théorie reçue". Dans la Réf. 1968, nous formulons le "diagnostic" suivant :

"Une source essentielle des difficultés réside dans la distance entre les intentions du chercheur et les procédures de calcul. Or, nous avons constaté que les structures mathématiques sous-jacentes aux procédures se trouvent en réalité plus proches des intentions du chercheur que les procédures de calcul elles-mêmes : d'où l'intérêt d'explicitier ces structures".

Par "structures mathématiques", dans ce texte, nous entendions les structures algébriques de l'algèbre ensembliste et de l'algèbre linéaire (à quoi nous ajouterions, maintenant, les structures de la géométrie affine multidimensionnelle), c'est-à-dire, en gros, ce que les mathématiciens désignent par "structures abstraites" et le grand public par "algèbre moderne".

Le diagnostic précédent nous conduisit d'abord à dégager les fondements algébriques des méthodes existantes ; mais très vite, des perspectives apparurent : la remise en place des "fondements" amenait, non pas précisément à éliminer, mais à ramener au second plan certaines notions "de base" de la théorie reçue, et à découvrir que les structures "abstraites" pouvaient être directement efficaces, non seulement pour éclaircir la "raison d'être" de procédures existantes, mais aussi pour susciter, concrètement, l'élaboration de procédures nouvelles. Dès lors, la souplesse et la puissance des notions mises en place à partir des structures abstraites nous conduisit à aborder certaines situations expérimentales telles que celles mettant en jeu des plans non-équilibrés, ou des plans à mesures répétées, situations tout à fait courantes dans la pratique expérimentale, mais qui se montrent peu accessibles, à partir d'un certain niveau de complexité, à l'aide des seules ressources de la théorie "orthodoxe". Pour certaines de ces situations, nous avons pu proposer des procédures franchement nouvelles (cf. notamment la Réf. 1977b), lesquelles reposent aussi directement que possible sur les structures algébriques. C'est pourquoi, de plus en plus, c'est autour de la formalisation algébrique qu'il nous paraît judicieux d'ordonner tout un ensemble de procédures pertinentes à l'analyse des données expérimentales, dont la plupart, bien sûr, sont déjà dans l'analyse de variance classique (fishérienne), ou dans les apports de la statistique "orthodoxe", mais peuvent recevoir des statuts renouvelés (comme on le verra, par exemple, au chapitre 6, pour

l'"analyse standard") dans le cadre d'une construction qui tend à se constituer en une "approche algébrique", de plus en plus compréhensive et autonome, de l'analyse des données expérimentales.

L'analyse des comparaisons ; vue d'ensemble

Les procédures élaborées à partir de l'approche algébrique, ou utilisées dans la perspective de celle-ci nous paraissent désormais gagner à être démarquées de l'"analyse de la variance" ; c'est pourquoi pour les désigner, nous utilisons le terme d'analyse des comparaisons ; en effet :

- (1) l'idée de comparaison, avant même toute formalisation, est centrale à la problématique expérimentale, et même plus généralement à toute la statistique (*) ;
- (2) nos travaux nous ont amenés à proposer une formalisation de la notion de comparaison et à placer la notion formalisée au centre de l'"approche algébrique".

Les principaux développements de l'"analyse des comparaisons" peuvent être regroupés selon les rubriques suivantes, correspondant à des niveaux de complexité emboîtés :

- | | | |
|---|-------------|--|
| (1) formalisation ensembliste | (cf.chap.3) | } qui constituent les "bases algébriques" proprement dites ; |
| (2) formalisation linéaire | (cf.chap.6) | |
| (3) formalisation statistique et structures d'échantillonnage | (cf.chap.5) | } conduisant aux procédures statistiques effectives ; |
| (4) formalisations bayésienne et fiduciaire | (cf.chap.7) | |

à quoi il conviendrait d'adjoindre les développements multidimensionnels, (cf.chap.8), qui "recoupe" les niveaux précédents.

(*) Cette idée forme couple avec celle de corrélation : ne pourrait-on pas regrouper sous le terme d'"analyse des corrélations" les diverses méthodes d'analyse factorielle et canonique ? Mais alors que l'idée de corrélation a fait l'objet de formalisations nombreuses, il n'en allait pas de même que celle de comparaison.

Quelques commentaires sur l'"analyse des données"

Dans notre entreprise d'"algébrisation", nous avons très certainement été encouragés, ne serait-ce qu'"objectivement", par le contexte "algébrisant" de nombreux travaux statistiques, ou aux implications statistiques, qui ont été effectués récemment en France, quoique la plupart dans des domaines (ou selon des perspectives) extra-expérimentalistes ; parmi ces travaux nous songeons aussi bien à nombre de textes publiés dans la revue "Mathématiques et Sciences Humaines" qu'aux divers développements des méthodes multivariées que le terme d'"Analyse des données" évoque immédiatement, à l'heure actuelle, dans le contexte français.

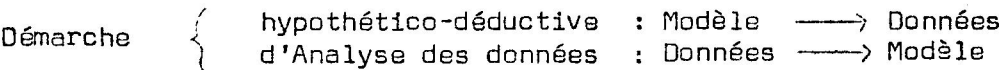
Mais à ce propos, et afin d'écartier certains malentendus, notamment quant à l'usage que nous faisons du terme "analyse de données", quelques commentaires s'imposent.

L'objectif de toute procédure statistique appliquée à des données est de condenser ces données en une représentation simplifiée acceptable, susceptible de conduire à des conclusions "signifiantes", interprétables ; si cette représentation est suffisamment intelligible, simple, économique (trois qualificatifs volontairement bien subjectifs !) on pourra dire que cette représentation constitue un modèle (*) de ces données. Pour atteindre cet objectif, deux démarches extrêmes peuvent être adoptées :

- dans la démarche hypothético-déductive, on choisit au départ un certain modèle (a priori plausible) et l'objectif essentiel de l'analyse statistique sera de permettre aux données de se prononcer soit en faveur de ce modèle ("validation du modèle") soit en sa défaveur ;

- dans la démarche de l'"analyse des données", on préfère laisser la représentation simplifiée des données se constituer, "émerger" au cours de l'analyse (+).

S'il fallait résumer chaque démarche en un schéma, on pourrait risquer d'écrire ceci :



(*) le sens donné dans cette discussion au terme de "modèle" ne sera pas repris ultérieurement dans ce texte.

(+) C'est de cette façon qu'on doit, semble-t-il, interpréter le "principe" énoncé par Benzécri (in "L'analyse des données" tome 2) : "la statistique précède le modèle et non l'inverse".

Bien entendu, dans la pratique, l'opposition précédente n'est jamais aussi tranchée, ne serait-ce que parce qu'il est possible, à l'intérieur de l'une ou l'autre des deux démarches, d'user de variantes qui en amendent profondément le sens.

Ainsi, dans la démarche hypothético-déductive, on envisagera généralement non pas un seul modèle (qu'on ne pourrait que déclarer valide ou invalide) mais un ensemble de modèles, l'objectif de l'analyse statistique devenant de choisir parmi les modèles - objectif qui rapproche incontestablement la démarche de celle de l'analyse des données.

De son côté, adopter la démarche de l'analyse des données n'implique nullement qu'on se condamne à un nombre restreint de procédures "aveugles", fixées une fois pour toutes (*), mais peut comporter, pour faire émerger la représentation des données souhaitées, des procédures visant à répondre à des questions judicieusement choisies en fonction de la situation examinée. Cette conception souple de l'analyse des données pourrait être illustrée par la déclaration suivante de Tukey : "Il faut se concentrer sur les questions et non sur les modèles" ; c'est elle dont il sera question dans le présent texte ; elle revient bien à introduire dans l'analyse des données quelque chose de la démarche hypothético-déductive, mais au niveau local de chaque question, ce qui est tout de même très différent de l'idée d'un examen d'ensemble de modèles posés a priori.

Dans une situation expérimentale concrète, il est souvent utile d'utiliser conjointement, de manière complémentaire, l'une et l'autre démarches. Ce point ne devra pas être perdu de vue au cours de la lecture du présent texte, dans la mesure où nous adopterons systématiquement, ne serait-ce que pour la commodité de la présentation, la démarche de l'analyse des données (·)

Un dernier commentaire visant, comme les précédents, à éclairer le texte qui va suivre. Comme on sait, le terme d'"analyse des données", évoque irrésistiblement pour certains, la "statistique descriptive" ; cependant que d'autres, et non des moindres, abusent ostensiblement du langage probabiliste au cours de la démarche d'analyse des données (cf. Réf. 1976e). En réalité,

(*) Ainsi que pourraient tendre à l'accréditer, dans le cas de méthodes de Benzecri, les prospectus publicitaires distribués par son éditeur.

(·) Dans le texte : H. Rouanet : *Les modèles stochastiques d'apprentissage*, Mouton -Gauthier-Villars, 1967, nous avons, à l'inverse, adopté systématiquement la démarche hypothético-déductive.

selon nous, adopter la démarche d'analyse des données (ou faire jouer un rôle central à une formalisation de nature algébrique) ne préjuge en aucune façon du statut, descriptif ou inférentiel, des procédures statistiques suscitées par cette démarche.

CHAPITRE II - UN "PARADIGME" EXPERIMENTAL : L'EXAMEN D'UNE INTERACTION, ET UN EXEMPLE DE DONNEES EXPERIMENTALES

Afin de rendre tangible la problématique de l'analyse des données expérimentales, nous présenterons tout de suite un "paradigme" expérimental et des données concrètes.

Le paradigme (omniprésent dans l'expérimentation) sera l'examen d'une interaction entre deux facteurs expérimentaux. Pour notre propos, il nous suffira de considérer le cas le plus simple, où chacun des deux facteurs comporte seulement 2 modalités.

Comme illustration concrète de ce paradigme, nous prendrons les données d'une expérience de Holender et Bertelson (*) que nous décrirons ici schématiquement. Il s'agissait d'une expérience de temps de réaction dans laquelle les deux facteurs expérimentaux principaux étaient : la fréquence du stimulus présenté : stimulus "fréquent" (présenté dans 75 % des épreuves), stimulus "rare" (présenté dans 25 % des épreuves) ; et la durée de la période préparatoire (délai entre la présentation d'un signal avertisseur et celle du stimulus), laquelle était tantôt "courte" (0.5 seconde), tantôt "longue" (5 secondes). L'expérience comportait trois sessions. A l'intérieur de chaque session, on faisait alterner des blocs d'épreuves à période préparatoire courte et des blocs d'épreuves à période préparatoire longue ; dans les épreuves de chaque bloc apparaissaient les deux types de stimulus.

[En fait, parmi les trois sessions, la première était considérée comme une session préliminaire d'entraînement ; c'est pourquoi la plupart des analyses seront restreintes aux données relatives aux deux dernières sessions, au cours desquelles les performances sont apparues comme à peu près stables].

(*) Expérience 4 de D. Holender et P. Bertelson extraite de "Selective preparation and time uncertainty", *Acta Psychologica*, 1975, 39, 193-203 - Cf. également Réf. 1977b.

Les données de cet exemple, que nous désignerons par "données H & B", nous serviront d'illustration tout au long de ce texte. L'ensemble de toutes les données analysées peut être figuré sous forme d'un tableau ayant la structure du Tableau I (*), dans lequel on a adopté les notations suivantes :

{ c0,c1,c2 désignent les 3 sessions successives ;
b1 désigne la période préparatoire courte, b2 la période longue ;
a1 désigne le stimulus fréquent, a2 le stimulus rare.

Les colonnes du tableau correspondent à ce que nous appellerons les conditions (expérimentales).

Pour chaque sujet, on inscrira, pour chaque condition, les valeurs des temps de réaction observés lors des différentes épreuves. Au lieu d'épreuves, on dira aussi "répétitions", les épreuves relatives à une condition et à un sujet donné pouvant être regardées comme autant de "répétitions" d'un même épreuve fondamentale de temps de réaction.

Dans le tableau I, on a simplement indiqué le nombre d'observations, c'est-à-dire ici d'épreuves, pour le sujet s1 et les 8 conditions relatives aux deux sessions c1 et c2.

Les nombres indiqués sont ceux des observations prises effectivement en compte dans l'analyse ; au cours de l'expérience, on avait, pour chaque sujet, procédé à 192 épreuves par session : 72 pour chacune des 2 conditions mettant en jeu le stimulus fréquent a1, et 24 pour chacune des 2 conditions mettant en jeu le stimulus rare a2 ; d'où $192 \times 3 = 576$ répétitions par sujet, et pour l'ensemble des sujets $12 \times 576 = 6912$ répétitions ; mais certaines épreuves (en petit nombre) ont donné lieu à des erreurs (lorsque le sujet ne donnait pas la réponse correspondant au stimulus présenté, mais à l'autre stimulus) et, pour la présente analyse, seules ont été retenues les épreuves sans erreur.

Quelques mots sur les objectifs de cette expérience et d'expériences analogues : des recherches antérieures avaient mis en évidence l'effet de chacun des deux facteurs expérimentaux (fréquence du stimulus et durée de la période préparatoire), pris séparément, sur le temps de réaction : celui-ci est nettement plus court, d'une part lorsque le stimulus est plus fréquent, d'autre part lorsque la période préparatoire est plus courte. L'expérience

(*) Les tableaux et figures se trouvent à la fin du texte.

envisagée ici avait pour objectif essentiel d'examiner l'effet conjoint des 2 facteurs expérimentaux : ceux-ci agissent-ils sur le temps de réaction d'une manière additive (d'où absence d'interaction) ou non-additive (d'où effet d'interaction).

Le problème théorique plus fondamental qu'on cherche à aborder est le suivant : si on se place dans un schéma selon lequel le temps de réaction est décomposable en stades successifs (modèle "sériel" du temps de réaction), les facteurs expérimentaux ont-ils une influence sur des stades distincts ou sur des stades communs ? Dans le premier cas, les effets des facteurs seront nécessairement additifs ; en d'autres termes, on aura absence d'interaction ; dans le deuxième cas, la prédiction la plus plausible sera un effet d'interaction. D'où l'importance du "paradigme" précédent dans les recherches expérimentales portant sur le mécanisme du temps de réaction.

CHAPITRE III - INTRODUCTION A LA FORMALISATION ENSEMBLISTE

Parmi les notions de base de la formalisation ensembliste, on présentera seulement, dans ce chapitre, celles qui mettent en jeu les concepts mathématiques les plus élémentaires relatifs aux relations et applications. Les notions de base plus profondes telles que treillis de finesse, facteurs saturés, plan minimal, relation de confusion entre facteurs, et facteurs superflus, sont exposées dans la Réf. 1977a ; cf. également B. et M-P. LECOUTRE, 1977, pour une illustration détaillée.

Nous commencerons par illustrer la formalisation ensembliste sur les "données H & B" présentées au chapitre II, et nous ferons suivre cette illustration d'un aperçu théorique destiné à faire entrevoir la portée générale de la formalisation.

Illustration de la formalisation ensembliste

[Les termes techniques soulignés dans ce paragraphe désignent les notions dont une présentation générale sera donnée au paragraphe suivant].

En vue de la formalisation ensembliste, on considèrera qu'une valeur observable est ici un temps, exprimé par une valeur numérique (l'unité de

mesure une fois choisie : ici, la milliseconde). Comme espace d'observation on prendra donc un ensemble numérique, choisi suffisamment large pour contenir toutes les valeurs observables, par exemple \mathbb{R} , ensemble des nombres réels. Les données d'ensemble de l'expérience pourront être représentées comme une famille d'observations, ou protocole, qu'on notera $(x_i)_{i \in I}$ ou, de manière équivalente, comme une application $I \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on appellera application-protocole (de support I à valeur dans \mathbb{R}). Si on désigne par n le nombre des observations du protocole, on pourra toujours numéroter les observations de 1 à n , et prendre comme support du protocole l'ensemble des n premiers nombres entiers ; mais pour l'analyse, ce support serait insuffisant car il ne fait pas intervenir l'organisation des données. Pour exprimer celle-ci, on procédera d'abord à la description des observations, laquelle sera effectuée ici à partir des 5 facteurs élémentaires suivants : fréquence du stimulus, période préparatoire, sessions, sujets, épreuves.

Le facteur "Fréquence du stimulus" sera défini comme l'ensemble $\{a_1, a_2\}$, dont les éléments a_1 et a_2 constituent les modalités du facteur, le facteur lui-même étant désigné soit par A (écriture non-indiciée), soit par A_2 (écriture indiciée, l'indice 2 spécifiant le nombre de modalités du facteur A). De même, le facteur "Période préparatoire" sera défini comme l'ensemble B ou $B_2 = \{b_1, b_2\}$.

Les deux facteurs A et B constitueront les "facteurs expérimentaux", liés directement aux objectifs de l'expérience. On introduira ensuite :

- le facteur "Session" ou ("Sessions") C (la lettre C pourra désigner soit l'ensemble des deux dernières sessions $C_2 = \{c_1, c_2\}$, soit l'ensemble des 3 sessions $C_3 = \{c_0, c_1, c_2\}$) ;

- le facteur "Sujets", que nous noterons S ou S_{12} , 12 sujets ayant passé l'expérience ;

- le facteur "Epreuves" ou "Répétitions" que nous noterons R , écriture non-indiciée (cf. ci-après l'alinéa sur les conventions d'écriture) ; rappelons que le nombre de modalités du facteur R est légèrement inférieur à 6912.

N.B. : Si l'on considère les modalités d'un facteur comme totalement ordonnées, on les appellera également des niveaux ; l'ordre pourra s'imposer natu-

rellement (exemple : les niveaux du facteur Session C), ou être purement conventionnel (par exemple, pour les facteurs A et B) mais commode ; lorsque nous ordonnerons les modalités de A et B, nous adopterons l'ordre du présent numérotage.

Quant aux modalités du facteur S (les sujets), leur numérotage est a priori arbitraire ; dans la suite nous adopterons un numérotage induit par les observations effectuées (correspondant à l'ordre croissant des effets d'interaction en valeur absolue ; cf. Tableau IV).

On vérifiera que chacun des facteurs précédents satisfait à la double propriété : (1) à chaque observation on peut associer exactement une modalité du facteur (qui constitue la description de l'observation selon ce facteur) ; (2) réciproquement, à chaque modalité du facteur correspond au moins une observation. On prendra cette double propriété comme caractérisant la notion générale de facteur, ce qui permettra en particulier de définir, à partir des facteurs élémentaires envisagés précédemment, des facteurs composés.

Ainsi considérons le produit (cartésien) des deux ensembles A_2 et B_2 : $A_2 \times B_2 = \{a_1b_1, a_2b_1, a_1b_2, a_2b_2\}$ (nous écrivons chacun des 4 couples du produit cartésien par simple juxtaposition) ; à chacun des 4 couples correspond au moins une observation, d'où il s'ensuit que le produit cartésien $A_2 \times B_2$ est lui-même un facteur, ce qu'on exprimera en disant que les deux facteurs A et B sont croisés.

[La structure de croisement des deux facteurs expérimentaux est ici nécessitée par l'objectif de la recherche, qui est l'examen de l'interaction entre ces deux facteurs].

Le facteur composé des facteurs A et B sera appelé le croisement des facteurs A et B, et noté soit $A*B$, soit A_2*B_2 , au moyen du symbole étoilé le "*" désignant le croisement.

Plus généralement, à chacune des combinaisons $a_1b_1c_1, a_2b_1c_1, \dots$ du produit cartésien $A \times B \times C$, correspond au moins une observation ; les facteurs A, B, C seront dits croisés dans leur ensemble, et leur croisement sera le facteur composé $J = A*B*C$. Le nombre des modalités de J est le produit du nombre de modalités des facteurs A, B, C, d'où les écritures indicées $J_{12} = A_2*B_2*C_3$ (en prenant $C = C_3$) et $J_8 = A_2*B_2*C_2$ (avec $C = C_2$).

Le facteur composé J que nous venons de définir sera appelé ici le facteur Condition (ou Conditions). Chaque sujet passe dans toutes les conditions, donc le facteur Sujet S est lui-même croisé avec le facteur Condition C, d'où les croisements $S*J$ et (en remplaçant J par $A*B*C$) $S*A*B*C$.

Enfin à chaque épreuve, ou répétition, correspond exactement un sujet et une condition ; par exemple, si la répétition r399 correspond au sujet s1 et à la condition a1b1c2, on écrira $r399<s1a1b1c2>$; en ce qui concerne la relation entre les facteurs R et $S*J$, on dira que le facteur R est emboîté dans le croisement $S*J$; le facteur composé de R, S et J sera appelé emboîtement de R dans $S*J$, et sera noté $R<S*J>$ au moyen du symbole chevrons "<>" désignant l'emboîtement.

On pourra, bien entendu, dans les formules, remplacer J par $A*B*C$, d'où les formules $S*A*B*C$ et $R<S*A*B*C>$.

Emboîtement équilibré : lorsque les divers nombres de modalités du facteur emboîté pour chacune des modalités du facteur emboîtant sont tous égaux, on dira que l'emboîtement est équilibré ; l'emboîtement précédent $R<J>$ est noté équilibré.

Plan du protocole : à chaque modalité r du facteur R correspond une seule observation : nous dirons que le facteur R est un plan du protocole. Tout facteur composé dont R est un facteur composant sera également un plan du protocole ; ainsi, à la modalité $r<sabc>$ (répétition r correspondant au sujet s passant dans la condition abc) du facteur composé $R<S*A*B*C>$ est associée une seule observation (laquelle n'est autre, bien entendu, que celle associée à la modalité r). Tout plan du protocole est en bijection avec un support du protocole. Mais parmi tous les plans qu'on peut constituer à partir des facteurs élémentaires, le plan $R<S*A*B*C>$, composé de tous les facteurs élémentaires, est le plus riche, donc sera le plus "signifiant" pour l'interprétation des données.

De plus, ce plan est représentable par une formule ne faisant intervenir que des croisements "*" et des emboîtements "<>" ; nous exprimerons cette propriété en disant que ce plan est quasi-complet.

Conventions d'écriture

En règle générale, un facteur élémentaire sera représenté par une lettre majuscule. La lettre minuscule correspondante représentera une modalité quelconque du facteur ; une modalité particulière sera représentée par la lettre minuscule suivie du numéro de cette modalité composé de chiffres de hauteur normale. Pour un facteur composé, on écrira une modalité en juxtaposant les écritures des modalités des facteurs élémentaires (cependant, cf. les conventions relatives à l'emboîtement). La notation indicisée des facteurs élémentaires dans une formule sera toujours, dans ce texte, considérée comme facultative (*). Si dans une formule le facteur est non-emboîté, la notation indicisée consistera à faire figurer en indice le nombre de modalités de ce facteur. Si le facteur est emboîté, et que l'emboîtement est équilibré, on pourra faire figurer en indice, dans la formule de l'emboîtement, le nombre (commun) de modalités de ce facteur emboîté par modalité du facteur emboîtant. Par exemple, on pourra écrire $R\langle S * A * B * C \rangle$ (formule non-indicisée), ou $R\langle S_{12} * A_2 * B_2 * C_2 \rangle$ (formule indicisée pour tous les facteurs non-emboîtés) ou $R\langle S * A_2 * B_2 * B_2 \rangle$ (formule indicisée pour A, B, C mais non pour S) ; mais l'emboîtement étant non-équilibré, on ne pourra pas, dans la formule de l'emboîtement, indicier le facteur R.

Autres exemples

1) $E\langle F_3 \rangle * C_3$: le facteur E n'est pas indicisé, ce qui, selon le contexte, pourra soit signifier que l'emboîtement n'est pas équilibré, soit qu'il est équilibré mais qu'on a jugé inutile de spécifier le nombre de modalités de E par modalité de F.

2) $E_2\langle F_3 \rangle * C_3$: cette fois l'écriture implique que l'emboîtement est équilibré (avec 2 modalités de E pour chacune des 3 modalités de F) ; le facteur E a donc en tout $2 \times 3 = 6$ modalités, d'où s'ensuivra, par exemple, l'écriture indicisée du croisement $E * C$: $E_6 * C_3$, etc.

Remarques

1) La notion de plan du protocole (qui traduit l'organisation des données en vue de leur analyse) est distincte de celle de "plan d'expérience" (ou plus généralement de "plan de recueil des données"), mais les deux notions

(*) Une formule de plan (quasi-complet), moyennant l'adoption d'une règle d'énumération des observations, permettra de se donner implicitement une indexation du protocole (cette propriété est exploitée dans la conception des programmes-machines ; cf. V. Duquenne, 1977).

sont apparentées étroitement, car lorsque les données ont été recueillies selon un plan, l'organisation des données en vue de l'analyse (donc, ce que nous appelons, au sens technique, le plan du protocole), sera conditionnée, sinon entièrement déterminée, par ce plan de recueil.

2) Mais de son côté, la notion de facteur du protocole est essentiellement différente de celle des facteurs dont il est question en "analyse factorielle" ; en effet, les facteurs du protocole sont posés au départ des analyses statistiques, alors que les facteurs d'une analyse factorielle sont issus de cette analyse (pour un exemple où interviennent les deux espèces de facteurs, cf. chapitre 8).

Autres notions de base

1) Un facteur à une seule modalité sera appelé facteur constant ; les facteurs constants seront superflus pour l'analyse statistique, mais ils pourront être cruciaux lors de l'interprétation des résultats.

2) Une partie stricte d'un facteur sera appelée facteur-partiel. Par exemple, le protocole d'ensemble des données, avec les 3 sessions, admettra $C_3 = \{c_0, c_1, c_2\}$ comme facteur et $C_2 = \{c_1, c_2\}$ comme facteur-partiel.

APERCU THEORIQUE SUR LA FORMALISATION ENSEMBLISTE (Réf. 1977a)

(1) Espace d'observation, protocole.

La notion d'espace d'observation constitue la première notion primitive de la formalisation ; les données à traiter seront toujours représentées comme une famille d'observations $(x_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire par définition, une famille finie de termes x_i à i valeurs dans un espace d'observation \mathcal{U} ($x_i \in \mathcal{U}$). Au lieu de famille d'observations, on dira aussi protocole.

Un ensemble (fini) arbitraire I indexant la famille des observations sera appelé un support du protocole. Souvent, on caractérisera le protocole par l'application-protocole $x : I \longrightarrow \mathcal{U}$ ayant le support I pour l'ensemble de départ et l'espace d'observation \mathcal{U} pour ensemble d'arrivée.

On appellera sous-protocole par restriction, ou simplement (dans le texte présent) sous-protocole d'un protocole, une partie de ce protocole, laquelle sera caractérisée par une restriction de l'application-protocole.

On désignera, sous le terme général de dérivation, toute procédure permettant d'engendrer, à partir d'un protocole d'une classe donnée, un nouveau protocole, qu'on appellera protocole dérivé. La dérivation par restriction apparaît comme la plus simple des dérivations.

(2) L'organisation des données : espace de description, descripteur, facteur, plan d'un protocole.

La notion d'espace de description constitue la deuxième notion primitive de la formalisation ; un espace de description sera généralement un produit (cartésien) de plusieurs ensembles appelés descripteurs. Formellement, un descripteur d'un protocole sera un ensemble tel qu'à chaque observation x_i du protocole on puisse associer un élément de cet ensemble (qu'on appellera la description de l'observation x_i selon ce descripteur. Par exemple, si l'espace de description comporte deux descripteurs, on associera à x_i les deux descriptions f_i et g_i ; ou, ce qui revient au même, on caractérisera la description du protocole par deux applications $f : i \mapsto f_i$ et $g : i \mapsto g_i$, ou encore par l'application composée $i \mapsto f_i g_i$ ($f_i g_i$ désignant le couple des descriptions). A chaque descripteur on associera un facteur du protocole, ou brièvement facteur, défini comme l'ensemble-image de l'application correspondante ; ainsi, à l'application f on associera le facteur $F = f(I)$. En conséquence, on pourra caractériser un facteur F par une application surjective $f : i \mapsto f_i$, dont l'ensemble d'arrivée est le facteur F . En d'autres termes, un facteur du protocole peut être défini comme un descripteur dont chacun des éléments (qu'on appellera les modalités du facteur) est la description d'au moins une observation ; ou encore : un facteur est un descripteur qui indexe une partition des observations.

Un facteur constant est un facteur qui indexe la partition grossière des observations ; un plan du protocole est un facteur qui indexe la partition la plus fine des observations (ou de manière équivalente tel que chacune de ses modalités est la description d'exactement une observation) ; un plan d'un protocole pourra être mis en bijection avec un support quelconque de ce protocole.

Si F est un facteur à plusieurs modalités et si F' est une partie stricte de F , on dira que F' est un facteur-partiel du plan. (Un facteur-partiel n'est donc pas un facteur ; mais beaucoup de propriétés des facteurs se généraliseront aux facteurs-partiels).

Etant donné un protocole, un facteur qui n'est pas un plan de ce protocole, ou un facteur-partiel, pourra être un plan d'un protocole dérivé de ce protocole et donc être mis en bijection avec un support de ce protocole dérivé (ce qu'on appellera un support dérivé).

(3) Facteurs composés et structures ensemblistes élémentaires remarquables : emboîtement, croisement.

La donnée de plusieurs facteurs permet de définir leur facteur composé, qu'on définit de la façon suivante : si $f : i \mapsto f_i$ et $g : i \mapsto g_i$ sont des applications associées aux facteurs F et G , le

facteur composé de F et G est par définition l'ensemble-image de l'application $i \mapsto f_i g_i$.

Un facteur composant d'un facteur composé sera appelé un sous-facteur du facteur composé.

Dans ce qui suit, F,G,H désigneront des facteurs (qui pourront être des facteurs composés). Nous introduirons maintenant deux structures ensemblistes élémentaires "remarquables" : celle d'emboîtement et celle de croisement.

Structures d'emboîtement (*) : le facteur F sera dit emboîté dans le facteur G si chaque modalité de F correspond à exactement une modalité de G ; le facteur composé de F et G sera appelé l'emboîtement de F dans G et noté $F \langle G \rangle$; on appellera les symboles "<" et ">" : chevrons (commençant et finissant) (**). On remarque la dissymétrie de la structure d'emboîtement : F est le facteur emboîté, G le facteur emboîtant. Si f est une modalité de F, et g la modalité de G associée à f dans l'emboîtement, le couple fg sera noté $f \langle g \rangle$ lorsqu'on voudra expliciter la structure d'emboîtement. Les notions précédentes s'étendent aux facteurs-partiels. Si G' est une partie de G, l'ensemble des couples $f \langle g \rangle$ tels que $g \in G'$ sera appelé emboîtement de F dans G' et noté $F \langle G' \rangle$. Si G est un facteur à plusieurs modalités et si l'inclusion de G' dans G est stricte, l'emboîtement $F \langle G' \rangle$ sera un facteur-partiel ; et si en particulier G' ne comporte qu'une seule modalité g, ce facteur-partiel sera appelé emboîtement (partiel) de F dans g et noté $F \langle g \rangle$ (écriture qui pourra être considérée comme la simplification de $F \langle \{g\} \rangle$: le symbole ensembliste de l'accolade est manifestement ici inutile).

On dira que l'emboîtement $F \langle G \rangle$ est équilibré si les emboîtements-partiels $F \langle g \rangle$ ont le même nombre de modalités lorsque g parcourt G.

Enfin, on remarquera qu'avec les définitions adoptées ci-dessus, un plan sera un facteur emboîté dans n'importe quel facteur, et un facteur constant un facteur emboîtant de n'importe quel facteur.

Structure de croisement : les facteurs F et G seront dits croisés si pour chaque couple $fg (f \in F, g \in G)$, on a au moins une observation ; le facteur composé de F et G sera alors appelé le croisement de F et G et noté (au moyen

(*) La définition donnée, dans ce texte introductif de l'emboîtement constitue une simplification de la notion plus restrictive qu'on trouvera exposée dans la Réf. 1977a.

(**) Nous avons utilisé antérieurement (par exemple dans la Réf. 1975-76), pour désigner l'emboîtement, le symbole des crochets "[]" (mais nous n'avons jamais utilisé dans ce sens le symbole des parenthèses "()") auquel nous réservons une signification toute différente : cf. ci-dessous, n° (5) et chapitre 4). Le remplacement des crochets par les chevrons nous permet d'utiliser désormais le même symbole dans les exposés théoriques et pour les entrées et sorties des machines (alors que les crochets n'appartiennent apparemment pas aux symboles connus de la plupart des imprimantes d'ordinateurs !). Ce remplacement nous permettra également d'utiliser les crochets comme métasybole à valeur parenthétique dans une formule.

du symbole étoile : "*") : $F * G$ (ou $G * F$, la structure de croisement étant manifestement symétrique). Cette définition s'étend immédiatement aux facteurs-partiels. On remarquera qu'un facteur constant est croisé avec n'importe quel facteur.

Remarque : pour exposer la notion de croisement, on pourrait très certainement se contenter du symbole du produit cartésien (classiquement la croix "x") ce que d'ailleurs nous avons fait dans certains textes antérieurs cf. Réf. 1975-76) ; le motif de l'introduction d'un nouveau symbole (l'étoile le *), est de permettre, au moyen d'une seule écriture ($F * G$), d'une part d'exprimer que des facteurs sont croisés, d'autre part de désigner leur facteur composé (croisement).

(4) Généralisation : facteur composé complet, quasi-complet.

La relation de croisement s'étend à plus de deux facteurs. Ainsi, si 2 facteurs F et G sont croisés et si le croisement $F * G$ est lui-même croisé avec H , les 3 facteurs F, G, H seront dits croisés dans leur ensemble et leur facteur composé sera noté $F * G * H$. (Mais à ce propos, on signalera que trois facteurs peuvent être croisés 2 à 2 sans être pour autant croisés dans leur ensemble : v. par exemple le plan des "données Cochran & Cox" analysées au chapitre 8. Par ailleurs, si F est emboîté dans G et croisé avec H , l'emboîtement $F < G$ est croisé avec H ; le facteur composé de F, G et H sera noté $F < G > * H$.

Etant donné plusieurs facteurs, leur facteur composé sera dit :

- complet si tous les facteurs sont croisés (dans leur ensemble) ;

- quasi-complet si : d'une part, tous les facteurs composés binaires sont, soit des emboitements, soit des croisements ; et si, d'autre part, tous les facteurs qui sont 2 à 2 croisés sont croisés dans leur ensemble. (Intuitivement, un facteur quasi-complet est un facteur "complet aux emboitements près").

Les notions de facteur complet ou quasi-complet seront dans la suite surtout utilisées dans le cas particulier où le facteur sera un plan : (notamment un plan de protocole dérivé) : d'où les termes de plan complet, plan quasi-complet.

(5) Usage des parenthèses dans la formalisation ensembliste.

Lorsque, le facteur F étant emboîté dans G , la modalité g correspond à la modalité F , on considérera l'écriture $f(g)$ (qu'on lira : "f dans g") comme une autre écriture de la modalité f , qui explicite la structure d'emboîtement (intuitivement, la modalité f se trouve "à l'intérieur de la modalité g ") ; en outre, on notera $F(g)$ l'ensemble des modalités de F emboîtées dans la modalité g .

On distinguera donc, d'un point de vue formel, $f(g)$ (modalité de F) et $f < g >$ (modalité de $F < G >$ facteur composé), et de même $F(g)$ (facteur-partiel de F) et $F < g >$ (facteur-partiel de $F < G >$).

Par ailleurs, nous ne donnerons pas ici de signification ensembliste dans une formule, à l'écriture $F(G)$ (écriture d'un facteur à l'intérieur d'une parenthèse), à moins bien entendu, que G ne se réduise à un facteur constant $\{g\}$, auquel cas on identifierait $F(G)$ à $F(g)$?

De la formalisation ensembliste aux formules de facteurs quasi-complets.

Un facteur composé quasi-complet peut s'exprimer à partir des facteurs composants au moyen d'une formule, dont l'écriture est "linéaire" (au sens de concaténation de lettres et de symboles) et fait intervenir uniquement les symboles "<>" et "*". Exemples de formules :

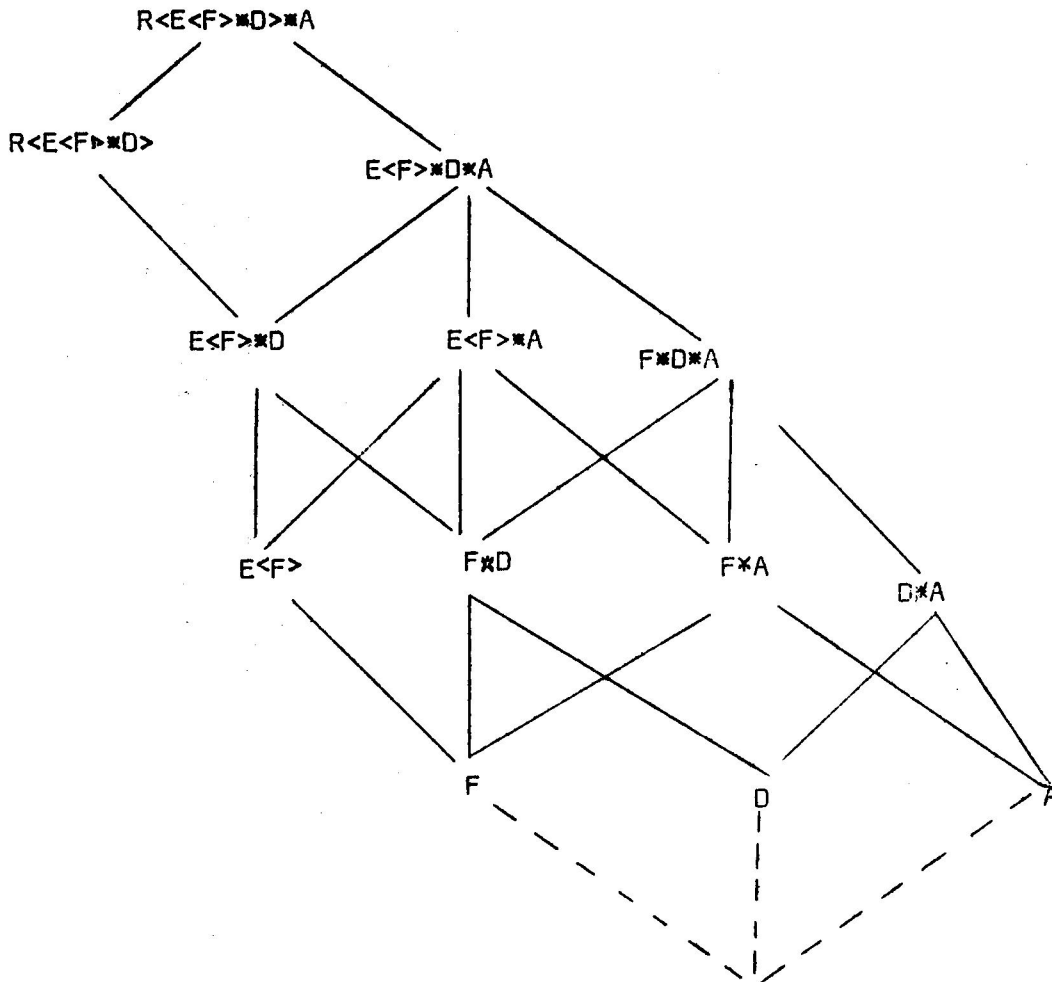
$E\langle F \rangle$;
 $R\langle E\langle F \rangle \rangle$;
 $A * B$;
 $E\langle F \rangle * D$;
 $R\langle E\langle F \rangle * D \rangle * A$, etc.

A une formule de facteur quasi-complet on associera des sous-formules (la formule du facteur constituant elle-même l'une de ces sous-formules), les quelles désigneront aussi des facteurs quasi-complets. On dira qu'une sous-formule est saturée si chacun des facteurs emboîtés de cette sous-formule y figure avec tous ses facteurs emboîtants.

L'ensemble des sous-formules saturées d'une formule sera appelé décomposition canonique de cette formule ; voici les décompositions canoniques des formules précédentes :

Formule	Sous-formules de la décomposition canonique
$E\langle F \rangle$	F ; $E\langle F \rangle$.
$R\langle E\langle F \rangle \rangle$	F ; $E\langle F \rangle$; $R\langle E\langle F \rangle \rangle$.
$A * B$	A ; B ; $A * B$.
$E\langle F \rangle * D$	F ; D ; $F * D$; $E\langle F \rangle$; $E\langle F \rangle * D$.
$R\langle E\langle F \rangle * D \rangle$	F ; D ; $F * D$; $E\langle F \rangle$; $E\langle F \rangle * D$; $R\langle E\langle F \rangle * D \rangle$
$R\langle E\langle F \rangle * D \rangle * A$	F ; D ; $F * D$, $E\langle F \rangle$; $E\langle F \rangle * D$; $R\langle E\langle F \rangle * D \rangle$, A ; $F * A$; $D * A$; $F * D * A$; $E\langle F \rangle * A$; $E\langle F \rangle * D * A$; $R\langle E\langle F \rangle * D \rangle * A$.

L'ensemble des sous-formules de la décomposition canonique d'un plan quasi-complet pourra être représenté sous forme d'un treillis, qui sera le "treillis de finesse" de ce plan (mais la notion générale de treillis de finesse s'applique à un plan quelconque et pas seulement à un plan quasi-complet). Ci-dessous, le treillis de finesse correspondant à la formule $R\langle E\langle F\rangle * D\rangle * A$:



N.B. - Dans les analyses, la notion de décomposition canonique d'une formule de plan quasi-complet servira essentiellement à obtenir la décomposition canonique des effets liés à un plan quasi-complet, que nous présenterons au chapitre IV.

Remarque

Il peut être utile de présenter quelques exemples d'écritures qui ne désignent pas des plans quasi-complets

(1) Premier exemple : $[A\langle B\rangle]\langle C\rangle$ (où les crochets sont utilisés comme symbole séparateur) ; cette écriture exprime que les 3 facteurs A,B,C vérifient les deux propriétés suivantes :

- . A est emboîté dans B ;
- . l'emboîtement $A \langle B \rangle$ est lui-même emboîté dans C.

Mais ces propriétés n'entraînent pas que le facteur composé de A,B,C soit quasi-complet.

Contre-exemple : considérons 2 facteurs B et C, tels que le facteur composé, qu'on notera $B \otimes C$, ne soit ni un emboîtement ni un croisement, et supposons que le facteur A soit emboîté dans $B \otimes C$. Les deux propriétés ci-dessus seront vérifiées, ce qui justifie l'écriture $[A \langle B \rangle] \langle C \rangle$; et pourtant, le facteur composé de A,B,C ne sera pas quasi-complet puisque l'un des facteurs binaires $B \otimes C$, n'est ni un emboîtement, ni un croisement.

(2) Deuxième exemple : $[A * B] \langle C \rangle$; cette écriture exprime que les 3 facteurs A,B,C vérifient les deux propriétés :

- . A et B sont croisés ;
- . le croisement $A * B$ est emboîté dans C.

Mais ces propriétés n'entraînent pas que le facteur composé de A,B,C soit quasi-complet.

Contre-exemple : supposons que chacun des facteurs A et B soit à deux modalités ; le croisement $A * B$ sera à quatre modalités, et de même l'emboîtement $[A * B] \langle C \rangle$; le facteur binaire $A \otimes C$ ne pourra donc pas être à plus de 4 modalités ; si donc c est à plus de 2 modalités, $A \otimes C$ ne pourra pas être un croisement, et le facteur composé de A,B,C ne sera donc pas quasi-complet.

On peut d'ailleurs construire des contre-exemples plus "sophistiqués" ; en effet 3 facteurs A,B,C (non-constants, avec tous les trois le

même nombre de modalités, par exemple 2) peuvent être tels que :

$[A \times B] \langle C \rangle ;$

$[B \times C] \langle A \rangle ;$

$[C \times A] \langle B \rangle ;$

donc être tels que tous les facteurs composés binaires sont cette fois des croisements ; mais pour que le facteur composé de A,B,C soit quasi-complet il faudrait en outre que les trois facteurs A,B,C soient croisés ce qui est impossible car on ne peut avoir à la fois (C n'étant pas constant) :

$[A \times B] \langle C \rangle$ et $[A \times B] \times C$.

(N.B. : la structure précédente n'est autre que la structure, ~~très~~ courante dans l'expérimentation, de carré latin construit sur 3 facteurs ; nous rencontrerons une illustration de cette structure, au chapitre VIII, avec les "données de Cochran et Cox", avec un carré latin construit sur les trois facteurs Machines, Essais et Ordres).

CHAPITRE IV - DE L'EXPLORATION DES DONNEES AUX ANALYSES FINES : FORMULES D'INTERROGATION ET DEMANDES D'ANALYSE

Exploration des données et examens à vue.

Dans une première phase de l'analyse des données expérimentales, que nous appellerons l'exploration des données, l'expérimentaliste construit un certain nombre de tableaux et graphiques et procède à leur examen à vue.

Cette phase, tout en étant guidée par les objectifs qui ont suscité la recherche (par exemple, pour les "données H & B" : l'examen de l'interaction entre deux facteurs expérimentaux A et B) sera essentiellement "ouverte", et l'expérimentaliste en profitera généralement pour "recouper" des résultats antérieurs (par exemple, ici : les effets de chacun de ces deux facteurs expérimentaux, pris séparément).

Du point de vue formel, tous ces examens constitueront des dérivations effectuées sur le protocole. Nous allons maintenant, sur les "données H & B", illustrer les plus simples de ces dérivations : la restriction et le moyennage.

Restriction à une partie d'un facteur ; restriction à un facteur-partiel, à une modalité d'un facteur

Supposons qu'au cours de l'exploration des données, nous voulions nous restreindre aux données d'une partie des sujets, disons les sujets s_1 à s_6 (*). Ces données constitueront un sous-protocole (strict) du protocole d'ensemble, dérivé par restriction à une partie du facteur S, en l'occurrence la partie (stricte) $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$ [Si l'on considère le Tableau I, ce sous-protocole correspondra à une partie de ce tableau].

Pour décrire ce sous-protocole, on prendra naturellement les mêmes descripteurs que pour le protocole d'ensemble ; d'où le plan $R<S'*A*B*C>$ qui est un facteur-partiel du plan $R<S*A*B*C>$ décrivant le protocole d'ensemble ; la formule $R<S'*A*B*C>$ désignera également sans ambiguïté le sous-protocole correspondant.

(*) Méthodologiquement, une telle restriction ira de soi lorsque la partie du facteur considérée correspond à une modalité d'un autre facteur (par exemple, si les sujets s_1 à s_6 , à la différence des autres, avaient été soumis à une certaine tâche préalable à l'expérimentation). Dans l'expérience rapportée ici, ce n'était pas le cas ; la sélection des sujets s_1 à s_6 serait donc une sélection effectuée à partir des observations (rappelons que nous avons numéroté les sujets selon l'ordre croissant de leurs effets d'interaction : cf. tableau IV). Sans pousser la discussion méthodologique, disons qu'une telle sélection a posteriori ne soulèvera pas de problème majeur dans la phase d'exploration des données, mais deviendrait plus délicate si elle était effectuée en vue de conclusions inférentielles (cf. chapitre V, la discussion des tests de signification "a posteriori").

Un cas particulier sera celui de la restriction à un sujet donné, disons s_1 ; d'où le protocole que l'on dira dérivé par restriction à la modalité s_1 du facteur S ; le plan de ce protocole sera le facteur-partiel (ou plan-partiel) $R\langle s_1 \rangle * A * B * C$, qu'on écrira simplement $R\langle s_1 \rangle * A * B * C$ (cf. les commentaires du chapitre précédent au sujet de l'écriture $F\langle g \rangle$).

Dans ce qui suit : à chacun des sujets nous associerons le sous-protocole ainsi obtenu par restriction ; chacun de ces protocoles, bien que dérivé (par rapport au protocole d'ensemble) sera qualifié de protocole individuel "fondamental", car il servira de base aux "analyses individuelles" du sujet correspondant.

Moyennage sur un facteur

Supposons maintenant que nous calculions, pour chaque sujet et chaque condition, la moyenne des observations relatives à ce sujet et à cette condition ; la famille de ces moyennes constituera un protocole dérivé par moyennage sur (les modalités d') un facteur : ici, le facteur Répétitions $R\langle \rangle$ (le rappel de la structure d'emboîtement du facteur R est destiné à souligner que chacune des opérations de moyennage porte, bien entendu, non sur toutes les modalités du facteur R, mais seulement sur celles qui correspondent à une même modalité du facteur emboîtant).

Le protocole précédent sera qualifié de "protocole de groupe fondamental", car c'est à partir de ce protocole que l'on procédera aux "analyses de groupe".

Ce protocole (lorsque on prend $C=C_2$) est reproduit dans la sortie n° 1 de l'Annexe ; il admet pour plan $S * A * B * C$, qui est un sous-facteur du plan $R\langle S \rangle * A * B * C$. La formule $S * A * B * C$ désignera sans ambiguïté ce plan, ainsi que le protocole correspondant, si l'on adopte la convention de notation suivante, dite de la notation par défaut : l'absence d'une lettre, aussi bien en majuscule qu'en minuscule (ici : l'absence de la lettre R) signifie qu'on a moyenné sur le facteur correspondant.

En procédant de la sorte à diverses restrictions et moyennages successifs, on obtiendra des protocoles de plus en plus "condensés" dont les supports seront des sous-facteurs, ou sous-facteurs-partiels. Dans le tableau II, on a présenté quelques "chaînes de dérivation" envisageables.

On remarquera qu'un même protocole dérivé peut être obtenu à partir de plusieurs chaînes de dérivation. Ainsi, le protocole $s_1 * A * B * C$ peut être obtenu à partir du protocole de groupe fondamental $S * A * B * C$, par restriction à s_1 , mais aussi bien à partir du protocole individuel fondamental $R \langle s_1 * A * B * C \rangle$, par moyennage sur le facteur $R \langle \rangle$.

Cas où le plan est un croisement : protocole dérivé conditionnel

La notion de protocole dérivé conditionnel constitue une généralisation des deux notions de protocole dérivé par restriction et par moyennage ; mais pour introduire cette notion, nous nous limiterons au cadre particulier d'un protocole admettant pour plan un croisement ; comme illustration, nous prendrons le protocole de groupe fondamental, dont le plan $S * A * B * C$ sera considéré ici comme le croisement du facteur S et du facteur $A * B * C$. A partir de ce protocole :

- on peut procéder à une restriction à une partie S' du facteur S ; d'où le sous-protocole admettant pour plan $S' * A * B * C$, plan-partiel de $S * A * B * C$ (Dans le "tableau des données" de la sortie n° 1 de l'Annexe (lorsqu'on prend $C = C_2$) : ce sous-protocole correspond à l'ensemble des lignes du tableau relatives à la partie S' ; par exemple, si $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$, ce sous-protocole est constitué par les 6 premières lignes du tableau ;

- en particulier, on peut procéder à une restriction à une modalité (disons s_1) du facteur S ; d'où le protocole (qui sera qualifié d'"individuel") ; ce protocole admettra pour plan $s_1 * A * B * C$. Tous les plans de ces protocoles individuels seront en correspondance bijective deux à deux, ainsi qu'avec le facteur $A * B * C$, sous-facteur de $S * A * B * C$. (Dans la sortie n° 1 de l'Annexe, ces protocoles individuels correspondent aux lignes du "tableau des données", indexées par s_1, s_2, \dots).

- on peut procéder à un moyennage sur le facteur S : d'où le protocole dérivé (qu'on qualifiera "de groupe") admettant pour plan le facteur $A * B * C$, sous-facteur de $S * A * B * C$; l'écriture $A * B * C$ désignera sans ambiguïté, moyennant la convention par défaut, le plan et le protocole dérivé lui-même. (Dans la sortie n° 1 de l'Annexe : ce protocole de groupe correspond au "tableau des moyennes").

On pourrait également envisager de moyenniser sur une partie S' du facteur S. Cette dérivation, clairement, contiendra comme cas particuliers, d'une part la restriction à une modalité de S (en prenant S' = {s1} par exemple), d'autre part le moyennage sur le facteur S (en prenant S'=S). Mais lorsque S' est une partie, stricte et non-réduite à 1 élément de S, il s'agira d'une dérivation nouvelle, que nous appellerons moyennage sur le facteur-partiel S'. Dans le cas général, nous dirons que le protocole dérivé est un protocole dérivé conditionnel (le conditionnement portant sur la partie S' de S).

Plan d'un protocole conditionnel ; symbole de conditionnement et notation pleine pour le moyennage

Reprenons l'exemple du protocole conditionnel, dérivé, à partir du protocole S*A*B*C, par moyennage sur une partie S' (quelconque) de S. Le support de ce protocole est en correspondance bijective avec A*B*C, mais l'écriture A*B*C, qui ne fait pas apparaître S', est insuffisante pour caractériser le protocole. Pour écrire le plan de ce protocole conditionnel, nous adopterons la formule suivante :

$$A*B*C/S'$$

Cette écriture met en jeu le nouveau symbole "/" qu'on appellera barre de conditionnement, ou barre transversale, ou "slash". Dans cette écriture, la partie du facteur sur laquelle on a moyenné apparaîtra donc à droite du symbole "/" ; par exemple, si S' = s1,s2,...s6 , on écrirait :

$$A*B*C/s1 s2 s3 s4 s5 s6$$

[On pourra ici considérer que l'écriture avec le symbole de conditionnement est, par définition, équivalente à l'écriture ensembliste {S'}*A*B*C, où {S'} désigne le facteur (constant) ayant pour unique modalité la partie S']

Dans le cas particulier d'une restriction à une modalité, disons s1, on écrirait de même la formule :

$$A*B*C/s1$$

avec, à droite du symbole "/", la modalité (écrite en minuscules) du facteur sur lequel porte la restriction (cette formule sera donc équivalente à la formule s1*A*B*C écrite plus haut).

Enfin, lorsque la partie S' coïncide avec S (moyennage sur le facteur

S), on sera conduit à l'écriture :

$$A*B*C/S,$$

équivalente à la formule $A*B*C$ (écrite plus haut avec la "notation par défaut") ; on dira que cette nouvelle formule désigne le protocole dérivé avec la convention de la notation pleine pour le facteur S.

D'une façon générale, on parlera de notation pleine pour un facteur, lorsqu'on écrira ce facteur, en majuscule et à droite du symbole "/", pour signifier qu'on a moyenné sur ce facteur ; la notation pleine est évidemment moins concise que la notation par défaut, mais cette propriété pourra devenir un avantage (notamment dans un contexte d'emploi élargi des formules : que nous envisagerons plus loin dans ce chapitre.

L'existence de deux notations équivalentes, par défaut et pleine, pour désigner un plan de protocole dérivé conditionnel, nous fournit un exemple d'équivalences de formules. L'introduction du symbole "/" suggèrera d'autres équivalences. Reprenons, par exemple, le protocole individuel fondamental relatif au sujet s_1 , dont nous avons écrit le plan $R\langle s_1 * A * B * C \rangle$; dans cette écriture, le facteur $\{s_1\}$ apparaît comme emboîtant du facteur R ; mais $\{s_1\}$, étant un facteur constant, se trouve également croisé avec le facteur R (cf. chapitre 3), d'où l'écriture équivalente $R\langle A * B * C \rangle * \{s_1\}$, qu'on pourra aussi, en utilisant le symbole de conditionnement, écrire : $R\langle A * B * C \rangle / s_1$.

Remarque : Rappelons que nous avons défini la notion de protocole conditionnel (et illustré l'usage du symbole de conditionnement "/") en nous plaçant dans le cadre d'un protocole admettant pour plan le croisement de 2 facteurs (éventuellement composés) F et G, avec un conditionnement portant sur une partie de l'un des deux facteurs, par exemple : G/F' .

Ce cadre pourrait être indubitablement élargi, comme le suggèrera sans doute au lecteur une certaine "logique intuitive" de l'emploi du symbole de conditionnement "/". Cependant, d'une part les limites d'un tel élargissement n'apparaîtront pas si claires à cerner ; d'autre part, le cadre précédent correspond de près aux écritures admissibles dans les programmes existants, en particulier VAR3. C'est pourquoi, dans le texte présent, nous nous en tiendrons à ce cadre ; en particulier, dans le cas d'un emboîtement $F\langle G \rangle$, si G' est une partie de G (non réduite à une modalité), nous n'utiliserons pas l'écriture F/G' ; cf. à ce propos, le commentaire de la "brochure verte" (p. 33) sur le caractère superflu du symbole "/" dans les formules dérivées d'un emboîtement.

FORMULES DE PROTOCOLES DERIVES ET ECRITURES DE DERIVATION

Si nous revenons à la phase d'exploration des "données H & B": parmi les protocoles dérivés, combinant restrictions et moyennages, ceux dont le support est en correspondance bijective avec le croisement des deux facteurs expérimentaux $A_2 * B_2$, présenteront, pour l'interprétation de l'expérience, un intérêt tout particulier ; ces protocoles pourront être figurés par des graphiques, commodes pour les examens à vue : sur la figure 1, on a représenté, à titre d'exemples, les protocoles suivants, qui sont tous les trois des protocoles dérivés du protocole fondamental de groupe $S * A * B * C_2$, et qu'on pourra, à ce titre, désigner par des formules dérivées de $S * A * B * C$:

1a) restriction au sujet s_1 et moyennage sur les sessions C (ici C_2) ; d'où les formules équivalentes $A * B / s_1 * C$ (notation pleine pour C) et $A * B / s_1$ (notation par défaut pour C) ;

1b) restriction à la session c_1 et moyennage sur les sujets S ; d'où les formules équivalentes : $A * B / c_1 * S$ et $A * B / c_1$;

1c) moyennage à la fois sur les sessions (C_2) et sur les sujets S ; d'où les formules équivalentes : $A * B / C * S$, $A * B / S$, et $A * B / C$.

Remarque : la possibilité de choix entre la notation par défaut et la notation pleine (de même que celle du choix entre l'écriture indicée ou non-indicée pour chacun des facteurs) pourra être mise à profit pour suggérer des options méthodologiques. Ainsi, parmi les formules désignant le protocole (1c), la formule $A * B / C$ pourra être utilisée si l'on souhaite suggérer que le moyennage sur S "va de soi" mais non celui sur C (ce qui traduira), l'opposition entre facteur systématique et facteur de groupe, que nous verrons plus loin dans ce chapitre.

Ecritures de dérivation : toutes les formules écrites jusqu'à présent désignent des plans de protocoles dérivés dont elles constituent des descriptions ; mais elles peuvent être également regardées comme des écritures de dérivation, en ce sens que ces écritures conduisent directement à des procédures de calcul, comme on peut le vérifier aisément en procédant effectivement aux calculs à partir du "tableau des données" de la sortie n° 1 de l'Annexe.

Ainsi, pour obtenir le protocole $A_2 * B_2 / s_1$ (fig. 1a), on se restreint au sujet s_1 (1ère ligne du tableau) et on calcule, pour chacune des 4 combinaisons $a_1 b_1, a_2 b_1, a_1 b_2, a_2 b_2$, la moyenne des 2 valeurs correspondant aux 2 ses-

sions, d'où :

$$\begin{cases} x^{11} = 1/2 (358 + 326) & \text{(où l'indice 11 représente a1b1,} \\ x^{21} = 1/2 (389 + 348) & \text{l'indice 21 représente a2b1, etc.) (*)} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x^{11} = 342 \\ x^{21} = 368 \text{ etc.} \end{cases}$

[Note générale sur la présentation des résultats numériques de ce texte :

chacune des valeurs numériques est présentée après un arrondi raisonnable, mais les calculs ont toujours été effectués sur des valeurs plus précises].

Cependant, cette possibilité d'interpréter une formule de description d'un protocole dérivé comme une écriture de dérivation n'existe ici que parce que nous nous sommes placés dans un cadre restrictif, dont nous rappelons les caractéristiques essentielles :

1) le plan à partir duquel on effectue les dérivations est un plan spécifié à l'avance, et ce plan est quasi-complet ;

2) la seule dérivation envisagée est le moyennage (ou la restriction qui peut en être regardée comme un cas particulier).

[Rappelons également les contraintes relatives aux protocoles conditionnels, sur lesquelles nous ne reviendrons pas].

Formules avec mentions : si l'on veut élargir la classe de dérivations admissibles à partir d'un plan donné (c'est-à-dire élargir le point 2) du cadre précédent), la formule de description du protocole dérivé pourra ne plus correspondre à un mode de dérivation unique. (C'est en fait déjà ce qui peut se produire avec la dérivation par moyennage, comme nous le développerons au paragraphe suivant). Si l'on veut alors des écritures qui puissent conduire à des procédures de calcul, une solution consistera à accompagner la formule de description de mentions qui préciseront le mode de dérivation.

Par exemple, pour définir le "protocole de groupe fondamental" à partir du protocole d'ensemble $R\langle S * A * B * C \rangle$, nous avons "moyenné" sur $R\langle \rangle$; mais on aurait pu préférer "prendre les médianes" sur $R\langle \rangle$; le protocole dérivé cor-

(*) Pour l'écriture des indices en position supérieure, v. le commentaire ci-dessous, l'alinéa "Protocole pondéré".

respondant serait encore décrit par la formule $S*A*B*C$; pour faire apparaître la procédure de dérivation, on pourrait alors faire suivre cette formule d'une mention telle que (MED) (pour "médiane") ; dans ce cadre élargi, la dérivation par moyennage devrait alors elle aussi être précisée par une mention telle que (MOY) (pour "moyenne") ; d'où les écritures :

$$\begin{array}{ll} S*A*B*C & \text{(MED)} \\ S*A*B*C & \text{(MOY) etc.} \end{array}$$

De telles écritures sont exploitées dans les programmes rédigés par V. Duquenne (cf. en particulier Duquenne, 1976).

Dans le texte présent, où nous privilégions les dérivations de type linéaire (cf. chapitre 6), la procédure de dérivation par "moyennage" sera toujours implicite et les seules mentions éventuelles dont nous accompagnerons les formules porteront sur le mode (équipondéré, ou pondéré) de moyennage.

Moyennage équipondéré et moyennage pondéré

En fait, même à l'intérieur du cadre restrictif adopté ici, une précision peut être indispensable pour caractériser sans ambiguïté la dérivation par moyennage : celle de la pondération à adopter.

Ainsi, pour les "données H & B" : cherchons à définir, à partir du protocole $A_2*B_2/C*s1$ (fig. 1a), le protocole (dérivé par moyennage sur A) : $B_2/A*C*s1$: ce protocole comportera deux valeurs observées x^1 et x^2 correspondant aux modalités respectives $b1$ et $b2$. On peut bien sûr prendre pour définition de x^1 la demi-somme \bar{x}^1 , c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} \bar{x}^1 = 1/2 (342 + 368) \text{ soit } \bar{x}^1 = 355 \\ \text{(et de la même façon } \bar{x}^2 = 368) \end{array}$$

Cependant, on peut remarquer que les deux valeurs 342 et 368 sont elles-mêmes des moyennes dont les valeurs ont été obtenues à partir d'effectif inégaux (respectivement : 71 et 24 ; cf. tableau I) et qu'en conséquence on pourrait également, pour définir x^1 , tenir compte de ces effectifs, en prenant la moyenne pondérée \hat{x}_1 définie par :

$$\hat{x}_1 = \frac{71 \times 342 + 24 \times 368}{71 + 24} \text{ , d'où } \hat{x}_1 = 349$$

et de même, en utilisant les effectifs reproduits dans le tableau I : $\hat{x}_2 = 379$.

Cette deuxième procédure sera appelée moyennage pondéré (sous-entendu : par les effectifs du protocole sur lequel on procède à la dérivation), la première procédure étant alors, par opposition, appelée moyennage équipondéré.

Pour distinguer, au niveau des écritures, les deux modes de dérivation, nous ferons suivre la formule de description du protocole dérivé de l'une des mentions (E) (pour "Equipondéré") ou (P) (pour "Pondéré") d'où les écritures :

$$\text{et } \begin{cases} B_2/A * C * s_1 & (E) \\ B_2/A * C * s_1 & (P) \end{cases}$$

Bien entendu, moyennage équipondéré et moyennage pondéré coïncident lorsque les valeurs sur lesquelles on moyenne correspondent à des effectifs égaux ; sinon, la divergence sera d'autant plus accusée que les effectifs sont plus inégaux et que les valeurs sur lesquelles on moyenne sont plus dispersées. Ainsi, dans le cas présent, la nette divergence est due d'une part aux grandes inégalités entre effectifs et d'autre part, à ce que, pour chacune des modalités de B, les valeurs sont nettement différentes.

Dans les situations où l'inégalité des effectifs rendrait très différents les résultats obtenus par l'une et l'autre procédures, les considérations de choix (que nous ne ferons qu'esquisser ici), porteront notamment :

- sur l'origine de l'inégalité des effectifs ; ici l'inégalité provient de la définition-même du facteur expérimental A qui est la "fréquence de stimulus", d'où on pourrait le cas échéant tirer argument en faveur du moyennage pondéré ;

- sur les objectifs de la dérivation par moyennage ; ici, il s'agit de définir, pour chacune des périodes préparatoires b1 et b2 une valeur qui servira essentiellement à évaluer, pour le facteur B, un effet "global", c'est-à-dire moyenné sur les stimulus fréquents (a1) et les stimulus rares (a2) ; or, on peut très certainement soutenir qu'au niveau de la définition de cet effet global il n'y a aucune raison de privilégier les stimulus fréquents, d'où un argument en faveur du moyennage équipondéré.

Dans la situation présente, chacune des deux procédures apparaissant défendable, il conviendra de les envisager l'une et l'autre dans les analyses, afin d'examiner si les conclusions essentielles sont sérieusement affectées (ou non) par les termes d'un choix qui ne s'impose pas. Nous y reviendrons dans les analyses des "données H & B". A propos de ces données, le

moyennage sur A sera le seul qui soulève, a priori, des problèmes de pondération - car les autres facteurs induisent des pondérations uniformes ou sensiblement uniformes.

Protocole pondéré : les considérations précédentes conduisent à généraliser la notion élémentaire de protocole (utilisé jusqu'ici) en celle de protocole pondéré, lequel par définition, sera caractérisé par la donnée d'une part, d'une famille de valeurs observées, d'autre part d'une pondération. (Les coefficients de celle-ci seront généralement, mais non obligatoirement, des effectifs, qui reflèteront le fait que le protocole considéré est dérivé d'un protocole plus fondamental). Les valeurs observées d'un protocole dérivé seront notées avec des indices supérieurs, et les coefficients de la pondération avec des indices inférieurs (l'origine de cette notation est la dualité entre "variables" et "mesures" qui jouera un rôle fondamental dans la formalisation linéaire ; cf. chapitre 6 et Réf. 1976b). Ainsi, pour un protocole de support $A_2 * B_2$, si l'on désigne par v_{11} , v_{21} , etc. les coefficients de la pondération sur $A_2 * B_2$ et par x^{11} , x^{21} les valeurs observées, on aura comme valeurs x^1 et x^2 du protocole dérivé :

- soit $\bar{x}^1 = 1/2 (x^{11} + x^{21})$ et $\bar{x}^2 = \frac{1}{2} (x^{12} + x^{22})$ (moyennage équipondéré)

- soit $\hat{x}^1 = \frac{v_{11}x^{11} + v_{21}x^{21}}{v_{11} + v_{21}}$ et $\hat{x}^2 = \frac{v_{12}x^{12} + v_{22}x^{22}}{v_{12} + v_{22}}$ (moyennage pondéré)

Nouvelles dérivations ; formules de protocoles dérivés d'un plan quasi-complet ("langage des plans quasi-complets").

Reprenons le problème de l'élargissement des dérivations admissibles à partir d'un plan donné (toujours supposé quasi-complet). Pour faire apparaître dans l'écriture la procédure de dérivation, on pourra (au lieu de juxtaposer, comme ci-dessus, une "mention" à la formule), envisager d'intégrer dans l'écriture de la formule elle-même l'indication de la procédure, en introduisant de nouveaux symboles. Cette solution sera particulièrement bien adaptée à la classe des dérivations que nous appelons dérivations linéaires (cf. chapitre 6), effectuées sur plan quasi-complet ; l'ensemble des formules admissibles désignant des protocoles dérivés constituera alors ce que nous appelons un langage de formules de plan quasi-complet, ou brièvement

un langage de plan quasi-complet.

Un langage de plan quasi-complet comportera :

- au minimum les 2 symboles fondamentaux "<>" et "*" (les formules écrites avec ces deux seuls symboles constituent ce que nous avons appelé les sous-formules du plan), et le symbole de conditionnement "/" ;

- de nouveaux symboles correspondant à de nouvelles dérivations ; parmi ces dernières, les plus importantes seront la dérivation intra, qui sera désignée par le symbole des parenthèses "()", et la dérivation d'interaction, désignée par le symbole du point ".".

Une définition générale de ces deux nouvelles dérivations pourra être donnée dans le cadre de la formalisation linéaire ; ici nous nous bornerons à introduire les écritures générales (proches de celles utilisées dans les programmes-machine), mais au niveau de la mise en oeuvre effective, nous nous limiterons au cas particulier (correspondant à la situation expérimentale qui sert d'illustration à notre exposé), de deux facteurs croisés, chacun à deux niveaux. En fait, dans ce cas très particulier, nous n'aurons même pas besoin de définir précisément les procédures de dérivation intra ou d'interaction, dans la mesure où nous nous intéresserons primordialement, non pas à des protocoles dérivés eux-mêmes, mais à des statistiques définies à partir de ces protocoles dérivés, lesquelles viseront à traduire les notions respectives d'effet intra et d'effet d'interaction.

Effet défini à partir d'un protocole dérivé : généralités, et effet d'un facteur à deux modalités.

Nous donnerons maintenant quelques indications sur la notion (évoquée au chapitre 1er de ce texte), d'effets liés à la structure d'un plan. Pour fixer les idées, supposons qu'à partir du protocole d'ensemble des "données H & B", nous nous posions des questions telles que les suivantes :

- "Examiner l'effet du facteur B (période préparatoire) ;
- "Examiner l'effet d'interaction entre ces facteurs expérimentaux A et B".

Nous supposerons d'abord, pour fixer les idées, qu'on envisage de traduire cette notion d'effet au moyen d'une statistique numérique.

Pour donner un sens opérationnel à de telles questions, il sera indispensable de fournir les deux précisions suivantes :

- d'une part, quel est le protocole dérivé sur lequel on choisit de définir la statistique : ce que nous appellerons le niveau d'analyse de l'effet ;

- d'autre part, quelle est la statistique que l'on choisit pour évaluer l'effet : ce que nous appellerons le critère d'évaluation de l'effet.

Dans la phase d'exploration des données, que nous envisageons d'abord, les critères d'évaluation envisagés seront des critères descriptifs (par opposition aux critères inférentiels, qui seront envisagés ultérieurement).

Parmi les effets liés à la structure du plan, on aura tout d'abord la notion d'effet d'un facteur (ou d'un facteur-partiel).

Exemple : les protocoles dérivés $B/A * C * s_1$ (fig. 1a) et $B/a_1 * C * s_1$ (cf. encore fig. 1a), permettront d'envisager respectivement l'effet du facteur B moyenné sur les facteurs A et C et restreint au sujet s_1 , et l'effet de ce même facteur restreint aux modalités a_1 et s_1 et moyenné sur les sessions C, etc. Les niveaux d'analyse respectifs de ces effets sont précisés (compte tenu de l'éventuel usage de la convention par défaut) par les termes de la formule à droite du symbole "/" (donc respectivement $A * C * s_1$ et $a_1 * C * s_1$) : On dira en outre que les effets de B précédents se situent vis-à-vis des facteurs S et C au même niveau d'analyse (restriction à s_1 et moyennage sur C) mais que vis-à-vis du facteur A, le premier est un effet global, ou moyen, (*) alors que le deuxième est un effet partiel, ou conditionnel ("pour la modalité a_1 ").

Quant au critère d'évaluation : dans le cas particulier d'un facteur à deux modalités (comme ici le facteur B_2), il sera naturel en ordonnant conventionnellement les 2 modalités, de prendre comme statistique la différence (orientée) $x^1 - x^2$ (x^1 et x^2 désignant les valeurs observées du protocole) ; nous appellerons cette statistique l'effet observé du facteur à deux niveaux.

Du point de vue des écritures, on pourra faire figurer, à gauche de la formule du protocole, la spécification de la statistique à calculer : ici l'effet observé. Ainsi, on écrirait (abrégeant "effet observé en EFF.OBS) :

(*) Le qualificatif de "moyen" sera tout à fait adéquat dans toutes les situations où, comme ici, l'effet global apparaît comme une moyenne d'effets conditionnels.

Exemples numériques: l'effet de B_2 pour le niveau d'analyse $a_1 * C_2 * s_1$ (cf. fig. 1a) a pour valeur : $342 - 372 = -30$. De même, l'effet de B_2 pour le niveau d'analyse $a_2 * C_2 * s_1$ a pour valeur $368 - 401 = -32$ (après arrondi). Quant à l'effet de B_2 pour le niveau d'analyse $A * C_2 * s_1$, il met en jeu un moyennage sur A, donc, a priori, on devra préciser le mode de moyennage utilisé ; les résultats sont les suivants :

- selon le moyennage équipondéré sur A : $355 - 386$, soit -31 ;
- selon le moyennage pondéré sur A : $349 - 379$, soit encore -31 (valeurs arrondies).

[Dans le cas présent, le mode de dérivation, qui affectait les valeurs elles-mêmes du protocole $B_2 / A * C * s_1$, n'affecte donc pratiquement pas l'effet calculé à partir de ces valeurs (*) ; ce qui est une constatation encourageante !].

Croisement de deux facteurs à 2 niveaux : effets intra et effet d'interaction

Nous introduisons maintenant, dans le cas particulier du croisement de 2 facteurs à 2 niveaux : $A_2 * B_2$, les notions d'effet intra et d'effet d'interaction.

1) Effet intra

En fait la notion d'effet (intra) d'un facteur (disons B) à l'intérieur d'une modalité (disons a_1) de l'autre facteur coïncide avec la notion d'effet conditionnel de ce facteur (B) pour cette modalité (a_1) de l'autre facteur. (Les deux notions ne se distingueront que lorsqu'on définira les effets intra et conditionnel relatifs à une partie comportant plusieurs modalités : cf. chapitre 6). Ainsi, l'effet de B à l'intérieur de la modalité a_1 pour le niveau d'analyse $C * s_1$, peut être écrit, à l'aide du symbole des parenthèses "()" EFF.OBS. $B(a_1) / C * s_1$. Cet effet coïncide avec l'effet de B restreint à la modalité a_1 , et également moyenné sur C et restreint à s_1 , qui s'écrit :

$$\text{EFF.OBS } B/a_1 * C * s_1$$

2) Effet d'interaction

Reprenons le croisement $A_2 * B_2$. Pour l'un des facteurs (disons B), on

(*) Comme on pourra le vérifier, ce "phénomène" se produira, dans un plan $A_2 * B_2$, notamment chaque fois que, comme ici, le plan est orthogonal (effectifs proportionnels) et que les deux effets conditionnels sont voisins (c'est-à-dire l'effet d'interaction proche du zéro).

peut définir un effet de ce facteur à l'intérieur de chacune des modalités de l'autre facteur, donc ici les effets intra B(a1) et B(a2). Lorsque chacun des 2 facteurs est à 2 niveaux, on définira l'effet d'interaction comme la différence (orientée) de ces deux effets intra. Par exemple, l'effet d'interaction entre A₂ et B₂, pour le niveau d'analyse C*s1, sera défini comme la différence des deux effets intra B(a1)/C*s1 et B(a2)/C*s1. La notation générale pour désigner l'interaction étant le symbole point ".", nous écrirons donc ici :

$$\text{EFF.OBS } A_2 \cdot B_2 / C*s1$$

(numériquement : cet effet a ici pour valeur : -30 - (-32) = +3 (après arrondi)).

Avec les notations introduites plus haut pour un protocole A₂*B₂, l'effet d'interaction entre 2 facteurs, chacun à 2 niveaux, sera donc défini comme (x¹¹ - x¹²) - (x²¹ - x²²) = (x¹¹ - x²¹) - (x¹² - x²²) ; la notion d'interaction est symétrique, et les deux écritures A.B et B.A seront donc synonymes (propriété qui restera vraie pour la notion générale d'interaction).

Sur les graphiques, l'effet d'interaction correspond à l'écart au parallélisme des deux segments relatifs à b1 et à b2 (donc + 3 pour le protocole A₂*B₂/C*s1). On trouverait de même, pour le protocole A₂*B₂/C₂*S (figure 1c), un effet d'interaction égal à -7, etc.

Remarque : A partir du facteur A₂*B₂ = {a1b1, a2b1, a2b2}, on peut définir, par regroupement des modalités a1b1 et a2b2, d'une part, et des modalités a2b1 et a1b2, d'autre part, le nouveau facteur à deux niveaux {a1b1 a2b2, a2b1 a1b2} ; et l'effet de ce nouveau facteur pourra être défini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit comme } \frac{x^{11} + x^{22}}{2} - \frac{x^{21} + x^{12}}{2} \quad (\text{définition équilibrée}) ; \\ \text{soit comme } \frac{v_{11}x^{11} + v_{22}x^{22}}{v_{11} + v_{22}} - \frac{v_{21}x^{21} + v_{12}x^{12}}{v_{21} + v_{12}} \quad (\text{définition pondérée}). \end{array} \right.$$

Ainsi, l'effet d'interaction entre A₂ et B₂ coïncide avec le double de l'effet de ce nouveau facteur défini selon la définition équilibrée.

VERS LA NOTION D'ANALYSE LOCALE

Les effets observés que nous avons définis (en nous plaçant dans des situations très simples) fournissent des exemples de procédures applicables à des protocoles dérivés d'un plan quasi-complet. Lorsque on envisagera des critères d'évaluation plus complexes (*), l'opérationnalisation de la notion d'effet pourra conduire à des procédures elles aussi plus complexes, allant souvent au-delà du calcul d'une seule statistique numérique. Nous dirons, dans ce contexte élargi, que la mise en oeuvre d'une procédure (sur le protocole dérivé) constitue une analyse locale (du protocole primitif). La donnée d'une formule de protocole dérivé et de la spécification de la procédure à appliquer sera appelée une demande d'analyse locale.

Le terme d'analyse "locale" ne devra donc pas prêter à malentendu, en suggérant une analyse qui porterait nécessairement sur une partie stricte du protocole, mais plutôt évoquer l'idée que les données sont condensées "d'un point de vue particulier" (par exemple, celui de l'interaction entre A et B, à un niveau d'analyse spécifié).

Les notions d'effet et l'analyse locale, que nous introduisons ici d'une façon très intuitive, pourront être formalisées :

- tout d'abord, au niveau des structures linéaires (cf. chapitre 6 et Réf. 1976b) : l'examen des données "selon un point de vue particulier" correspondra à une projection du vecteur des observations sur un sous-espace (la notion d'analyse générale de son côté, correspondant à celle de décomposition d'un espace vectoriel en sous-espaces orthogonaux) ;

- ensuite au niveau de la statistique bayésienne (cf. Réf. 1977d)

Analyses locales et analyse générale liée à un facteur composé.

La notion qu'il conviendra d'opposer à celle d'analyse locale sera celle d'analyse générale liée à un facteur composé ; une analyse générale est constituée de plusieurs analyses locales visant à examiner les données selon plusieurs points de vue, à la fois "complémentaires" et "aussi peu redondants" que possible. Comme exemples, nous donnerons les décompositions des effets liés au croisement de 2 facteurs $A \times B$. (On pourra se placer dans le cas de facteurs à seulement 2 modalités, mais les notions et notations qui suivent

(*) V. par exemple (quitte à anticiper quelque peu) les résultats présentés dans le tableau III).

se généralisent à des facteurs croisés à un nombre quelconque de modalités).

Le croisement A*B permet de définir des effets de divers types : effets globaux (ou moyens), effets conditionnels, effet d'interaction ; une analyse générale du croisement A*B sera définie par l'une des décompositions suivantes :

- | | | |
|--|---|---------------------------------|
| 1) effet global de A : A/B | } | (décomposition symétrique) |
| effet global de B : B/A | | |
| effet d'interaction : A.B | | |
| 2) effets conditionnels A/b, ou intra A(b)
(b parcourant B) et l'effet global B/A | } | (décompositions dissymétriques) |
| 2') (en permutant les rôles de A et B) | | |

La décomposition 1) sera appelée décomposition canonique des effets liés au croisement A*B. Méthodologiquement, cette décomposition sera privilégiée si (et seulement si) les deux facteurs A et B jouent vis-à-vis des objectifs de l'expérience des rôles symétriques ; mais, lorsque vis-à-vis de ces objectifs, les facteurs sont hiérarchisés, le facteur A jouant le rôle de facteur principal, et le facteur B étant subordonné, c'est la décomposition 2) qui sera préférée aux autres.

Comme nous l'avons dit, la notion d'effet conditionnel A/b coïncide avec celle d'effet intra-modalité A(b). Quant à la notion générale d'effet A intra B, on pourra, pour l'introduire intuitivement, considérer la famille des effets intra-b, c'est-à-dire ici : $\begin{cases} A(b1) \\ A(b2) \end{cases}$

On voit alors que les décompositions 1) et 2) peuvent être obtenues à partir de la première décomposition suivante des effets liés à A*B :

$$\begin{cases} A(B) : \text{effet de A intra-B} \\ B/A : \text{effet global de B,} \end{cases}$$

en redécomposant A(B) de deux manières :

- 1°) $\begin{cases} A/B \\ A.B \end{cases}$, d'où la décomposition 1) ;
- 2°) $\begin{cases} A/b1 \\ A/b2 \end{cases}$, d'où la décomposition 2).

Décomposition canonique des effets liés à un croisement, à un facteur quasi-complet

La décomposition 1) ci-dessus s'étendra immédiatement au croisement de plusieurs facteurs ; par exemple, on aura, pour le croisement $A*B*C$ de 3 facteurs :

- les 3 effets globaux : $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ (ou } A/B \text{ ou } A/C, \text{ ou } A/B+C) \\ B \text{ (ou } B/A \text{ etc.)} \\ C \text{ (ou } C/A \text{ etc.)} \end{array} \right.$

- les 3 effets d'interaction "binaires" (entre facteurs 2 à 2) appelés encore effets d'interaction "simples" (car un seul symbole ".") :

$\left\{ \begin{array}{l} A.B \text{ (ou } A.B/C) \\ A.C \text{ (ou } A.C/B) \\ B.C \text{ (ou } B.C/A) \end{array} \right.$

- l'interaction "ternaire" (entre 3 facteurs) appelés encore "double" (car 2 symboles ".") : $A.B.C$.

Une telle décomposition sera appelée décomposition canonique des effets liés au croisement. Plus généralement, à tout facteur quasi-complet on peut associer une décomposition canonique des effets liés à ce facteur. Cette décomposition des effets, bien entendu, est étroitement apparentée à la décomposition canonique de la formule de facteur quasi-complet mentionnée au chapitre III ; (un algorithme, dû à V. Duquenne, permet d'obtenir l'une et l'autre) ; lorsque le contexte ne permettra pas d'ambiguïté, on pourra parler simplement de décomposition canonique du facteur quasi-complet.

{ [Dans les programmes VAR3 et VAR4, la décomposition canonique d'un sous-facteur du plan déclaré pourra être engendrée par une demande unique d'analyse générale ; on trouvera dans la sortie n° 2 de l'Annexe un exemple de décomposition canonique du croisement de 3 facteurs. Cependant, d'un point de vue méthodologique, la décomposition canonique sera loin d'être toujours privilégiée].

A titre d'illustration, nous reprendrons les exemples de facteurs quasi-complets dont nous avons donné (à la fin du chapitre III) la décomposition canonique en sous-formules ; et nous donnerons maintenant pour chacun d'eux, la décomposition canonique des effets.

Formule	Décomposition canonique des effets
$E\langle F \rangle$	$F ; E(F).$
$R\langle E\langle F \rangle \rangle$	$F ; E(F) ; R(E\langle F \rangle).$
$A * B$	$A ; B ; A.B .$
$E\langle F \rangle * D$	$F ; D ; F.D ; E(F) ; E(F).D .$
$R\langle E\langle F \rangle * D \rangle$	$F ; D ; F.D ; E(F) ; E(F).D ; R(E\langle F \rangle * D).$
$R\langle E\langle F \rangle * D \rangle * A$	$F ; D ; F.D ; E(F) ; E(F).D ; R(E\langle F \rangle * D) ;$ $A ; F.A ; D.A ; F.D.A ; E(F).A, E(F).D.A ;$ $R(E\langle F \rangle * D).A$

N.B. (1) On remarquera les rôles distincts que jouent, dans les formules précédentes, les chevrons " $\langle \rangle$ " et les parenthèses (\cdot).

(2) Au lieu du symbole des parenthèses on aurait pu, pour désigner l'effet intra, choisir un autre symbole (tel que " $\subset \supset$ "), le choix du symbole des parenthèses est possible ici précisément parce que l'écriture des formules ne nécessite aucun "vrai" symbole parenthétique, dont la seule valeur serait celle de séparateur (lorsque, dans ce texte, nous avons eu besoin, pour des raisons essentiellement didactiques, d'un tel symbole, nous avons utilisé les crochets $[\]$).

NOUVEL ELARGISSEMENT DE L'USAGE DES FORMULES : EXPRIMER DES "QUESTIONS"

A POSER AUX DONNEES

Jusqu'à présent, nous en sommes toujours restés au cadre restrictif (précisé par le point 1), p. 43, d'un plan quasi-complet posé au départ, avec des formules qui désignent des protocoles dérivés de ce plan. Mais par delà (*) ce cadre restrictif, on pourrait songer à conférer une plus large autonomie à l'emploi des formules, notamment à utiliser une formule pour exprimer une "question" que l'on souhaite poser aux données, sans chercher nécessairement à spécifier complètement ni le protocole dérivé, ni même le protocole primitif. Ainsi, envisageons les questions suivantes, formulées de façon verbale;

- "examiner l'effet du facteur B moyenné sur l'ensemble des sessions C"
- "examiner l'effet du facteur B restreint à la session c1".

Ces questions pourraient être exprimées par les formules respectives : B/C et B/c1 ; ces formules n'étant considérées, au moins dans un premier temps, que comme de simples "traductions" des formulations verbales.

De même, la question :

- "examiner l'interaction entre les facteurs A et B, moyennée sur l'ensemble des sessions C"

pourrait être exprimée par la formule : A.B/C, etc.

Mais dans un deuxième temps, pour tout protocole décrit par un plan (quasi-complet) tel que la formule de la question soit une formule en langage engendré par ce plan (exemples de tels plans : $S*A*B*C$, $R<A*B*C>/s1$), la formule pourrait caractériser un protocole dérivé de ce protocole.

Dans ce cadre élargi, il deviendra utile de distinguer les cas où une formule exprimant une question est relative à un protocole spécifié ; nous parlerons alors de formule d'interrogation. A titre d'illustration, on a représenté dans le tableau III deux questions (lignes du tableau), lesquelles appliquées d'une part au protocole de groupe fondamental, d'autre part au protocole individuel fondamental du sujet n° 1 (colonnes du tableau), conduisent aux formules d'interrogation écrites dans les cases du tableau.

(*) et également, au cours de la démarche, antérieurement à l'analyse des données, c'est-à-dire au moment de la planification de l'expérience, où on pourra poser des relations entre facteurs sans un plan fixé au départ.

Malgré tout l'intérêt que pourrait présenter l'élargissement notionnel que nous venons d'évoquer, nous nous en tiendrons, dans le présent texte, au cadre restrictif indiqué plus haut. Ce cadre correspond à celui des programmes-machine, dans lesquels l'utilisateur doit fournir un "plan d'analyse déclaré" par lui, les demandes d'analyse effectuées ensuite portant sur des protocoles dérivés de ce plan déclaré. Cependant, afin de suggérer la possibilité d'un cadre élargi, nous tendrons à privilégier, dans l'écriture d'une formule, la notation pleine, laquelle dans le cadre élargi, présenterait, par rapport à la notation par défaut, l'avantage de mieux cerner les protocoles pour lesquels cette formule désignerait un protocole dérivé : par exemple, l'écriture A.B/C (avec la notation pleine pour C) ne saurait être applicable qu'à des protocoles qui admettent C comme facteur (tels que $R < s_1 * A * B * C >$, ou $S * A * B * C$, etc.), et exclura donc des protocoles ayant déjà fait l'objet d'une restriction sur C (tels que $S * A * B / c_1$, etc.) ; alors que l'interprétation d'une notation par défaut (telle que A.B) exige manifestement que soit spécifié le protocole à partir duquel on dérive.

DE L'EXPLORATION DES DONNEES AUX ANALYSES FINES

Si l'on procède à l'exploration des protocoles individuels des données "H & B", on constate que les effets individuels sont tantôt positifs, tantôt négatifs, leurs valeurs absolues s'échelonnant entre 3 (sujet s1) et 35 (sujet s12). L'effet moyen très faible (- 7 ms) calculé à partir du protocole de groupe (figure 1c) résulte donc d'une "compensation". En fait, chacun des effets individuels est déjà lui-même un effet moyen (obtenu par dérivation sur le facteur Répétitions).

[Numériquement : pour le sujet n° 1, l'écart-type-corrigé (*) des effets d'interaction, à l'intérieur des 8 conditions, est de l'ordre de 65, la moyenne des 12 écarts-types-corrigés intra-individuels étant de l'ordre de 75].

A la variabilité intra-individuelle se superpose, pour les effets calculés à partir du protocole de groupe, la variabilité interindividuelle. Numériquement : l'écart-type corrigé des effets d'interaction individuels est

(*) Pour une famille $(x_i)_{i \in I}$ de n observations numériques, de moyenne $m = \frac{\sum x_i}{n}$, nous appelons variance-corrigée la statistique $s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1}$ ("corrignée", par rapport à la variance "vraie" $\frac{\sum (x_i - m)^2}{n}$, pour tenir compte des degrés de liberté : n-1 au lieu de n) et l'écart-type corrigé sa racine-carrée s.

ici de l'ordre de 20.

Une telle situation peut être considérée comme tout à fait représentative de nombreuses recherches expérimentales actuelles (du moins dans le domaine de la psychologie) : l'expérimentaliste se pose des "questions fines" qui l'amènent à recourir à des "analyses fines", lesquelles iront plus loin que les examens à vue d'effets moyens, en faisant entrer en compte les diverses variabilités. Parmi les "questions fines" les plus courantes, on mentionnera : l'examen d'un schéma additif (ou ce qui revient au même, l'examen d'une interaction) comme dans l'expérience analysée ici ; l'examen d'un schéma de régression, etc.

Sans que l'opposition avec la phase d'exploration des données ait rien d'absolu, nous dirons que dans la phase des "analyses fines" :

- les interrogations seront en nombre limité, directement liées aux objectifs de la recherche ;
- les critères d'évaluation renverront à un cadre susceptible de conduire à des conclusions précises de caractère inductif, au moyen de procédures inférentielles : ce cadre comportera au moins un modèle d'échantillonnage. Quant au choix des niveaux d'analyse, il deviendra tout à fait crucial, au moins autant que celui des critères d'évaluation. En règle générale, une interrogation à un niveau d'analyse "grossier" ne permettra que de cerner d'assez loin la "véritable interrogation" que l'on souhaite poser aux données (par exemple, ici : les interrogations au niveau du groupe). Mais à l'opposé, des interrogations posées à un niveau trop "fin" risqueront d'entraîner une "incapacité à conclure" de la part des procédures statistiques, faute d'une précision expérimentale suffisante (par exemple : les interrogations individuelles).

Dans ce texte, la phase des "analyses fines" des données expérimentales consistera essentiellement en un ensemble planifié d'analyses locales approfondies (généralement inférentielles).

Cet accent que nous mettons ici sur les analyses locales, aussi bien lors de la phase des analyses fines que lors de la phase d'exploration, vise à satisfaire une exigence primordiale déjà évoquée à plusieurs reprises : permettre à l'expérimentaliste d'interroger ses données d'une façon aussi efficace et précise que possible, dans les seules limites du plan utilisé. Dans

le prochain chapitre, nous commenterons les implications méthodologiques de cette perspective d'"analyse locale des données".

STRUCTURE STATISTIQUE D'UN PLAN

Facteur de groupe et facteur systématique

Dans les analyses effectuées sur le protocole $S \times A \times B \times C$, le facteur S jouera un rôle particulier : ses modalités (les sujets) seront toujours traitées d'une façon symétrique (cf. Réf. 1972-73) ; nous dirons que le facteur S est un facteur de groupe, les facteurs A,B,C étant, par opposition, qualifiés de facteurs systématiques. (On s'intéresse, en principe, aux modalités spécifiques de ces facteurs).

De même, pour un protocole individuel $R \langle A \times B \times C \rangle$, les modalités du facteur R à l'intérieur de chacune des combinaisons de $A \times B \times C$ seront toujours traitées de façon symétrique ; nous dirons encore que le facteur R (ou plus explicitement : le facteur $R \langle \rangle$) est un facteur de groupe.

Un plan dans lequel chaque facteur élémentaire sera caractérisé soit comme facteur de groupe, soit comme facteur systématique, sera dit muni d'une structure statistique.

(Dans les dérivations effectuées antérieurement, nous avons déjà, implicitement, tenu compte des structures statistiques précédentes : lorsque, par exemple, nous avons, à partir du protocole $S \times A \times B \times C$, moyenné sur toutes les modalités du facteur S).

Structures statistiques remarquables : $S \langle G \rangle$ (groupes séparés), $S \times T$ (groupes appareillés) et structure $S \langle G \rangle \times T$.

Parmi les structures statistiques, on distinguera les trois structures "remarquables" notées $S \langle G \rangle$, $S \times T$ et $S \langle G \rangle \times T$.

La structure $S \langle G \rangle$ est celle des groupes séparés (ou groupes indépendants) ; elle est définie par l'emboîtement d'un facteur de groupe dans un facteur systématique. Un cas typique est celui de "sujets S emboîtés dans des groupes G", (le facteur G pouvant résulter de la description des sujets au moyen soit d'un facteur de classification, soit d'un facteur décrivant l'affectation des sujets à un ensemble de conditions expérimentales, etc.) ;

d'où la notation générique $S\langle G \rangle$, qui servira à désigner cette structure. (N.B. : dans la structure $S\langle G \rangle$, c'est bien S qui est le "facteur de groupe", alors que l'ensemble des "groupes" G est un facteur systématique). Mais bien entendu, le facteur de groupe pourra être tout autre qu'un ensemble de sujets. Par exemple, dans les données "H & B", chaque protocole fondamental individuel $R\langle A*B*C \rangle$ sera considéré comme muni de la structure statistique des groupes séparés ; le facteur de groupe emboîté sera le facteur Répétitions $R\langle \rangle$, et le facteur systématique emboîtant le croisement $A*B*C$.

La structure $S*T$ est celle des groupes appareillés ; elle est définie par le croisement d'un facteur de groupe avec un facteur systématique. Un cas typique est celui de "Sujets S croisés avec des traitements T", d'où la notation générique $S*T$ pour désigner cette structure. Par exemple, le protocole fondamental $S*A*B*C$ sera muni de la structure statistique des groupes appareillés ; le facteur de groupe croisé sera le facteur Sujets S, et le facteur systématique croisé, le croisement $A*B*C$ (facteur Conditions).

La structure $S\langle G \rangle*T$ sera définie comme la combinaison des structures $S\langle G \rangle$ et $S*T$: le facteur de groupe (S) est emboîté dans un facteur systématique (G) et croisé avec un autre facteur systématique (T). On obtiendrait un exemple de cette structure, par exemple si les sujets de l'expérience "H & B" avaient été décrits au moyen d'un nouveau facteur systématique E (par exemple : facteur de classification ou ensemble de tâches préliminaires), d'où, pour le protocole fondamental, le plan $S\langle E \rangle*A*B*C$, dont la structure statistique serait de type $S\langle G \rangle*T$.

Par contre, le plan d'ensemble des "données H & B" : $R\langle S*A*B*C \rangle$, ne sera pas muni de la structure statistique $S\langle G \rangle*T$, car nous avons considéré que les facteurs S et $R\langle \rangle$ étaient tous les deux des facteurs de groupe. La structure $S\langle G \rangle*T$ (avec un seul facteur de groupe) sera néanmoins suffisante pour les traitements que nous envisagerons dans ce texte, dans la mesure où toutes les questions envisagées seront posées au niveau de protocoles dérivés relevant de la structure $S\langle G \rangle*T$: soit qu'il s'agisse de chacun des protocoles fondamentaux individuels, soit du protocole de groupe fondamental.

Remarque : les structures statistiques $S*T$ et $S\langle G \rangle*T$ constituent la formalisation des types de plans que les expérimentalistes appellent souvent "plans à mesure répétées" - qu'on peut appeler également : "plans à plusieurs observations sur la même variable".

Facteur adjoint, effet adjoint

A ce point de l'exposé, il nous faut mentionner (même si nous ne faisons que les évoquer, dans le cadre de la structure statistique $S\langle G\rangle * T$) les notions de facteur adjoint et d'effet adjoint.

Etant donné un facteur systématique d'une structure $S\langle G\rangle * T$, on appellera facteur adjoint minimal de ce facteur, le facteur composé de ce facteur avec le facteur de groupe, et facteur adjoint (en général) tout facteur admettant le facteur adjoint minimal comme sous-facteur (ces définitions s'étendent immédiatement aux facteurs-partiels).

Exemples :

- dans le plan $R\langle A * B * C \rangle$, muni de la structure statistique $S\langle G \rangle$, le facteur $A * B$ admet $R\langle A * B \rangle$ comme facteur adjoint minimal et $R\langle A * B * C \rangle$ comme facteur adjoint (maximal) ;

- dans le plan $S * A * B * C$, muni de la structure statistique $S * T$, le facteur $A * B$ admet $S * A * B$ comme facteur adjoint minimal et $S * A * B * C$ comme facteur adjoint (maximal).

La notion de facteur adjoint conduira à celle d'effet adjoint (à titre indicatif : dans la structure $S\langle G \rangle$, l'effet adjoint du facteur G sera l'effet intra $S(G)$; dans la structure $S * T$, l'effet adjoint du facteur T sera l'effet d'interaction $S.T$). Dans une analyse locale, portant sur l'examen d'un certain effet, l'effet adjoint de l'effet examiné (ou l'un des effets adjoints) pourra servir de "terme de référence" à l'effet examiné, et à ce titre intervenir dans des procédures diverses : tout d'abord, dans les analyses en termes de tests de signification, où les effets adjoints fourniront les divers dénominateurs envisageables pour les "rapports F " (cf. chapitre 5) ; mais également, dans des procédures comme les analyses fiduciaires (cf. chapitre 7).

LANGAGE D'INTERROGATION ET LANGAGE DE COMMANDE DE PROGRAMMES-MACHINE

La mise au point d'un langage utilisable comme langage d'interrogation conduit naturellement à concevoir des programmes-machine d'analyse statistique dans lesquels le langage sera utilisé comme langage de commande, c'est-à-dire dans lesquels une formule pourra servir d'entrée comme demande

d'analyse de la part de l'utilisateur, et engendrer automatiquement, de la part du programme, un certain nombre de procédures.

Dans la phase d'exploration des données, l'intérêt pratique de tels programmes apparaîtra lorsque le plan du protocole est relativement complexe et que l'expérimentaliste désire procéder à un grand nombre de dérivations, même si chacune d'elles conduit à des calculs simples.

Dans la phase des "analyses fines", l'intérêt des programmes résidera plutôt dans la complexité des analyses effectuées.

C'est dans cette perspective qu'ont été élaborés plusieurs programmes de complexité diverses, aussi bien du point de vue de la syntaxe du langage que de la nature des dérivations effectuées.

Les principaux programmes expressément conçus en vue de l'exploration des données sont ceux de V. Duquenne ; ces programmes mettent en oeuvre des versions du langage des plans quasi-complets, et engendrent les tableaux et statistiques descriptives courantes (cf. V. Duquenne, 1976).

Les programmes de la série VAR ont été conçus comme des programmes d'analyse fine (inférentielle pour VAR3) ; les derniers en date de ces programmes, VAR3 et VAR4, mettent en oeuvre le langage des comparaisons, qu'on peut regarder comme une version enrichie de ce que nous avons appelé ici un langage de plan quasi-complet (ce langage est exposé en détail dans la "brochure verte", Réf. 1976a).

Nous signalerons enfin, pour son intérêt didactique, le programme BORDAU qui met en oeuvre le langage des plans complets (comportant les deux seuls symboles "*" et "/") ; langage extrêmement élémentaire mais non trivial, d'où l'intérêt de ce programme à des fins d'initiation (la notice technique du programme BORDAU se trouve dans la Réf. 1977c).

CHAPITRE V - ANALYSE LOCALE DE DONNEES EN TERMES DE TESTS DE SIGNIFICATION :
UN EXEMPLE ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, nous procéderons à une première analyse inférentielle des "données H & B", dans la perspective d'analyse locale évoquée au chapitre précédent. Dans cette analyse, nous adopterons le critère d'évaluation (traditionnel) des tests de signification. (Nous présenterons au chapitre VII des analyses qui reprendront les mêmes questions mais selon un nouveau critère d'évaluation).

Nous supposerons donc, pour fixer les idées, que les effets sur lesquels on souhaite concentrer l'examen correspondent d'une part à la question A.B/C (avec $C = C_2$: c'est-à-dire la question principale de la recherche originale), d'autre part aux deux questions B/A*c1 et B/A*c2 (deux questions secondaires choisies ici à titre illustratif), appliquées d'une part au protocole de groupe fondamental S*A*B*C₂, d'autre part à chacun des protocoles individuels fondamentaux (du type R<A*B*C>/s1) : (cf. tableau III), d'où finalement la planification des analyses locales suivante :

- { trois analyses locales sur le protocole de groupe fondamental ;
- { trois analyses locales sur chacun des protocoles individuels fondamentaux.

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord le détail des procédures pour les interrogations relatives au protocole de groupe, puis l'ensemble des résultats.

Auparavant, nous résumerons quelques idées de base relatives à l'inférence statistique en général et aux tests de signification en particulier (ceci pour rendre le texte aussi autonome que possible ; pour les lecteurs statisticiens, il s'agira, bien sûr, de rappels).

(1) Toute procédure inférentielle fait appel à un modèle d'échantillonnage, selon lequel les observations sont regardées comme provenant de populations "parentes" ; dans l'exemple présent :

- (pour les analyses individuelles) : population d'épreuves, ou répétitions ;
- (en outre pour les analyses de groupe) : population de sujets.

Dans cette perspective, chaque effet observé est regardé en quelque sorte comme le "reflet statistique" de l'effet "parent" correspondant, défini au niveau des populations.

(2) Quant au critère des tests de signification, il consiste à examiner l'hypothèse d'absence d'effet au niveau de la population, hypothèse dite classiquement hypothèse nulle.

Dans ce but, on considère une statistique de test, dont la distribution d'échantillonnage, sous l'hypothèse nulle, coïncide avec celle d'une "variable de référence" (telle que le "t de Student" ou le "F de Snedecor" disons, dans ce qui suit immédiatement, le t de Student ; selon l'usage, nous utiliserons la même lettre, en l'occurrence t, pour la statistique de test et la variable de référence). On calcule, à partir des données, la valeur de la statistique de test ; si cette valeur est proche d'une valeur centrale de la distribution de référence, on conclut que les données sont compatibles avec l'hypothèse nulle d'absence d'effet (parent) ; si au contraire elle en est éloignée, on conclut à l'existence d'un effet (parent), ou, comme on dit encore, on rejette l'hypothèse nulle d'absence d'effet.

Les conclusions au test sont traditionnellement agrémentées de précisions quantitatives fondées sur la notion de "statistique significative au seuil α ". Désignons, toujours selon l'usage, par t_α la valeur qui n'est dépassée (en valeur absolue) que par une proportion α des valeurs de la distribution de référence (la valeur t_α est appelée la "valeur critique de la distribution du t de Student au seuil α) ; on dit que la statistique de test est "significative au seuil α " si elle est supérieure (en valeur absolue) à t_α , ce qu'on écrit : " $p < \alpha$ ", la lettre p désignant ce qu'on appelle le "seuil observé". En vue d'une conclusion de rejet, on envisage couramment comme seuils α les seuils suivants, que nous appellerons "seuils conventionnels" : 0.05, 0.01 ou 0.001 ; plus le résultat est significatif, plus la conclusion de rejet apparaîtra étayée par les données. A l'opposé, la conclusion de compatibilité est de même souvent agrémentée d'une précision indiquant que la statistique de test n'est "pas significative" (sous-entendu : aux seuils conventionnels, ou, mieux encore, à des seuils tels que 0.10, 0.20, etc.). En langue anglaise, les phrases suivantes ont le statut de formulations consacrées :

"There is $\left\{ \begin{array}{l} \text{a strong} \\ \text{some} \\ \text{no} \end{array} \right\}$ évidence of an effect : $\left\{ \begin{array}{l} p < 0.001 \\ p < 0.05 \\ p > 0.20 \end{array} \right\}$ "

Remarque : Le lecteur déjà familiarisé avec la statistique trouvera certainement très élémentaires les procédures mises en oeuvre ci-dessous ; en effet : (1) nous envisageons seulement des "effets à 1 degré de liberté",

d'où la possibilité d'utiliser la variable de référence plus simple "t de Student" au lieu du "F de Snedecor" ; (2) nous nous bornons à envisager les termes adjoints minimaux : ceux qui dans une théorie plus générale du test F (cf. Réf. 1970 et M. Waisbrot, 1977) conduisent aux rapports notés (dans les sorties du programme VAR3) F' ou F_1 . Mais ici, notre objectif principal n'est pas d'exposer des techniques mais d'illustrer une démarche d'analyse ; or, dans des situations plus complexes (plusieurs degrés de liberté, non-unicité des termes adjoints), cette démarche restera fondamentalement la même, même si la complexité accrue entraîne des points de choix nouveaux, que permettra précisément d'aborder la formalisation linéaire (cf. chapitre 6).

Analyses locales sur le protocole de groupe fondamental S*A*B*C

1) Test de signification de l'effet A.B/C (avec $C = C_2$)

La question A.B/C, appliquée au protocole de groupe fondamental, S*A*B*C, conduit à l'interrogation A.B/C*S (cf. Tableau III). L'analyse en termes de test de signification de cette interrogation comportera les étapes suivantes :

- pour chaque session, on calcule pour chaque sujet l'effet d'interaction entre les facteurs A et B, puis on prend la moyenne des effets sur les sessions. Ainsi, pour le sujet s1, les effets d'interaction sont :

pour la session c1 : $(357.7 - 388.7) - (372.0 - 406.7) = 3.7$
 pour la session c2 : $(326.3 - 347.8) - (371.2 - 394.3) = 1.5 ;$

d'où l'effet moyenné sur les deux sessions (on prend $C = C_2$) :
 $1/2 (3.7 + 1.5) = 2.6.$

Le protocole (dérivé) des effets d'interaction individuels moyennés sur les sessions est présenté dans le tableau suivant (valeurs arrondies ; rappelons que les sujets ont été numérotés selon l'ordre croissant des valeurs absolues des effets d'interaction, c'est-à-dire à partir de la considération de ce protocole dérivé).

s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	Moy.
3	6	7	9	11	-11	-22	-24	25	-29	-29	-35	-7.4

Ce protocole a pour moyenne $m = -7.4$ et pour écart-type-corrigé $s = 19.8$. Nous appellerons ce protocole : protocole dérivé pertinent pour l'interrogation A.B/C) et les statistiques m et s : statistiques pertinentes ; ce sont elles qui serviront de base à toutes les analyses inférentielles.

Comme statistique de test, on peut prendre ici $t = \frac{m}{s/\sqrt{n}}$ (avec $n-1$ d.l., n étant le nombre de sujets, ici 12) ; on trouve

$$t = \frac{-7.4}{19.8/\sqrt{12}} = -1.29. \text{ Cette valeur est non-significative (au seuil } \alpha = 0.10,$$

la valeur critique (bilatérale) t_{α} vaut 1.80, d'où $p > 0.10$) ; on conclut que les données sont compatibles avec l'hypothèse d'absence (dans la population parente des sujets) d'effet A.B/C (effet d'interaction entre les facteurs principaux A et B, moyenné sur les 2 sessions c1 et c2).

2) Test de signification de l'effet B/A*c1

La question B/A*c1, appliquée au protocole de groupe fondamental, conduit à l'interrogation B/A*c1*S ; le test de signification comportera les étapes suivantes :

(1) On se restreint au sous-protocole S*A*B/c1 (4 premières colonnes du "tableau des données" de la sortie n° 1 de l'Annexe) ;

(2) On moyenne sur le facteur A, d'où le protocole dérivé S*B/A*c1.

(N.B. : nous adoptons ici la solution du moyennage équipondéré).

Ce protocole comporte pour chaque sujet, et pour chacune des modalités b1 et b2, la valeur obtenue en moyennant les 2 temps de réaction du sujet relatifs aux 2 modalités du facteur A, pour la session c1 ; ainsi pour le sujet s1 :

$$\begin{cases} 1/2 (357.7 + 388.7) = 373.2 \\ 1/2 (372.0 + 406.7) = 389.4 \end{cases}$$

Ci-dessous, le tableau du protocole dérivé S+B/A+c1, avec en marge les valeurs des différences (lesquelles représentent, pour chaque sujet, l'effet du facteur B₂).

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	Moy.
b1	373	400	421	329	362	411	348	346	341	387	377	448	378.5
b2	389	468	467	356	403	444	374	366	381	373	448	488	413.1

Différences -16 -68 -46 -27 -41 -33 -27 -20 -39 +15 -72 -41 -34.6

Le protocole des différences constituera, pour la question B/A*c1, le protocole dérivé pertinent ; sa moyenne $m = -34.6$ et son écart-type-corrigé $s = 23.0$ seront ici les statistiques pertinentes. La statistique de test vaut ici $t = \frac{-34.6}{23.0/\sqrt{12}} = -5.22$; la valeur de $|t|$ est supérieure à la valeur critique 4.337 au seuil $\alpha = 0.001$; la différence entre les deux moyennes est donc très significative ($p < 0.001$) ; on conclut donc à l'existence (dans la population parente des sujets) d'un effet B/A*c1 (effet du facteur B moyenné sur A, pour la session c1).

3) Test de signification de l'effet B/A*c2

On trouverait de même $t = 6.54$ (11 d.l.), très significatif ($p < 0.001$) conclusion similaire.

Analyses locales par le programme VAR3

Les analyses locales précédentes, effectuées par le programme VAR3 figurent en Annexe, dans la sortie n° 2 ("analyses locales planifiées").

(1) Comme formules d'interrogation, on a utilisé $[A.B/C]$ et $[B/A*c1]$ (donc la notation par défaut pour le facteur S ; dans le programme VAR3, la notation pleine ne serait pas acceptée, parce que S est un facteur de groupe).

Par contre, on aurait pu simplement demander $[A.B]$ au lieu de $[A.B/C]$ (ce qu'on peut vérifier sur la sortie, où la formule $[A.B]$ figure plus loin dans l'"analyse standard") ; et également $[B/c1]$ au lieu de $[B/A*c1]$;

(2) Pour chaque demande, le programme calcule, dans le cas présent, 2 rapports F notés F' et F" ; le rapport F' (égal ici à 1.68) est le carré de la statistique t calculée précédemment (ce rapport est obtenu en utilisant la source adjointe minimale, et sera valide sous un modèle "local" : cf. ci-dessous, p.71 ainsi que la "brochure verte" pour des commentaires généraux sur la validité des tests F' et F")

Analyses locales pour un protocole individuel R<A*B*C>: tests de signifi-
cation des effets

Pour un protocole individuel noté ici R<A*B*C> la démarche sera analogue ; cependant, les procédures seront différentes des précédentes, puisque cette fois le facteur de groupe est emboîté au lieu d'être croisé.

Nous commenterons ici les résultats individuels du sujet s1 ; on trouvera, dans le tableau IV, les résultats pour chacun des 12 sujets en ce qui concerne l'effet A.B/C.

. Effet A.B/C : on trouve $t = 0.17$ (avec 371 d.l.), valeur proche de zéro ; les données sont donc compatibles avec l'hypothèse d'absence d'effet (dans la population parente des épreuves du sujet s1) ;

. Effets B/A*c1 et B/A*c2 : de même que pour les analyses descriptives effectuées au chapitre 4, on peut procéder à une analyse pondérée ou équipondérée. Pour l'effet B/A*c1, on trouve respectivement (définition pondérée) $t = -1.53$ et (définition équipondérée) $t = -1.42$ (avec 184 d.l. dans les deux cas), valeurs non-significatives ($p > 0.10$). Pour l'effet B/A*c2, on trouve respectivement $t = -5.04$ et $t = -4.39$ (avec 187 d.l.), valeurs fortement significatives ($p < 0.001$) : on conclura donc à l'existence d'un effet B/A*c2.

Avec le programme VAR3, on trouverait ici, pour chacun des effets B/A*c1 et B/A*c2 (et pour chacune des versions pondérée ou équipondérée); deux rapports notés F_1 et F_2 ; le rapport F_1 est le carré de la statistique t rapportée ici (l'interprétation des rapports F_1 et F_2 appellerait des commentaires similaires à ceux évoqués plus haut à propos de F' et F'').

COMMENTAIRES ET DISCUSSION (*)

L'ensemble des analyses locales que nous venons d'effectuer sur les "données H & B" (nous dirons brièvement : l'"analyse locale" de ces données) a apporté des réponses précises (moyennant le critère d'évaluation des tests de signification) à toutes les interrogations posées au début de ce chapitre ; elle pourra donc être considérée, vis-à-vis des objectifs fixés par la recherche, comme "complète" (du moins vis-à-vis du critère d'évaluation adopté).

(+) Cette partie (qui peut être omise sans inconvénient pour la lecture de la suite) suppose une certaine familiarité avec les pratiques ou théories "usuelles".

Dans ce paragraphe, nous situerons la perspective de l'"Analyse locale des données", des points de vue pratique et théorique, par rapport à ce que nous avons appelé au chapitre 1er "pratiques établies" et "théorie reçue". Pour illustrer la discussion, nous prendrons l'analyse du protocole de groupe fondamental.

Les pratiques établies conduiraient ici à procéder d'abord à l'analyse standard du protocole. Le plan a ici la structure statistique $S * T$, où le facteur T est le croisement $A * B * C$; l'analyse standard consiste à examiner, selon le critère des tests de signification, chacun des 7 effets liés à la décomposition canonique du croisement $A * B * C$ (cf. chapitre IV et Annexe, sortie n° 2).

A chacun des 7 effets, on peut associer un effet adjoint minimal, qui sera ici l'interaction entre l'effet et le facteur de groupe S . Par ailleurs, l'effet adjoint maximal, commun à tous les effets, est l'interaction entre le facteur composé $A * B * C$ et le facteur de groupe S .

L'analyse standard consiste à calculer, pour chacun des 7 effets : une somme de carrés (ou inertie), puis un carré moyen et un rapport F ; en ce qui concerne le dénominateur de ce dernier, on rencontre dans les pratiques usuelles les deux variantes suivantes :

- dans l'une, on prend le carré moyen associé à l'effet adjoint minimal correspondant à l'effet examiné, d'où le rapport que nous désignons ici par F' ;

- dans l'autre, on prend un dénominateur unique : le carré moyen associé à l'effet adjoint maximal, d'où le rapport que nous désignons ici par F'' .

Commentaires relatifs au programme VAR3

(1) Pour tout plan ayant la structure statistique $S < C > * T$ on pourra toujours effectuer l'analyse standard, et même, avec la dernière version (novembre 1977) du programme, au moyen d'une demande unique, qui engendrera automatiquement tous les termes de la décomposition canonique des effets liés au plan déclaré ;

(2) Le programme envisage plusieurs variantes pour les dénominateurs, qui dans l'exemple présent conduiront aux deux rapports F' et F'' (cf. "brochure verte") pour précisions complémentaires).

Cependant, dans la perspective de l'analyse locale des données, l'analyse standard n'apparaîtra appropriée que lorsque les termes qui figurent dans la décomposition coïncident avec les interrogations que l'expérimentaliste souhaite poser aux données.

(1) Mais fréquemment vis-à-vis de ces dernières, l'analyse standard apparaîtra insuffisante. Ainsi, dans le cas présent : l'interrogation principale : A.B/C figure bien dans l'analyse standard, mais non les interrogations secondaires B/A*c1 et B/A*c2. D'une manière générale, pour que l'on puisse envisager toutes les questions au moyen de l'analyse standard, il faudrait que ces questions soient toutes formulées à un même niveau de restriction.

Dans certains cas, il sera possible de remplacer un ensemble de questions que l'on se pose par un ensemble de questions figurant dans l'analyse standard ; par exemple, ici, remplacer :

$$\begin{Bmatrix} B/A*c1 \\ B/A*c2 \end{Bmatrix} \text{ par } \begin{Bmatrix} B/A*C \\ B.C/A \end{Bmatrix}$$

questions qui figurent dans l'analyse standard (à l'écriture près).

En effet (cf. chapitre IV), chacun des ensembles de questions précédentes constitue une décomposition de l'effet B(C)/A : effet de B intra-C moyenné sur A, c'est-à-dire ;

$$\begin{Bmatrix} B(c1)/A \\ B(c2)/A \end{Bmatrix} \text{ qui peut s'écrire } \begin{Bmatrix} B/A*c1 \\ B/A*c2 \end{Bmatrix} \text{ ou encore } \begin{Bmatrix} B/c1 \\ B/c2 \end{Bmatrix}$$

et

$$\begin{Bmatrix} B/C*A \\ B.C/A \end{Bmatrix} \text{ qui peut s'écrire } \begin{Bmatrix} B/A*C \\ B.C/A \end{Bmatrix} \text{ ou encore } \begin{Bmatrix} B \\ B.C \end{Bmatrix}$$

L'utilisateur du programme VAR3 pourra vérifier les synonymies des écritures précédentes, qui toutes constituent des demandes d'analyse admissibles par le programme (aux lettres minuscules près : cf. sorties de l'Annexe).

Dans la sortie n° 2 on a fait figurer (à la suite de l'analyse standard), la demande B(C)/A. Numériquement, on peut vérifier que l'inertie (somme des carrés) associée à B(C)/A (31293.4637) est égale :

- d'une part à la somme des deux inerties associées à B/A*c1 et B/A*c2 : 14368.9650 + 16924.4987 ;

- d'autre part, à la somme des deux inerties associées à B et B.C : 31241 + 52.2607 (cela, parce que le plan $S \times A \times B \times C$ étant équilibré vis-à-vis de B et C, la décomposition en effet global et effet d'interaction est orthogonale).

Cependant, la "substitution" précédente n'apporte pas une solution véritable au problème, car si l'ensemble des 2 questions B/A*C et B.C/A peut être regardé comme équivalent à l'ensemble des 2 questions initiales, il n'en demeure pas moins que chacune de ces deux questions initiales n'est pas envisagée dans le cadre de l'analyse standard. Encore le présent exemple est-il relativement simple, en ce sens qu'un utilisateur "chevronné" saurait sans doute "s'en tirer", en réinterprétant les résultats fournis par l'analyse standard dans les termes des questions initiales, à partir d'un raisonnement tel que le suivant : "puisque l'interaction (B.C) est non-significative, ($F' = 0.20$), c'est que les deux effets B/c1 et B/c2 doivent avoir à peu près le même degré de significativité ; et comme par ailleurs l'effet global (B) est très significatif ($F' = 47.30$) c'est qu'ils doivent être tous les deux très significatifs". Mais on voit tout le caractère approximatif, et partant mal généralisable, d'un tel raisonnement, qui atteint vite ses limites dès que le plan est tant soit peu complexe ; ainsi, la réinterprétation d'interactions doubles ou a fortiori d'ordre supérieur peut devenir à la fois très malaisée et périlleuse.

(2) L'analyse standard peut proposer, en revanche, des analyses locales superflues en ce sens qu'elles répondent à des questions que les objectifs de la recherche n'amèneraient guère à considérer. Ce dernier inconvénient pourrait, sans doute, être regardé comme mineur, si à ce moment, la "théorie reçue" ne venait pas interférer avec les pratiques. Nous développerons ce point plus loin lorsque nous aborderons le problème de la validité des méthodes inférentielles (et opposerons la notion de modèle général à celle de modèles locaux et dérivés).

(3) Les expérimentalistes, en général, sont conscients des limitations de l'analyse standard - d'où la pratique, mentionnée au chapitre I, consistant à juxtaposer, au tableau classique d'"analyse de la variance", des analyses complémentaires, qui, elles, visent expressément à répondre aux questions qui se posent effectivement. A ce point, les pratiques diffèrent selon le degré plus ou moins grand de "sophistication statistique" des utilisateurs.

Un utilisateur "peu sophistiqué" se livrera volontiers à des analyses "sauvages", c'est-à-dire effectuées sans prendre en compte la structure du plan, soit qu'il effectue de simples "comparaisons à vue" purement impressionnistes, soit (ce qui sans doute est pire parce que paré d'une garantie scientifique illusoire) qu'il utilise des procédures qui, valides pour des protocoles "élémentaires", ne le sont plus pour des protocoles complexes et peuvent alors donner lieu à des faussages incontrôlables (résultats indûment significatifs, etc.). Le prototype de ces "analyses sauvages" est la pratique des "comparaisons entre traitements deux à deux", par la méthode du "t de Student", pratique qui conduit à des résultats faussés, cela d'autant plus que le nombre de traitements est plus élevé.

Une autre pratique contestable est l'usage systématique des tests "non-paramétriques", supposés souvent (imprudemment) "libres de toute hypothèse", en réalité susceptibles de conduire également à toutes sortes de faussages.

Un utilisateur plus "sophistiqué" évitera les pièges précédents, en mettant en oeuvre des procédures inférentielles plus valides : par exemple, la méthode des comparaisons "a posteriori". En gros, procéder à une comparaison a posteriori revient à consulter, pour le même écart observé à une hypothèse nulle, de nouvelles tables beaucoup moins enclines que celles de la distribution du F à procurer des résultats significatifs ; moyennant quoi, on peut adopter la "règle" (avec toutes les implications ascétiques du terme) consistant à traiter toutes les comparaisons qui peuvent intéresser l'expérimentaliste mais qui n'entrent pas dans l'analyse standard (donc ici : $A/B \cdot c_1$ et $A/B \cdot c_2$) comme des comparaisons "a posteriori". Malheureusement, une telle règle, non seulement s'accorde aussi mal que possible avec la dynamique réelle de la démarche expérimentale, mais elle apparaît, dans nombre de situations, tout à fait arbitraire, voire incohérente (comme dans la recherche précédente, où nous avons supposé que l'examen des effets $B/A \cdot c_1$ et $B/A \cdot c_2$ avait bel et bien été envisagé "a priori"). Un tel caractère d'arbitraire apparaît inhérent à nombre de pratiques courantes, dont la mise en oeuvre provoque souvent de véritables "détournements d'intention" vis-à-vis des objectifs de la recherche expérimentale. Au lieu de fournir à l'expérimentaliste des méthodes qui l'amèneraient à concentrer son attention sur les questions à poser aux données elles-mêmes, ces pratiques renvoient constamment à des "problèmes" qui se présentent comme "orthogonaux" aux objectifs de la recherche et dont

la formulation est telle qu'il apparaît bien difficile d'y répondre, et pour cause. Par exemple : quel seuil de signification "aurait-on dû" choisir a priori pour savoir, lorsqu'on se trouve dans la situation "douteuse" d'un seuil observé p entre 0.05 et 0.10, si "on est en droit" ou non de conclure au rejet de l'hypothèse nulle ? Ou encore (toujours dans une situation douteuse) : n'aurait-on pas pu considérer que l'hypothèse "alternative" était orientée ? ("problème" dit du "choix" du test unilatéral ou bilatéral). Ou encore : quelles interactions pouvaient-elles être supposées nulles avant l'expérience ? (variante du "problème" dit du "pooling des dénominateurs"; toujours posé dans l'espoir de grappiller un point ou deux supplémentaires de "significativité". Concluons : l'expérimentaliste cherchait des procédures objectives lui permettant de "dire l'information apportée par ses données", et il est constamment renvoyé à l'analyse de ses états de conscience antérieurs au recueil de ces données ...

Problèmes de validité ; modèle d'échantillonnage général et modèles locaux.

Toute méthode inférentielle soulève le problème de ses conditions de validité, c'est-à-dire les conditions qu'il convient de poser sur le modèle pour que les conclusions inférentielles soient correctes. Dans le cas des tests de signification, les conditions de validité spécifieront les conditions que doit vérifier le modèle d'échantillonnage pour que la statistique de test soit (sous l'hypothèse nulle) distribuée selon la distribution de référence.

[Une précision avant d'entreprendre la discussion ; les conditions de validité qu'on pose généralement sont, pour des raisons de commodité sur lesquelles nous reviendrons, des conditions "suffisantes" mais (il s'en faut souvent de beaucoup) non-nécessaires ; un point crucial de la discussion consistera précisément à montrer qu'il est à la fois possible et intéressant d'affaiblir dans une large mesure ces conditions].

Reprenons par exemple la procédure exposée à propos du protocole $S \times A \times B \times C$, pour examiner la question $A.B/C$; à partir du protocole dérivé (numérique) des interactions individuelles, que nous désignerons ici par $(z_s)_s \in S$, nous avons défini la statistique de test $t = \frac{m}{s/\sqrt{v}}$. Pour que

cette statistique t soit distribuée selon la distribution de référence du t de Student, donc pour qu'elle définisse un test de signification valide, il suffit de poser le modèle d'échantillonnage suivant : les n observations numériques $(z_s)_s \in S$ sont indépendantes et proviennent d'une distribution normale (i.e. gaussienne).

Un tel modèle d'échantillonnage, posé au niveau du protocole dérivé, constitue ce que nous appellerons un modèle local. "Modèle local" s'opposera à "modèle général" (c'est-à-dire posé au niveau du protocole fondamental) de même qu'"analyse locale" s'oppose à "analyse générale".

Dans le cas présent, le modèle général serait posé au niveau du protocole $S \times A \times B \times C$, ou $S \times J$, qu'on peut regarder comme constitué de n observations J -dimensionnelles ("vectorielles") $(x^s)_s \in S$ avec $x^s = (x^{sj})_{j \in J}$, ("modèle mixte" selon la terminologie classique ; cf. Scheffé, chapitre VIII) ; et les conditions de validité seraient posées sur le modèle d'échantillonnage suivant : les n observations "vectorielles" $(x^s)_s \in S$ sont indépendantes et proviennent d'une distribution multinormale (à $/J/$ dimensions) ayant pour "vecteur" moyen $(\mu^k)_{k \in K}$. Du modèle général (posé sur le protocole $(x^s)_s \in S$, on déduirait un modèle pour le protocole dérivé $(z^s)_s \in S$: ce que nous appellerons le modèle dérivé relatif à ce protocole ; bien entendu, ce modèle dérivé coïncidera avec le modèle local posé directement plus haut.

D'une manière générale, toutes les fois que la théorie traditionnelle conduit à poser un modèle général, on aura l'implication ;

Modèle général \implies Modèle local

et le test de l'hypothèse nulle locale, valide sous le modèle local, sera donc également valide sous le modèle général.

Mais l'implication réciproque, manifestement, est fausse en général. D'où l'avantage, s'agissant d'une analyse inférentielle locale, de pouvoir spécifier les seules conditions de validité relatives au modèle local.

En règle générale, plus la question locale est simple (techniquement : moins elle comporte de degrés de liberté), moins le modèle local sera restrictif. Dans le cas d'un seul degré de liberté, la seule condition cruciale est celle de l'indépendance des observations (la condition de normalité, notamment, est très secondaire, comme l'ont amplement montré toutes les études statistiques effectuées sur le problème dit de la "robustesse des tests"). Il en résulte que le modèle local pourra se trouver admissible (et donc con-

duire à une inférence locale valide) dans des situations où le modèle général serait tout à fait inadmissible. En pareil cas, on voit que la préoccupation exclusive des conditions de validité du modèle général amènerait à jeter un doute souvent injustifié sur la validité de chacune des conclusions locales et en particulier sur celles qui correspondent aux objectifs de la recherche.

Conditions de validité des analyses inférentielles locales dans la structure

S<G>*T

Malgré l'importance pratique des structures statistiques S*T et S<G>*T, ce n'est que récemment qu'ont été établies (cf. Réf. 1970, pour la structure S*T et M. Waisbrot, 1977, pour la structure S<G>*T), les conditions minimales à poser pour que les distributions d'échantillonnage des carrés moyens qu'on peut associer à une analyse locale soient distribuées comme des khi-deux, et conduisent donc à des tests F valides. On trouvera le détail de ces conditions dans les références précédentes (et un résumé dans la "brochure verte") ; mais ce qu'il convient de souligner ici, c'est que les conditions de validité à poser sur le modèle local diffèrent selon l'analyse locale envisagée. Au contraire, les conditions de validité du modèle général impliquent la validité de toutes les analyses locales. On comprend mieux, dès lors, où est l'"avantage" d'en rester, pour les considérations de validité, au niveau du modèle général ; cet "avantage" est ni plus ni moins celui de la simplicité, qui rendra commodes aussi bien des présentations théoriques de style général et introductif, que des procédures de calcul numérique simplifiées ; ce n'est certainement pas un hasard si les premiers textes d'analyse de la variance, antérieurs à l'"ère informatique", posaient par exemple, pour la structure statistique S*T, des conditions extrêmement strictes, généralement irréalistes mais conduisant à un seul et unique dénominateur pour tous les rapports F (en l'occurrence, le rapport que nous désignons par F").

Inférence locale et exhaustivité partielle

Comme nous l'avons dit, la perspective de l'analyse générale est celle qui est presque toujours mise en avant dans les développements théoriques traditionnels ("modèle général" posé d'emblée, etc.). Cela ne signifie pas, pour autant, que l'idée d'analyse locale soit totalement absente

de ces développements. Une fois dégagée, cette idée sera facilement "reconnue comme sous-jacente à maint exposé classique ; un exemple patent est la présentation usuelle du "t de Student pour groupes appareillés", où l'on pose toujours le modèle au niveau du protocole dérivé des différences (cf. par exemple la présentation de ce test, à propos des données de Student lui-même, dans le traité classique de Cramér (*), p. 463).

D'une manière générale mais beaucoup plus difficile, ce qu'on pourrait appeler un "principe d'inférence locale" apparaîtra toujours comme pré-supposé, implicitement, chaque fois qu'une méthode d'inférence statistique est simplement envisagée comme applicable à des données. L'exemple suivant a clairement une valeur générale : supposons un sondage où on observe, sur un échantillon d'individus, les valeurs d'un ensemble K de variables (numériques pour fixer les idées), à partir desquelles on effectue des inférences diverses (estimations, tests, etc.) disons, sur les moyennes de la population parente.

Presque toujours, l'ensemble K des variables observées ne constitue qu'une partie d'un ensemble de variables "qu'on aurait pu observer". Donc nécessairement, en procédant à des inférences à partir des seules observations relatives aux variables K, on présuppose implicitement, que les conclusions ne seraient pas (ou pas trop) affectées si on disposait d'observations supplémentaires concernant des variables de l'ensemble $\mathcal{X}-K$. En d'autres termes, on présuppose que le protocole effectivement analysé, qui peut être regardé comme un sous-protocole du protocole relatif à toutes les variables de \mathcal{X} , est, vis-à-vis des paramètres relatifs à K, non seulement "pertinent" (contenant "de l'information" sur ces paramètres), mais "exhaustif" (contenant "toute l'information" sur ces paramètres). Nous dirons que lorsqu'une telle présupposition est faite, explicitement ou implicitement, on met en jeu, un "principe d'inférence locale".

A ce point de la discussion, certains pourraient trouver, du moins à première vue, que dans la plupart des situations un tel "principe" est non seulement raisonnable, mais va "presque de soi". Cependant, quelque réflexion conduira certainement à plus de prudence. Reprenons par exemple la situation précédente, et imaginons que certains paramètres relatifs à $\mathcal{X}-K$ se trouvent liés fonctionnellement à des paramètres de K ; manifestement, avec cette contrainte, le recueil d'observations supplémentaires relatives aux variables correspondantes apporterait de l'information sur les paramètres relatifs à K ;

(*) H. CRAMÉR (1961) *Mathematical methods of statistics*, Princeton, Univ. Pres.

en d'autres termes, la protocole relatif aux variables de K ne serait pas exhaustif vis-à-vis de ces paramètres, et le "principe d'inférence locale" ne serait pas applicable.

Du point de vue de l'inférence statistique, la problématique sous-jacente à l'analyse locale met clairement en jeu la notion que les statisticiens désignent sous le nom d'exhaustivité partielle (c'est-à-dire l'exhaustivité d'une statistique vis-à-vis d'un paramètre dérivé ; or, comme il est bien connu parmi les spécialistes, le cadre de l'inférence statistique "orthodoxe" se prête mal à la définition d'une "bonne notion" d'exhaustivité partielle ; il est à cet égard révélateur que ce soit seulement dans des textes de statistique bayésienne (où la formalisation de l'idée d'exhaustivité partielle est plus accessible), qu'on trouve des discussions relevant incontestablement de ce que nous appelons l'"analyse locale" (*).

Dans nos propres travaux, on peut dire que c'est la place centrale que nous avons donnée à la notion d'analyse locale qui nous a conduits, profondément, à regarder comme inéluctable, l'élargissement du cadre "orthodoxe" de l'inférence statistique (Cf. chapitre VII, et Réf. 1977d).

QUELQUES PRINCIPES METHODOLOGIQUES POUR GUIDER L'ANALYSE INFERENTIELLE DES DONNEES EXPERIMENTALES

De la longue discussion qui précède, nous retiendrons quelques principes méthodologiques concernant la phase des "analyses fines" inférentielles de l'analyse des données expérimentales.

(1) A la juxtaposition d'une analyse standard "aveugle" et d'analyses complémentaires disparates, on préférera l'examen d'un ensemble unique d'analyses locales soigneusement réfléchies, découlant directement des objectifs de la recherche effectuée : ce que nous appelons un ensemble d'analyses locales planifiées.

(2) Lorsque plusieurs procédures sont envisageables pour examiner une

(*) Cf. notamment (toujours à propos de la comparaison de deux groupes appariés) la discussion in D.V. LINDLEY (1965) : *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint*, Part 2, Inférence, Cambridge : Cambridge University Press.

question jugée essentielle, les considérations de validité (a-t-on "le droit" d'utiliser telle ou telle procédure ?) seront toujours subordonnées à celles de pertinence (a-t-on "intérêt" à utiliser telle ou telle procédure ?).

(3) Lorsque une (ou plusieurs) procédures envisageables apparaissent pertinentes, on pourra, en revanche, "jouer au plus fin" en recherchant notamment, sous quelles conditions, aussi peu restrictives que possible, ces procédures sont valides.

Il va de soi que la portée effective des principes précédents sera appréciée en tenant compte des particularités de chaque situation expérimentale ; mais en gros, on peut dire qu'un ensemble d'analyses locales pluri-nifiées se situera quelque part entre les deux cas extrêmes suivants :

- un ensemble de quelques "coups de sonde" donnés en plusieurs points précis, choisis pour leur importance toute particulière (on rejoindra ici la motivation à l'origine des "analyses complémentaires") ;

- un ensemble d'interrogations se rapprochant d'une "décomposition générale" (dans les cas où l'objectif essentiel du traitement serait plutôt de parvenir à une sorte de "tableau synoptique" des données : on rejoindra alors la motivation à l'origine de l'analyse standard). Mais bien entendu, dans ce cas, il n'y aura aucune raison a priori de privilégier la décomposition canonique, du moment que dans la planification des analyses, on peut tenir compte des éventuelles hiérarchies entre facteurs (vis-à-vis des objectifs de la recherche) pour parvenir à des résultats plus directement interprétables (cf. notamment ce qui a été dit aux chap. IV et V à propos de la décomposition d'un croisement).

Par ailleurs, dans les cas intermédiaires (les plus courants), rien n'empêchera le cas échéant d'adjoindre, aux demandes locales essentielles, d'autres demandes qui la "complèteront" de manière à reconstituer une analyse générale.

Par exemple, dans le cas des "données H & B", on pourrait envisager les analyses locales suivantes :

C
 { A/B*c1
 { A/B*c2
 { B/A*c1
 { B/A*c2
 { A.B/C
 { A.B.C

dont l'ensemble constitue une décomposition générale qui "complète" les 3 analyses locales relatives aux questions que nous avons posées comme questions essentielles.

Les considérations qui précèdent devraient, pensons-nous, éclairer un problème fréquemment soulevé par les expérimentalistes : celui du "nombre maximum" d'analyses inférentielles qu'il est recommandable d'effectuer.

[Ce problème est tout à fait général, mais il est parfois ressenti avec une certaine acuité par les utilisateurs de nos programmes, précisément parce que les possibilités offertes par ces programmes : langage de demandes et procédures d'analyse automatiques, se prêtent "trop bien" à la tentation de "facilité" consistant à "multiplier" les demandes d'analyse].

Pratiquement, disons d'abord que d'après notre propre expérience, il semble assez rare que le nombre de questions véritablement intéressantes dépasse de beaucoup, disons, celui qui correspondrait à une décomposition générale (l'un des deux "cas extrêmes" mentionnés plus haut). Or, l'idée de multiplier "sans raison" les demandes d'analyse va manifestement à l'encontre de la perspective (correctement entendue) de l'analyse locale inférentielle des données.

A fortiori, cette perspective implique qu'on ne multiplie pas les demandes d'analyse "pour de mauvaises raisons", c'est-à-dire, en clair, pour pratiquer une recherche systématique aveugle des résultats "significatifs". [Les chercheurs avertis, nous l'avons déjà signalé, savent, ne serait-ce que par expérience, que cette douteuse "pêche à la ligne" ne peut que conduire à des conclusions faussées, souvent grossièrement ; le fait-même que cette "pêche à la ligne" devienne avec les programmes de la série VAR, un "jeu d'enfant", devrait précisément, croyons-nous, mettre en alerte les chercheurs sur sa futilité].

Ce qu'il convient ici de reconnaître, c'est que le "problème des frontières entre les analyses "motivées" et les analyses "aveugles" est laissé à l'appréciation de l'utilisateur. Cependant, il ne faudrait pas voir là un point faible de la méthodologie, mais plutôt l'un des points sur lesquels celle-ci met l'utilisateur en face de ses véritables responsabilités ; alors que la "règle", mentionnée plus haut, stipulant de traiter comme "a posteriori" toute comparaison qui ne figurerait pas dans l'analyse standard ne laissait

d'où la possibilité de poser des questions précises quelle que soit par ailleurs la complexité du plan, la démarche d'interrogation restant toujours d'une grande simplicité conceptuelle. A quiconque a tenté d'analyser ou même simplement d'organiser des données tant soit peu complexes, l'intérêt, voire la nécessité pratique d'un tel langage apparaîtra clairement, même indépendamment de sa "valeur opératoire" qui ouvre la possibilité d'automatisation. En effet, il convient également de souligner les aspects sémantiques de ce langage : le rôle d'une formule, laquelle renvoie à la fois à une question (l'effet à examiner) et à une action (les dérivations à effectuer) ne se réduit pas à un simple intermédiaire de calcul (ce que sont notamment les "design matrices" des théories traditionnelles) ; et à cet égard, il est révélateur que les utilisateurs de nos programmes se comportent spontanément, vis-à-vis du langage des formules, comme vis-à-vis d'un langage "naturel" (avec les possibilités de nuances offertes par les synonymies, etc.).

Quant au privilège de la structure statistique $S\langle G\rangle * T$, il réside dans le fait que cette structure fournit d'une manière canonique, pour chaque effet défini par les facteurs systématiques, des "termes adjoints" qui pourront servir de référence pour l'évaluation de cet effet, et permettront notamment de guider les analyses inférentielles.

Du point de vue des programmes-machine, rappelons que les programmes d'exploration de données actuellement réalisés (programmes de V. Duquenne) mettent en jeu la seule structure de plan quasi-complet, et que de leur côté les programmes VAR3 et VAR4 sont fondés sur l'exploitation conjointe des deux structures privilégiées : le protocole traité doit être décrit par un plan muni de la structure statistique $S\langle G\rangle * T$, et les facteurs systématiques G et T doivent eux-mêmes, vis-à-vis des facteurs élémentaires (ce qu'on appellera les "facteurs déclarés du plan"), constituer une structure de facteur qui soit complet (équilibré).

Quelques principes généraux pour conduire à la spécification du (ou des) plans d'analyse d'un protocole.

Dans le cas général, l'expérimentaliste décrit l'ensemble de ses données à partir d'un certain nombre de facteurs élémentaires, dont la définition est plus ou moins directement issue du plan d'expérience (plan de recueil de données).

place à aucune marge d'appréciation, précisément par suite de son caractère artificiel.

Du point de vue pratique, l'expérience a montré que ce "problème de frontière" ne soulève pas, en général, de difficultés majeures. Cela dit, les problèmes de frontière sont parfois difficiles à "vivre", et certains chercheurs pourraient souhaiter la mise en place de "garde-fous" susceptibles de servir dans les cas douteux. Cependant, on peut se demander si une telle mise en place, qui risquerait d'être assez lourde, ne conduirait pas, une fois encore, à détourner l'attention sur des points somme toute secondaires, au détriment d'autres points incontestablement plus importants, comme celui (que nous aborderons au chapitre suivant) du caractère limité des conclusions permises par un résultat "significatif" ou "non-significatif".

Structures de plans privilégiées pour la mise en oeuvre des méthodes d'analyse locale.

La mise en oeuvre des procédures d'analyse locale, sur les données que nous avons traitées plus haut, a été grandement facilitée parce que les analyses ont porté sur des plans dont la structure était privilégiée à un double titre :

- du point de vue ensembliste, il s'agissait de plans quasi-complets (et même complets, pour le protocole de groupe fondamental).

- du point de vue statistique, il s'agissait de la structure $S\langle G\rangle * T$ ($S * T$ pour les analyses de groupe, $S\langle G\rangle$ pour les analyses individuelles).

[En fait, le plan de base décrivant les données d'ensemble : $R\langle S * A * B * C\rangle$, était déjà lui-même un plan quasi-complet, et on aurait donc pu procéder aux analyses descriptives, du moins à certaines d'entre elles, d'emblée à partir de ce plan. Mais ce plan n'était pas muni de la structure statistique $S\langle G\rangle * T$ (car à plus d'un facteur de groupe). C'est pourquoi, pour les analyses inférentielles, nous avons envisagé des protocoles dérivés décrits par des plans appartenant à cette structure].

A ce point de l'exposé, il sera sans doute utile de résumer les principaux avantages de ces structures privilégiées.

La structure de plan quasi-complet conduit au langage des formules,

Le facteur composé de ces facteurs élémentaires est un plan (au sens technique que nous avons donné à ce terme, c'est-à-dire qu'il fournit une description injective des données) ; ce plan, que nous appellerons le plan de base, sera le plus "signifiant" de tous les plans du protocole considéré par la suite. Mais en général, ce plan ne sera pas quasi-complet, pas plus qu'il ne sera muni de la structure $S\langle G \rangle * T$.

On pourra alors se fixer comme objectif de parvenir, en vue de l'analyse des données, à partir du plan de base, à un plan, ou à des plans, possédant les structures privilégiées, ou au moins l'une de ces structures (par exemple, pour les premiers examens à vue : au moins la structure de plan quasi-complet) : plans que nous appellerons des plans d'analyse.

Tout d'abord, on pourra se demander si le protocole d'ensemble des données ne peut pas lui-même être décrit par un plan ayant la ou les structures privilégiées. Si oui, on prendra ce plan pour plan d'analyse. Si cela n'apparaît pas possible, on pourra faire entrer en considération les principaux effets que l'on souhaite examiner et on recherchera un, ou plusieurs protocoles dérivés susceptibles d'être décrits par un plan privilégié.

Etant donnée la double propriété que l'on peut requérir d'un plan d'analyse, on voit que la recherche précédente pourra être effectuée à deux niveaux.

Dans l'exemple des "données H & B", nous nous étions placés (pour les besoins de la cause) dans un "bon cas" : le protocole d'ensemble des données peut déjà être décrit par un plan quasi-complet, à savoir $R\langle S * A * B * C \rangle$ [en l'occurrence, cette description se trouve tout à fait proche du "plan de base", qui outre les 5 facteurs précédents, ferait intervenir essentiellement des facteurs constants (à une seule modalité), certes importants pour l'interprétation, mais superflus pour le traitement ; c'est pourquoi nous avons pu dire, au prix d'une légère extension de langage (c'est-à-dire : "aux facteurs constants près") que le plan précédent était le "plan de base" de l'ensemble des données]. Nous aurions pu prendre ce plan pour procéder à de nombreuses analyses statistiques ; mais du fait que ce plan comportait plus d'un facteur de groupe, nous avons préféré rechercher tout de suite, en nous aidant des questions que nous voulions poser aux données, des protocoles dérivés de la structure $S\langle G \rangle * T$. De la sorte, nous avons été conduits à envisager le protocole de groupe fondamental et les protocoles individuels fondamentaux.

Dans le cas général, la recherche du ou des plans d'analyse pourra amener tantôt à écarter certains facteurs (ce qui renvoie, dans le cadre de la formalisation algébrique, à la théorie des facteurs "superflus" et des "plans minimaux", cf. Réf. 1977a), tantôt à dériver sur d'autres facteurs, voire à introduire également de nouveaux facteurs "auxiliaires" (comme par exemple pour les "données de Cochran & Cox", au chapitre VIII).

Nous n'avons pas, pour l'instant, cherché à systématiser dans un cadre général la démarche qui, à partir d'un plan de base et de questions à examiner, conduirait au ou aux plans d'analyse. Gagnerait-on beaucoup à une telle systématisation ? Cette question, pour nous, reste ouverte à l'heure actuelle. L'expérience a montré tout l'intérêt et le profit, parfois inattendu, que pouvait tirer l'expérimentaliste d'une démarche heuristique au cours de laquelle sont souvent progressivement explicités et précisés des objectifs, qui ne gagneraient peut-être pas nécessairement à être spécifiés d'emblée dans le cadre d'une démarche systématique.

CHAPITRE VI - INTRODUCTION A LA FORMALISATION LINEAIRE ET A LA NOTION GENERALE DE COMPARAISON

Introduction

La formalisation linéaire constitue la partie centrale de la construction théorique ; elle consiste à proposer, pour des notions introduites dans ce texte dans un cadre souvent particulier et selon une présentation intuitive, (telles que celles d'effet, d'analyse locale, etc.), des définitions formalisées, valables dans un cadre très général.

Une première tentative de formalisation linéaire avait été exposée dans la Réf. 1968 ; une présentation élargie se trouve dans la Réf. 1976b. Dans le présent chapitre, nous nous bornerons à un "aperçu théorique" suivi d'une illustration à propos des "données H & B".

Aperçu théorique sur la formalisation linéaire : l'analyse des comparaisons comme généralisation de l'analyse de la variance

Dans ce qui suit, nous désignerons par E le support d'un protocole numérique (éventuellement dérivé, et pondéré) : par exemple ("données H & B"), E pourra être $S * A * B * C$, ensemble de toutes les combinaisons des fac-

teurs apparaissant dans le plan, ou encore $A*B*C$, ensemble des combinaisons des facteurs systématiques, etc.). Nous appelons contraste sur E toute mesure sur E de masse totale égale à 0 ; l'ensemble des mesures sur E, que nous notons \mathbb{R}_E , est muni d'une structure d'espace vectoriel ; nous appelons alors comparaison sur E tout sous-espace vectoriel de contrastes sur E, et nombre de degrés de liberté de la comparaison, le rang de ce sous-espace. La pondération sur E permet de munir E d'une mesure de référence (ou mesure fondamentale), grâce à laquelle :

- on peut d'une part munir l'espace \mathbb{R}_E d'une structure euclidienne en définissant un produit scalaire entre mesures (donc en particulier entre contrastes) ; d'où sur \mathbb{R}_E une notion d'orthogonalité (entre sous-espaces de mesures, donc en particulier entre comparaisons), puis une norme et une métrique ;

- on peut d'autre part associer à chaque mesure sur E sa densité par rapport à la mesure fondamentale ; on considèrera cette densité comme un vecteur de l'espace vectoriel \mathbb{R}_E^E dual de \mathbb{R}_E ; l'application qui à chaque mesure associe sa densité apparaît alors comme l'isomorphisme de \mathbb{R}_E vers \mathbb{R}_E^E induit par le produit scalaire précédent.

Les notions précédentes ne font intervenir que le plan du protocole. Pour faire entrer en ligne de compte les données, on identifiera l'espace des protocoles numériques avec l'espace \mathbb{R}_E^E dual de l'espace \mathbb{R}_E ; inversement, une mesure sur E pourra être considérée comme une forme linéaire sur \mathbb{R}_E^E , espace des protocoles sur E.

Du fait que tout contraste sur E, vecteur de \mathbb{R}_E , peut être représenté dans \mathbb{R}_E^E par sa densité, il résulte que toute comparaison \mathcal{C} sur E (sous-espace vectoriel de \mathbb{R}_E) peut être représentée par un sous-espace de \mathbb{R}_E^E , qu'on notera également \mathcal{C}^E . Le protocole, en tant que vecteur de \mathbb{R}_E^E , peut être projeté orthogonalement sur \mathcal{C}^E ; on appellera alors somme des carrés, ou inertie associée à la comparaison (pour ce protocole) le carré de la norme de cette projection. On voit ainsi comment la notion de "comparaison" que nous venons de définir constitue une extension de celle de "source de variation" qui apparaît dans l'analyse de la variance (1), et partant, comment l'analyse des comparaisons constituera une extension de l'analyse de la variance.

Illustration de la formalisation linéaire à propos des "données H & B"

Concrètement, une comparaison correspondra à une demande d'analyse locale d'un effet. A titre d'exemple, nous prendrons, pour les "données H & B", comme support E, un facteur en correspondance bijective avec le facteur conditions $J=A*B*C$ et plus précisément $J_{12}=A_2*B_2*C_3$.

Comme protocole auquel on appliquera la formalisation, on pourra envisager aussi bien :

- le protocole (de groupe) $A_2*B_2*C_3/S$, dont les 12 observations sont

(1) Quant au terme de "source de variation", nous le réutilisons en analyse des comparaisons, mais en le spécialisant différemment.

les valeurs moyennes (moyennage sur les sujets), relatives aux 12 conditions ;

- l'un des protocoles individuels, tels que $A_2 * B_2 * C_3 / s_1$, dont les 12 observations sont les valeurs moyennes (moyennage sur les répétitions) pour le sujet s_1 , relatives aux 12 conditions.

Dans ce qui suit, $A_2 * B_2 * C_3$ désignera donc l'un quelconque de ces protocoles envisageables). On supposera d'abord que ces protocoles sont regardés comme non-pondérés (ou plus généralement, regardés comme munis d'une pondération uniforme).

Dans le tableau V, les colonnes représentent les 12 conditions, énumérées lexicographiquement comme dans le tableau I ; les lignes du tableau représentent divers contrastes sur lesquels nous allons faire quelques commentaires.

Le contraste n° 1 "oppose" les modalités b_1 et b_2 pour la session c_1 ; il engendre la comparaison à 1 d.l. correspondant à l'effet B/c_1 ("B pour c_1 "), équivalent à l'effet $B(c_1)$ ("B dans c_1 "). Cette comparaison sera également engendrée par tous les contrastes proportionnels au contraste n° 1, en particulier par le contraste n° 1', lequel a la propriété particulière d'être "normalisé" (la somme de ses coefficients positifs est égale à 1) ; appliqué au protocole $A_2 * B_2 * C_3$, le contraste n° 1 aura une valeur égale à celle que donnerait le contraste de coefficients (1, -1) appliqué au protocole dérivé (par moyennage) $B_2/A * c_1$ (on pourra le vérifier numériquement, par exemple sur le protocole $A_2 * B_2 * C_3 / S$).

De même, le contraste n° 2 opposera les modalités b_1 et b_2 , mais cette fois pour la session c_2 , et engendrera la comparaison B/c_2 (ou $B(c_2)$).

Le contraste n° 3 est obtenu à partir des contrastes n° 1 et n° 2 en faisant leur somme (les contrastes étant des vecteurs, il s'agit donc ici d'une somme de vecteurs) ; ce contraste opposera b_1 et b_2 pour l'ensemble des sessions c_1 et c_2 , et engendre la comparaison (elle aussi à 1 d.l.), notée $B/c_1 c_2$, correspondant à l'effet de B "pour" (ou : "moyenné sur") l'ensemble des sessions c_1 et c_2 . La même comparaison est engendrée par le contraste normalisé n° 3', lequel, appliqué au protocole, aura pour valeur la valeur que donnerait le contraste (1, -1) appliqué au protocole dérivé (par moyennage) $B_2/A * c_1 c_2$.

Le contraste n° 4 oppose de même a_1 et a_2 pour l'ensemble des sessions c_1 et c_2 et engendre la comparaison notée $A/c_1 c_2$.

Le contraste n° 5 est obtenu en multipliant terme à terme les contrastes n° 3 et n° 4 ; il engendrera ici la comparaison d'interaction entre les facteurs A et B, pour l'ensemble des sessions c_1 et c_2 , notée $A.B/c_1 c_2$. Cette même comparaison est engendrée par tous les contrastes proportionnels au contraste n° 5, en particulier par le contraste n° 5', lequel, appliqué au protocole, donnera la différence des différences entre les observations relatives aux 4 modalités $a_1b_1, a_2b_1, a_1b_2, a_2b_2$, après moyennage sur les 2 sessions c_1 et c_2 , c'est-à-dire la valeur que donnerait le contraste $(1, -1, -1, 1)$ appliqué au protocole dérivé $A_2 * B_2 / c_1 c_2$.

Tous les exemples précédents illustrent la notion de comparaison à 1 d.l. Une comparaison à plusieurs d.l. sera définie comme le sous-espace vectoriel engendré par plusieurs contrastes linéairement indépendants, c'est-à-dire comme une somme de comparaisons (comme une comparaison est un sous-espace vectoriel, et non pas un vecteur, une somme de comparaisons est une somme de sous-espaces vectoriels, et non pas une somme de vecteurs).

Ainsi, les contrastes n° 1 et n° 2, qui sont linéairement indépendants (et même orthogonaux) engendrent la comparaison à 2 d.l., notée $B(c_1 c_2)$, correspondant à l'effet de B à l'intérieur des sessions c_1 et c_2 ; cette comparaison sera appelée la somme (orthogonale) des 2 comparaisons $B(c_1)$ ("B à l'intérieur de c_1 ") et $B(c_2)$ ("B à l'intérieur de c_2 ") ; et on aura l'égalité suivante (où le symbole "+" est utilisé pour désigner une somme de comparaisons orthogonales) entre comparaisons : $B(c_1 c_2) = B(c_1) + B(c_2)$. Cette égalité entre comparaisons entraînera des égalités correspondantes, d'une part pour les d.l., d'autre part pour les inerties.

On remarquera que la comparaison $B(c_1 c_2)$ ("B à l'intérieur de c_1 et c_2 "), à 2 d.l., est différente de la comparaison $B/c_1 c_2$ ("B pour c_1 et c_2 ") laquelle est à 1 seul d.l. (on voit pourquoi l'équivalence entre "/" et "()" ne vaut que dans le cas où, à la droite du symbole "/" ou à l'intérieur de la parenthèse, on a une seule modalité).

Cas d'un protocole pondéré ; procédure de remontée d'un contraste.

Les contrastes que nous avons écrits ci-dessus correspondront à des demandes d'analyse "équi pondérée", ce qui rend leur interprétation intuitive.

Pour donner une idée des procédures applicables à un protocole pondéré (avec une pondération non-uniforme), nous reprendrons le protocole individuel $A_2 * B_2 * C_3 / s_1$, en supposant maintenant que l'on prend les effectifs comme pondération.

Pour les illustrations qui suivent, nous aurons besoin seulement des 8 effectifs relatifs aux 8 dernières conditions que nous reproduisons ici à partir du tableau I :

a1b1c1	a2b1c1	a1b2c1	a2b2c1	a1b1c2	a2b1c2	a1b2c2	a2b2c2
71	24	70	23	72	24	72	23

Pour construire les contrastes 1 à 4, on pourra utiliser une méthode qui prolonge directement celle suivie dans le cas d'une pondération uniforme.

Ainsi, pour opposer les modalités b1 et b2, pour la sessions c1, c'est-à-dire pour engendrer la comparaison (pondérée) B/c1, on devra maintenant, au lieu de l'un des contrastes n° 1 ou n° 1' écrits plus haut, prendre le contraste n° 1 (P) ("P" pour "pondéré") (ou, bien entendu, tout contraste proportionnel) ; de même que le contraste n° 1', le contraste n° 1 (P) est normalisé, car : $95 = 71 + 24$ et $93 = 70 + 23$.

On obtiendra de façon analogue :

- le contraste normalisé n° 2 (P) qui oppose b1 et b2 pour la session c2, et engendre la comparaison pondérée B/c2 (on aura ici : $96 = 72 + 24$, etc.).

- le contraste normalisé n° 3 (P) qui oppose b1 et b2 pour les sessions c1 et c2, et engendre la comparaison pondérée B/c1 c2. (On aura ici : $191 = 71 + 24 + 72 + 24$, etc.).

- le contraste normalisé n° 4 (P) qui engendre A/c1 c2.

Mais quand on en viendra à la recherche d'un contraste d'interaction : A.B/c1 c2, il ne sera plus possible d'utiliser la méthode du produit terme à terme (En effet, ce produit n'est même plus, en général, un contraste, et effectivement, dans le cas présent, on peut vérifier que la somme des produits

terme à terme des contrastes A/c_1 et B/c_1 c2 n'est pas nulle).

La recours à des procédures plus générales s'avère alors indispensable. Ci-dessous, nous allons illustrer, à propos de la recherche d'un contraste engendrant $A.B/c_1$ c2, la procédure générale de remontée d'un contraste (procédure qui, bien entendu, aurait pu être utilisée pour obtenir tous les contrastes écrits précédemment). L'idée générale en est la suivante : on écrit le contraste sur un support (dérivé) pour lequel on dispose d'une définition privilégiée, puis, à l'aide de la mesure-effectifs, on construit un contraste équivalent sur le support primitif.

Dans le cas présent, le support dérivé sera $A_2 * B_2 / c_1$ c2 (en correspondance bijective avec $A_2 * B_2$), et le support primitif $A_2 * B_2 * C_3$.

- sur le support dérivé, on dispose d'un contraste privilégié (dont la définition est intrinsèque, en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir les effectifs) ; on écrira les coefficients de ce contraste :

a1b1	a2b1	a1b2	a2b2
1	-1	-1	1

- on écrit ensuite les effectifs relatifs au support dérivé :

143	48	142	46
-----	----	-----	----

- on calcule ensuite la "densité du contraste" (en divisant chaque coefficient par l'effectif correspondant, toujours sur le support dérivé):

$\frac{1}{143}$	$\frac{-1}{48}$	$\frac{-1}{142}$	$\frac{1}{46}$
-----------------	-----------------	------------------	----------------

- on "remonte la densité" sur la partie du support primitif correspondant au support dérivé :

a1b1c1	a2b1c1	a1b2c1	a2b2c1	a1b1c2	a2b1c2	a1b2c2	a2b2c2
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

$\frac{1}{143}$	$\frac{-1}{48}$	$\frac{-1}{142}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{-1}{48}$	$\frac{-1}{142}$	$\frac{1}{46}$
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	------------------	----------------

- on remultiplie par les effectifs du support primitif (de manière à obtenir à nouveau un contraste) :

$\frac{71}{143}$	$\frac{-24}{48}$	$\frac{-70}{142}$	$\frac{23}{46}$	$\frac{72}{143}$	$\frac{-24}{48}$	$\frac{-72}{142}$	$\frac{23}{46}$
------------------	------------------	-------------------	-----------------	------------------	------------------	-------------------	-----------------

- Enfin, on complète par des zéros sur la partie du support primitif qui ne porte pas la comparaison recherchée (en l'occurrence, les 4 conditions a1b1c0, a1b2c0, a2b1c0, a2b2c0) d'où le contraste n° 5 (P)

reproduit dans le tableau V.

La procédure de remontée nous permettra de souligner une propriété importante de la formalisation linéaire. La supériorité de la procédure de remontée, pour définir l'interaction, par rapport à la procédure "intuitivement envisageable" du produit terme à terme, provient du fait qu'elle met en oeuvre la structure de dualité dans les espaces linéaires (ce qui s'exprime, au niveau de la procédure, par le calcul de la densité).

Manifestement, tant qu'on reste à des situations élémentaires (plans équilibrés, ou orthogonaux, etc.), le recours à cette dualité, pour fournir des critères de choix permettant de retenir les "bonnes notions" (et partant les "bonnes procédures), n'apparaîtra pas d'une évidente nécessité, car les "bonnes notions" sont alors en quelque sorte "surdéterminées" et on peut, pour les exprimer, se borner aux seules ressources du calcul matriciel, ce que font les théories traditionnelles. Mais il n'en va plus de même pour des situations plus complexes, et c'est alors qu'apparaîtra la pleine portée de la formalisation linéaire.

Langage des comparaisons (sur un plan quasi-complet).

Replacées dans le cadre général de la formalisation linéaire, les dérivations élémentaires (restriction et moyennage) apparaissent comme des dérivations linéaires particulières, associées à des comparaisons liées à la structure des facteurs du plan.

La notion générale de comparaison permettra d'enrichir le langage élémentaire des plans quasi-complets (avec les symboles "<>", "+", et "/"), en y adjoignant notamment :

- l'interaction entre 2 facteurs croisés (à un nombre de modalités quelconque) qu'on représentera par le point "." ;
- la somme (orthogonale) des comparaisons, représentée par "+" ;
- la notion de comparaison résiduelle d'une comparaison, représentée par "-" ;
- la notion générale de comparaison intra, représentée par les parenthèses "()" ;

La "brochure verte" (Réf. 1976a) pourra servir de "document de base" pour l'usage du programme VAR3 ; ce texte sera complété utilement par des textes exposant des exemples d'application des programmes à des données réelles - Cf. notamment J-M Hoc, 1975 et B. et M-P. Lecoutre, 1977.

CHAPITRE VII - PROLONGEMENTS RECENTS ET EN COURS : ANALYSE DESCRIPTIVE DES COMPARAISONS ET ANALYSE FIDUCIAIRE

Les prolongements récents et en cours, tant théoriques qu'informatiques, de l'analyse des comparaisons, se poursuivent principalement dans deux directions, dont le point de départ commun a été une remise en cause des tests de signification en tant que critère d'évaluation des effets. Il nous est en effet apparu de plus en plus clairement que, par rapport aux objectifs de nombreuses recherches expérimentales, le critère des tests de signification pouvait être parfois, dans un certain sens, "trop exigeant", et souvent, dans un autre sens, "trop peu exigeant".

Le critère des tests est parfois "trop exigeant", parce qu'il nécessite un modèle d'échantillonnage, et que dans certaines situations, la validité de ce modèle peut être sujette à caution (*) ; et pourtant, dans ces situations, des procédures simplement descriptives pourraient souvent apporter déjà des résultats dignes d'intérêt.

Mais le critère des tests est également "trop peu exigeant" lorsque, situation fréquente, la question essentielle qui se pose, à propos de l'effet examiné, est celle de l'importance de cet effet, et non pas de sa seule existence. Or, le test de signification répond à cette seule dernière question (même si c'est au niveau de la population) ; nous y reviendrons plus loin.

Analyse descriptive des comparaisons

La recherche d'un critère d'évaluation visant simplement à cerner l'importance descriptive d'un effet nous a conduits à développer l'analyse descriptive des comparaisons.

(*) même si, comme nous l'avons rappelé au chapitre 1er, les situations expérimentales dans leur ensemble apparaissent à cet égard comme relativement privilégiées.

- enfin, les comparaisons qui sont des composantes de la régression polynomiale sur un facteur F : "LIN F", "QUA F", "CUB F", etc. (comparaisons linéaire, quadratique, cubique, etc.).

Programmes VAR3 (univarié, inférentiel) et VAR4 (multidimensionnel, descriptif)

Ces programmes sont fondés sur la structure $S\langle G \rangle * T$, chacun des facteurs G et T devant lui-même être exprimé à partir des facteurs élémentaires, comme un facteur quasi-complet équilibré.

Deux modes de demandes d'analyse sont possibles avec ces programmes :

(1) Dans le mode d'entrée par demande de vecteurs, une demande d'analyse consiste dans la donnée, par l'utilisateur, d'une base de vecteurs-contrastes sur un facteur.

Ainsi, pour demander, à partir du protocole de groupe $S_{12} * A_2 * B_2 * C_3$, ou d'un protocole individuel $R\langle A_2 * B_2 * C_3 \rangle$, les analyses correspondant à l'une des comparaisons du tableau V, l'utilisateur pourra spécifier le facteur $A_2 * B_2 * C_3$ et écrire le ou les vecteurs-contrastes engendrant la comparaison.

Par exemple, en écrivant les vecteurs n° 1 et n° 2, l'utilisateur obtiendra l'analyse correspondant à la comparaison $B(c_1 c_2)$ (équipondérée) ; en écrivant (pour le protocole individuel du sujet s1) les vecteurs n° 1 (P) et n° 2 (P), il obtiendra l'analyse correspondant à $B(c_1 c_2)$ (pondérée).

- dans le mode d'entrée par formules, une demande d'analyse sera simplement une formule de comparaison ; celle-ci est interprétée par le programme qui se charge de construire lui-même la base de vecteurs-contrastes correspondante.

Ainsi, pour demander les analyses correspondant à l'une des comparaisons du tableau V, il suffira d'écrire la formule de cette comparaison (dernière colonne du tableau V).

L'extrême simplicité pratique du mode d'entrée par formules n'a pu être obtenue, on s'en doute, qu'au prix d'une élaboration considérable au niveau de la programmation, laquelle a été entièrement effectuée par M-O. Lebeaux (1).

(1) La réalisation matérielle du programme VAR3 a été rendue possible grâce à l'aide de la DGRST (ACC "Informatique et Sciences Humaines", contrats n°s 73-1672 et 75.7.0454).

Dans celle-ci, on ne retiendra, parmi les statistiques classiquement associées à un effet, que certaines d'entre elles, notamment l'inertie, et on envisagera, pour caractériser l'importance descriptive relative de l'effet examiné, des rapports d'inertie (et non plus de carrés moyens).

Mais du coup, il devient facilement accessible d'étendra la méthode d'une part à l'analyse des protocoles multidimensionnels (qui pourront être traités par le programme-machine VAR4), également à celle des distributions statistiques (distributions d'effectifs et notamment tableaux de contingence) (un programme-machine spécifique est en cours d'élaboration).

Lorsque on les applique à de telles données, l'analyse descriptive des comparaisons apparaîtra comme un intermédiaire entre les méthodes traditionnelles d'analyse des données expérimentales et celles utilisées par les "analystes de données" qui travaillent, dans la mouvance benzécriste, sur des données de simple observation. Notamment, l'introduction des "rapports d'inertie" pour évaluer l'importance d'un effet sera rapprochée des "contributions à l'inertie" d'une observation, d'un axe factoriel, etc. ; mais on gardera à l'esprit qu'en analyse des comparaisons la contribution d'un effet est définie à partir de facteurs qui appartiennent à la description du protocole, et dont le statut méthodologique est donc tout différent de celui des facteurs (ou "variables factorielles") issus d'une analyse, tels que composantes principales, facteurs obtenus après rotations, etc.

Un exemple d'application d'analyse descriptive des comparaisons sera esquissé au chapitre VIII du présent texte ; par ailleurs, dans un prochain numéro d'"Informatique et Sciences Humaines", nous nous proposons de présenter, sur des données déjà traitées par d'autres méthodes (les données de mobilité sociale de l'enquête de Glass), une illustration plus détaillée des méthodes d'analyse descriptive des comparaisons.

Remarque : Les méthodes d'analyse des comparaisons, aussi bien dans leurs développements théoriques que dans leurs aspects pratiques (programmes informatiques, notamment), ont été conçues, nous l'avons souligné, dans le contexte de l'expérimentation. Ce n'est que depuis peu que nous étudions l'adaptation de ces méthodes à l'analyse des données de simple observation, et un bilan des "transferts" les plus utiles serait à l'heure actuelle prématuré. Mais en tout état de cause, l'usage des procédures inférentielles (notamment, celles mises en oeuvre par le programme VAR3) ne devrait jamais être envisagé sans précaution hors du domaine de l'expérimentation, ou du

moins de celui de l'observation systématique, domaines dans lesquels :

(1) le plan du protocole (au sens où nous l'avons défini) est toujours un reflet du plan de recueil des données ; (2) des contraintes algébriques (de structure et d'équilibre) ont été expressément introduites dans le plan en vue d'accroître l'efficacité des méthodes d'analyse.

Analyse fiduciaire des comparaisons

L'analyse fiduciaire (ou fiducio-bayésienne) des comparaisons, consiste en des développements inférentiels, allant cette fois au-delà des tests de signification.

Le point de départ de ces travaux a été notre critique des tests de signification en général, et des tests F de l'analyse de variance en particulier, portant sur les insuffisances des conclusions permises par les tests. En effet, un test permet de se prononcer seulement sur l'existence (au niveau d'une population parente) de l'effet examiné. Cet effet sera plus ou moins bien établi selon que le résultat est plus ou moins significatif ; mais il n'implique aucune conclusion correspondante qui porterait sur l'importance (toujours au niveau de la population parente) de cet effet.

Reprenons, par exemple, les deux résultats suivants, obtenus au cours des analyses de groupe effectuées au chapitre 5 :

- pour l'effet B/A*c1, le résultat est très significatif ; il est donc bien établi que cet effet est différent de zéro (aussi petit que puisse d'ailleurs être l'écart) ; mais cela n'implique nullement la conclusion (toute autre) selon laquelle cet effet serait très différent de zéro ;

- inversement, pour l'effet A.B/C, le résultat est non-significatif, donc il n'est pas établi que l'effet est différent de zéro ; mais cela n'implique nullement la conclusion selon laquelle l'effet serait effectivement nul, ou même seulement proche de zéro.

Si l'on voulait paraphraser les formulations consacrées en langue anglaise mentionnées au chapitre V, p. 62, on pourrait dire à peu près ceci :

" { A strong / No } evidence of an effect is not evidence of { a strong / no } effect"

Or, dans l'expérience analysée ici, et qui à cet égard est tout à fait typique de bien des recherches expérimentales, on admettra difficilement que des conclusions sur l'importance des effets seraient "hors du champ" des objectifs de la recherche ; on est donc obligé de considérer que le test de signification constitue un instrument d'analyse insuffisant.

Il importe d'être bien au clair sur la portée des considérations précédentes. Elles n'excluent pas (comme nous allons le voir : au contraire) l'idée qu'on puisse éventuellement "prolonger" une conclusion d'existence d'un effet (résultat significatif) en une conclusion d'"effet notable", ou, à l'opposé, une non-conclusion d'existence (résultat non-significatif) en une conclusion d'"effet négligeable" ; ce qu'elles excluent expressément, c'est l'idée qu'un tel "prolongement" puisse être atteint à partir du test de signification.

Cette mise en garde n'a rien de bien original : tous les textes statistiques spécifient, notamment, qu'un résultat non-significatif n'est, en principe, qu'un constat d'ignorance, qu'il est souvent très risqué d'interpréter comme un résultat positivement favorable à l'hypothèse nulle.

Les utilisateurs conscients de ces mises en garde mais cependant désireux, parce que c'est l'usage, d'accompagner leurs conclusions de résultats à des tests de signification, usent souvent de formulations assez ambiguës, qui ne peuvent que dissimuler vis-à-vis des lecteurs peu vigilants, la déficience fondamentale que nous avons signalée ; mais alors, les malentendus les plus fâcheux peuvent s'ensuivre, non seulement parmi les expérimentalistes, mais aussi entre les expérimentalistes et ceux qui cherchent à tirer de leurs travaux des conclusions exploitables, et, faute d'une analyse correcte de la situation, en viendraient parfois à s'en prendre de façon injustifiée mais compréhensible à la méthode expérimentale elle-même.

Comment expliquer que pratiques aussi hasardeuses soient si répandues ? On peut avancer des raisons diverses, mais la plus profonde, certainement, tient à l'idée reçue particulièrement tenace selon laquelle le test de signification constituerait "le dernier mot" de la statistique ; cette idée, ancrée chez beaucoup d'utilisateurs, trouve un curieux écho chez certains "théoriciens" qui laissent entendre qu'après tout, malgré leurs déficiences "théoriques", les tests de signification sont sans doute "suffisants pour les besoins pratiques" (du moment que les "praticiens" les emploient !). Une idée reçue aussi pessimiste à l'égard des potentialités de l'instrument statistique, est passablement stérilisante ; on peut sans doute avancer que,

si ce n'était cette idée reçue, les expérimentalistes confrontés à des situations où apparaissent clairement les déficiences des tests exigeraient, de leurs "conseillers statistiques", des instruments d'analyse statistique leur permettant de prolonger les conclusions permises par les tests de signification, car il ne manque certes pas de théories qui, dans leur principe, sont susceptibles d'aller au-delà des tests de signification, voire de les remplacer. La difficulté en l'occurrence consiste plutôt d'abord à rechercher celles qui peuvent correspondre aux besoins les plus courants ensuite à en dériver des procédures praticables. Parmi les théories de rechange envisageables, nous avons progressivement été amenés à privilégier celles conçues dans la perspective qu'à la suite de Fisher, nous appelons "fiduciaire". Nous qualifions de fiduciaire toute procédure statistique permettant de construire, à partir des données expérimentales et du modèle d'échantillonnage, une distribution susceptible de représenter l'incertitude sur le paramètre, une fois les données recueillies, et abstraction faite, dans la mesure du possible et moyennant des conventions raisonnables, des informations ou opinions diverses étrangères à ces données.

En réalité, cette notion de "fiduciaire" est sensiblement plus large que celle de Fisher, car elle englobe notamment la conception "bayésienne objectiviste" de statisticiens tels que Jeffreys ; d'où l'appellation de "fiducio-bayésienne" que nous utilisons également (l'emploi du seul terme de "bayésien" serait trop vague, étant donnée la diversité des théories bayésiennes).

Techniquement, les méthodes fiduciaires sont extrêmement simples à mettre en oeuvre lorsque le paramètre est une combinaison linéaire (par exemple un contraste) entre moyennes parentes (comparaisons à 1 d.l.) ; l'importance pratique de ce cas particulier nous a amenés à y consacrer un article (Réf. 1975). Dans ce cas, les termes qui interviennent sont les mêmes que ceux qui interviennent dans le calcul de la statistique de test t (cf. chapitre V), à savoir d : (écart observé) et $\frac{s}{\sqrt{n}}$ (erreur expérimentale), mais ces termes sont combinés différemment.

La distribution fiduciaire est centrée sur l'écart observé d ; sa caractéristique d'échelle est donnée par $\frac{s}{\sqrt{n}}$ et sa forme est celle d'une variable t_v (t de Student à v d.l.). Il est commode de regarder cette distribution comme celle d'une variable "fiduciaire", qu'on notera δ^* , ce qui conduira à écrire : $\delta^* = d + \frac{s}{\sqrt{n}} t_v$.

La figure 2 représente les deux distributions fiduciaires relatives aux effets (de groupe) $B/A \times C_1$ et $A.B/C$ (avec $C = C_2$). A partir de ces distributions, on pourra calculer les limites fiduciaires ℓ avec une garantie donnée (dans ce qui suit, nous prendrons $\gamma = 0.90$), qui permettront d'examiner si des conclusions inférentielles en termes d'effet notable ou négligeable peuvent être atteintes.

Par exemple, pour $B_2/A \times C_1$, nous avons considéré que l'effet observé $d = -34.6$ ms était notable ; pour examiner si on peut prolonger cette conclusion descriptive en conclusion fiduciaire, avec la garantie 0.90, on recherchera la limite fiduciaire unilatérale ℓ telle que la probabilité fiduciaire que l'effet parent δ^* soit inférieur à ℓ , soit égale à 0.90.

On trouve ici : $\ell = -26$, donc on écrira : $P^*(\delta^* < -26) = 0.90$, ce qui pourra s'énoncer : "Avec la garantie fiduciaire $\gamma = 0.90$, l'effet $B/A \times C_1$ est inférieur à -26 ms". Si maintenant on considère que la valeur 26 ms correspond elle-même à un effet notable (ce qui pourra ici être regardé comme raisonnable), on aura donc pu, dans le cas présent, prolonger la description descriptive en une conclusion inférentielle d'écart notable. Sinon, le résultat conduirait à suspendre le jugement inférentiel concernant la conclusion d'écart notable, faute d'une précision expérimentale suffisante.

Pour l'effet $A.B/C$, nous avons considéré que l'effet observé $d = -7$ ms était négligeable ; on recherchera donc cette fois la limite supérieure ℓ d'un intervalle centré autour de 0 (ou limite fiduciaire absolue), telle que la probabilité fiduciaire que la valeur absolue $|\delta^*|$ soit inférieure à ℓ soit égale à 0.90. On trouve ici $\ell = 16$, ce qu'on écrira : $P^*(|\delta^*| < 16) = 0.90$. Cette fois, il apparaîtra beaucoup plus douteux que la conclusion descriptive d'effet négligeable peut être prolongée inférentiellement ; en effet, pour que ce prolongement puisse être effectué, il faudrait qu'on puisse considérer que la valeur 16 ms constitue un écart négligeable par rapport au schéma additif (absence d'interaction). Dans le cas présent, l'expérimentaliste pourra apprécier que cette valeur est trop élevée, ce qui amènera ici à suspendre le jugement inférentiel concernant l'acceptabilité du schéma additif, faute d'une précision expérimentale suffisante.

De nombreuses autres analyses fiduciaires ont été effectuées sur les "données H & B", qu'on trouvera rassemblées dans la Réf. 1977b. On a notamment effectué des analyses individuelles, dont certaines sont reproduites dans le tableau IV, qui donne, pour chaque sujet, la limite fiduciaire absolue correspondant à l'effet d'interaction individuel $A.B/C$. La méthode fidu

ciaire a permis également (moyennant des procédures plus élaborées) d'aboutir à des énoncés synthétiques du type suivant : "avec la garantie fiduciaire $\gamma = .90$, au moins 90 % des effets d'interaction individuels sont compris entre -43 et 43 ms". Nous pensons que ce genre de résultat est particulièrement bien adapté à toute une gamme de situations de psychologie expérimentale, qui portent, comme l'expérience analysée ici, sur l'investigation de mécanismes de nature essentiellement individuelle (rappelons l'arrière-plan théorique de cette expérience évoqué au chapitre II), mais pour lesquelles on ne peut se limiter à des analyses individuelles si l'on veut que les conclusions soient fondées sur une précision expérimentale suffisante (cf. nos commentaires sur les niveaux d'analyse, au chapitre IV).

D'une manière générale, après une expérience de plusieurs années (depuis 1974) d'application des méthodes fiduciaires à des données diverses, surtout expérimentales (mais pas exclusivement : cf. la Réf. 1976d pour une application à des données appartenant au domaine de l'éducation), nous tendons à considérer que ces méthodes peuvent fournir un prolongement bien utile aux méthodes inférentielles usuelles. Naturellement, la méthodologie fiduciaire est plus "exigeante" que celle des tests de signification, puisque elle requiert de l'utilisateur, pour conduire à des interprétations "exploitables", l'appréciation de ce que peut constituer un effet "notable" ou "négligeable" ; mais le gain qui est la contrepartie de cette exigence apparaît considérable, alors que la "facilité" des tests, qui ne requièrent pas une telle appréciation, n'est sans doute qu'un aspect de leur superficialité (1).

Restent les problèmes de la mise en oeuvre effective des méthodes fiduciaires, c'est-à-dire de la mise en place de procédures "de routine" (comme on dit), notamment informatiques. A ce point, il est remarquable que nos travaux antérieurs, algébriques et informatiques, sur l'analyse des comparaisons, se trouvent avoir levé d'avance une grande partie de ces difficultés. Notamment, dans le cas de comparaisons à un seul d.l., pour un plan de structure $S < G > * T$, il est immédiat de dériver la distribution fiduciaire à partir de l'effet observé d et du rapport F fourni par le programme VAR3 ; en effet, la formule $\delta^* = d + \frac{s}{\sqrt{n}} t_v$ peut être réécrite (puisque

(1) Ce point est particulièrement souligné dans l'article récent de M. REUHLIN (1977) : Epreuves d'hypothèses nulles et inférence fiduciaire de psychologie) Journal de Psychologie, n° 3, 1977, 277-292.

$$|t| = \sqrt{F} = \frac{|d|}{s/\sqrt{n}} : \delta^+ = d + \frac{d}{\sqrt{F}} t_v \quad (\text{cette importante remarque est due à}$$

B. Lecoutre, 1977). Pour certaines situations plus complexes, d'autres programmes ont été rédigés (v. notamment J-M. Hoc, 1977) ; en tout cas, la constitution d'un ensemble de programmes, visant à constituer un instrument pratique d'analyse aussi complet que possible, constitue un objectif prioritaire de nos travaux en cours.

CHAPITRE VIII - AUTRES ILLUSTRATIONS

Dans ce chapitre, nous présenterons de nouvelles illustrations de l'analyse des comparaisons, afin de donner une idée de sa diversité et du degré de généralité de ses emplois.

ANALYSE D'UN EXEMPLE DE COCHRAN ET COX (1).

Nous prendrons ce que nous appellerons les "données Cochran et Cox" (dont nous adaptons légèrement la présentation) pour illustrer un paradigme expérimental extrêmement courant : la comparaison de 2 traitements avec cont balancement des ordres.

On a effectué une expérimentation en vue de comparer l'efficacité de deux types de machines à calculer, m1 et m2 : dix opérateurs (appelés ici les sujets, s1 à s10) ont exécuté la même séquence de calculs, successivement sur chacune des deux machines m1 et m2. Les sujets s1 à s5 ont travaillé d'abord (essai e1) avec la machine m1, puis (e2) avec la machine m2 ; les sujets s6 à s10 ont travaillé dans l'ordre inverse (m2 à l'essai e1, puis m1 à l'essai e2). Les résultats (temps d'exécution du calcul, en unités conventionnelles) sont les suivants :

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10
m1	30	22	29	12	23	21	22	18	16	23
m2	14	5	17	14	8	21	13	13	7	24

Comme facteurs décrivant le protocole, nous prendrons d'abord : S (Sujets :

(1) D'après Cochran et Cox (1958) *Experimental Design* - Cross-over design, p. 113.

dix modalités, s1 à s10) ; M ou M₂ (Machines : deux modalités m1 et m2, E ou E₂ (Essais : deux modalités e1 et e2). A ce facteur nous adjoindrons, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, le facteur ordre 0 ou O₂, avec :

- o1 : machine m1 passée à l'essai e1 et machine m2 passée à l'essai e2 ;
- o2 : machine m2 passée à l'essai e1 et machine m1 passée à l'essai e2.

Questions et demandes d'analyse

La question principale ici posée aux données sera : "Examiner l'effet du facteur Machine" ; la question secondaire : "Examiner l'effet du facteur Essai". Du point de vue des objectifs de la recherche, le facteur Machine sera donc considéré comme principal, et le facteur Essai comme secondaire. Cela d'ailleurs n'implique nullement qu'on s'attende à ce que l'effet du facteur Essai soit peu important ; les deux ordres ont été contrebalancés précisément afin de parer à l'éventualité d'un effet même important du facteur Essai ; nous y reviendrons.

Les facteurs M et E sont croisés ; du point de vue des niveaux d'analyse, on sera donc conduit, en ce qui concerne le facteur secondaire Essai, à examiner seulement son effet global (moyenné sur le facteur M), noté E ou E/M.

En ce qui concerne le facteur principal Machine, on pourra adopter l'une ou l'autre des décompositions suivantes :

(1) Soit examiner l'effet du facteur M séparément pour chacun des essais, d'où les 2 analyses M/e1 et M/e2.

(2) Soit examiner :

- l'effet global du facteur M : M ou M/E ;
- l'effet d'interaction des facteurs M et E : M.E ; d'où finalement

deux systèmes d'analyses planifiées envisageables :

$$\begin{matrix}
 (A_1) & \left\{ \begin{array}{l} M/e1 \\ M/e2 \\ E \end{array} \right. & \text{et} & (A_2) & \left\{ \begin{array}{l} M \\ E \\ M.E \end{array} \right.
 \end{matrix}$$

Méthodologiquement, l'expérimentaliste donnera souvent la préférence à (A₁), surtout dans l'éventualité d'une différence importante entre les effets M/e1 et M/e2 (c'est-à-dire d'une interaction entre les facteurs M et E).

Dans ce qui suit, nous procéderons en détail aux analyses selon (\mathcal{A}_1), puis, à titre didactique, nous résumerons les analyses qu'on pourrait faire selon (\mathcal{A}_2).

Structure ensembliste

Du point de vue de la structure ensembliste : les facteurs S,M,E sont croisés 2 à 2 sans être croisés dans leur ensemble ; le plan engendré par S,M,E n'est donc pas un plan quasi-complet.

Pour se ramener à la structure de plan quasi-complet, on introduira ici un nouveau facteur : l'ordre (formellement, ce facteur jouera le rôle d'un facteur auxiliaire, ce qui n'empêche pas bien entendu que son interprétation directe soit très claire et qu'il puisse, le cas échéant, faire l'objet d'analyses pour lui-même). En effet, le facteur S est emboîté dans le facteur O (l'emboîtement $S < O >$ étant équilibré, on pourra l'écrire $S_5 < O_2 >$), et chacun des deux facteurs composés :

$$\begin{cases} S_5 < O_2 > * M_2 \\ S_5 < O_2 > * E_2 \end{cases}$$

est un plan quasi-complet pour le protocole.

(Par contre, le plan à 4 facteurs S,O,M,E n'est pas quasi-complet).

N.B. : La décomposition correspondant aux analyses (\mathcal{A}_2) est confondue avec la décomposition canonique des effets de chacun des croisements $O_2 * M_2$ et $O_2 * E_2$. En effet, pour chacun de ces croisements, l'effet global d'un facteur est confondu avec l'effet d'interaction des 2 autres, conformément au tableau suivant :

	$S < O_2 > * E_2$	$S < O_2 > * M_2$
M	O.E	M
E	E	O.M
M.E	O	O

Analyses descriptives

Le protocole dérivé $O * M_2$ obtenu par moyennage sur le facteur $S < >$ est le suivant :

	m1	m2	
o1	e1 : 23.2	e2 : 11.6	17.4
o2	e2 : 20.0	e1 : 15.6	17.6
	21.6	13.6	

En marge, les moyennes globales pour chacune des modalités de O et de M ;
à quoi nous adjoindrons les moyennes globales pour chacun des 2 essais, soit:
pour e1 : $\frac{23.2 + 15.6}{2} = 19.4$ et pour e2 : $\frac{20.0 + 11.6}{2} = 15.8$.

A partir de ces moyennes, on pourra procéder aux analyses descriptives ;
selon la planification (\mathcal{A}_1), on évaluera ainsi :

- L'effet du facteur Machine (à 2 niveaux) pour chacun des essais e1 et e2 :

$$\begin{aligned} M/e1 &: 23.2 - 15.6 = 7.6 \\ M/e2 &: 20.0 - 11.6 = 8.4 \end{aligned}$$

(pour chacun des essais, on a donc un temps plus court, c'est-à-dire une performance meilleure avec m2 qu'avec m1) ;

- L'effet global (c'est-à-dire moyenné sur le facteur M) du facteur Essai également à 2 niveaux :

$$E/M \text{ ou } E : 19.4 - 15.8 = + 3.6$$

(la performance est globalement meilleure à l'essai e2 qu'à l'essai e1).

De plus, les deux effets M/e1 et M/e2 apparaissent descriptivement proches l'un de l'autre, ce qui justifiera ici qu'on résume l'évaluation de l'effet de M à partir de la moyenne des deux, c'est-à-dire de l'effet global, M_2 (ou M_2/E), même si l'effet du facteur Essai était jugé relativement important.

Cet effet global (c'est-à-dire moyenné sur les essais) du facteur M_2 vaut ici :

$$\text{ou encore : } \left. \begin{aligned} M_2 \text{ ou } M_2/E &: 21.6 - 13.6 \\ &1/2 [7.6 + 8.4] \end{aligned} \right\} = + 8.0$$

On soulignera, à ce propos, l'intérêt du contrebalancement : si l'on s'était contenté de l'ordre o1 : on aurait seulement pu évaluer l'effet du facteur M pour o1, c'est-à-dire : $M/o1 : 23.2 - 11.6 = 11.6$ (et la supériorité de m2

sur m_1 aurait alors été surestimée, car à l'avantage "propre" de m_2 on aurait ajouté l'avantage de "passer à l'essai e_2 " : $11.6 = 8.6 + 3.6$; et si, de même, on s'était contenté de l'ordre e_2 , on aurait trouvé M/e_2 : $20.0 - 15.6 = 4.4$ (en sous-estimant cette fois la supériorité de m_2 : $4.4 = 8.6 - 3.6$). [Bien entendu, l'effet global de M : 8.0 , est égal à $1/2 [11.6 + 4.4]$].

C'est ce qu'on exprime en disant que si on avait fait passer les deux machines dans le même ordre, l'effet du facteur Machines aurait été confondu (au sens technique du terme de confusion dans la théorie des plans d'expérience) avec le facteur Essais, rendant incertaine la conclusion relative au facteur Machine.

En conclusion, on pourra résumer les analyses descriptives de la façon suivante :

- les deux effets M_2/e_1 et M_2/e_2 apparaissent proches l'un de l'autre, et l'effet moyen M/E a pour amplitude $+ 8.0$,
- l'effet global du facteur E a pour amplitude $+ 3.6$.

[Pour procéder aux analyses (\mathcal{A}_2) : on évaluerait comme plus haut l'effet global de E , puis directement l'effet global de M_2 ; enfin on évaluerait l'effet d'interaction $M_2.E_2$ (différence des 2 effets M_2/e_1 et M_2/e_2), soit $7.6 - 8.4 = -0.8$; ce dernier apparaît très faible et le résumé des analyses descriptives pourrait être le même qu'avec (\mathcal{A}_1)].

Structure statistique et analyses inférentielles

Pour procéder aux analyses inférentielles, aussi bien selon (\mathcal{A}_1) que selon (\mathcal{A}_2), on pourra partir de l'un ou l'autre des plans quasi-complets écrits plus haut, en introduisant la structure statistique consistant à considérer le facteur S comme un facteur de groupe.

Mais si l'on a choisi les analyses (\mathcal{A}_1), il sera plus simple, pour exploiter le langage des comparaisons, de partir du plan $S(O_2) * E_2$. En effet, la demande d'analyse M/e_1 (effet de M pour e_1) est équivalente à O/e_1 (effet de O pour e_1) (de même M/e_2 est équivalente à O/e_2).

Dans le cadre de ce plan, on pourra donc effectuer les analyses (\mathcal{A}_1) en examinant les comparaisons suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} O/e1 \\ O/e2 \text{ respectivement } \text{équivalentes à} \\ E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M/e1 \\ M/e2 \\ E \end{array} \right.$$

Dans l'Annexe (Données Cochran et Cox, sortie n° 2), on trouvera des extraits de sorties du programme VAR3 correspondant à ces analyses.

[Afin d'illustrer le langage des comparaisons du programme, on a fait également figurer dans la sortie beaucoup d'autres demandes d'analyses soit redondantes, soit non pertinentes dans le cas présent, mais qui pourraient être envisagées à propos de données analogues ; un commentaire sur ces sorties a été placé à la suite de celles-ci].

Les valeurs des rapports F correspondant aux comparaisons précédentes sont les suivantes (cf. sortie du programme VAR3) :

M/e1 : F = 2.93 avec 1 et 8 d.l.
M/e2 : F = 10.76 avec 1 et 8 d.l.
E : F = 3.08 avec 1 et 8 d.l.

Pour interpréter les rapports F en termes de test de signification, on recherchera (en consultant une table ou par le calcul) les valeurs critiques de la distribution F de Snedecor avec 1 et 8 d.l. ; on trouve ainsi : pour les seuils conventionnels les valeurs critiques F_{α} suivantes :

α	F_{α}
0.10	3.46
0.05	5.32
0.01	11.36

D'où les résultats : l'effet M/e1 n'est pas significatif (aux seuils conventionnels usuels ; par exemple, en désignant par p le seuil observé : $p > 0.10$) ; par contre, l'effet M/e2 est significatif au seuil $\alpha = 0.05$ ($p < 0.05$) ; enfin l'effet E n'est pas significatif ($p < .10$). Ces résultats conduiront aux conclusions suivantes :

- les données sont compatibles (aux seuils usuels) avec l'hypothèse nulle d'absence d'effet du facteur Machine pour l'essai e1 (dans la population parente des sujets) ;

- les données permettent de rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'effet du facteur Machine pour l'essai e2 ;

- les données sont compatibles avec l'hypothèse nulle d'absence d'effet du facteur Essai.

On remarque la disparité des conclusions du test pour les 2 comparaisons relatives à l'effet Machine pour les essais e1 et e2.

Cette disparité tient au fait que les carrés moyens adjoints respectifs de O/e1 et O/e2 (notée S(G)/T' dans la sortie du programme) ont des valeurs très différentes, respectivement égales à 49.25 et 16.40 ; en d'autres termes, la précision expérimentale est moins élevée pour O/e1 que pour O/e2, d'où un rapport F moins significatif.

Ce point constitue une "divergence" avec les analyses descriptives qui conduisaient à rapprocher les deux effets ; mais bien entendu, il n'y a aucune contradiction puisque les analyses descriptives et les tests de signification renvoient à des critères d'évaluation différents.

Remarques :

1) Dans le cadre des analyses (\mathcal{A}_2) : on effectuerait comme ci-dessus le test de la comparaison E ; le test de la comparaison M (globale) s'effectuerait en demandant la comparaison O.E d'où $F = 15.22$ avec 1 et 8 d.l., significatif ($p < 0.01$) ; le test de l'interaction M.E s'effectuerait en demandant la comparaison O, d'où $F = 0.02$, non-significatif (cf. la sortie de l'Annexe).

2) Dans la structure $S < G > * T$ du plan $S < O_2 > * E_2$, le facteur G est confondu avec O et le facteur T avec E ; en conséquence, l'analyse canonique de la structure $S < G > * T$ (qui dans le programme est effectuée automatiquement) conduit ici immédiatement aux résultats des analyses (\mathcal{A}_2).

3) On peut également envisager d'effectuer les analyses à partir du plan $S < O_2 > * M_2$; cf. Annexe, "données Cochran et Cox", sortie n° 1, avec les commentaires comparant les analyses effectuées selon les deux plans.

Analyses fiduciaires

On peut prolonger les analyses en termes de tests de signification par des analyses fiduciaires, en reprenant les systèmes (\mathcal{A}_1) ou (\mathcal{A}_2). Pour chacun des effets étudiés (tous à 1 d.l.), la distribution de la variable fiduciaire δ^* relative à l'effet parent δ peut s'obtenir en combinant les valeurs de l'effet observé d et du rapport F (fourni par le programme VAR3) selon la formule écrite au chapitre VII).

Ainsi pour l'effet M_2/e_1 on aura :

$$\begin{aligned}\delta^* &= 7.6 + \frac{7.6}{\sqrt{2.93}} t_{[8]} \\ &= 7.6 + 4.44 t_{[8]}\end{aligned}$$

On trouvera de même pour l'effet M_2/e_2 :

$$\delta^* = 8.4 + 2.56 t_{[8]}$$

et pour l'effet E_2 :

$$\delta^* = 3.6 + 2.05 t_{[8]}$$

et de même pour l'effet global M_2 (ou M_2/E) :

$$\delta^* = 8.0 + 2.05 t_{[8]}$$

et enfin pour M.E :

$$\delta^* = -0.8 + 5.97 t_{[8]}$$

Ces distributions fiduciaires, qui pourront être représentées par des graphiques (comme les distributions présentées au chapitre précédent) permettront la recherche de conclusions inférentielles en termes d'écart notable ou négligeable (soit par un algorithme utilisable pour le calcul à la main, cf. Réf. 1975 p. 214 et 215 ; soit par un programme-machine, cf. Hoc, 1977).

On trouvera ainsi :

1) Recherche d'une conclusion d'écart notable pour les effets de M :

$$\begin{aligned}\text{pour } M_2/e_1 &: P^*(\delta^* > 1.4) = 0.90 \\ \text{pour } M_2/e_2 &: P^*(\delta^* > 4.8) = 0.90 \\ \text{pour } M_2/E &: P^*(\delta^* > 5.1) = 0.90\end{aligned}$$

(On remarque que la limite fiduciaire est plus élevée pour l'effet global M_2/E que pour M/e_2 , alors que les effets observés s'ordonnent dans le sens contraire ; ce résultat est dû à l'accroissement de la précision expérimentale quand on passe des effets conditionnels à l'effet global).

2) Recherche d'une conclusion d'écart négligeable pour l'effet de E :

$$P^*(|\delta^*| < 6.5) = 0.90.$$

Ces résultats appellent notamment les commentaires suivants : une conclusion fiduciaire d'écart notable pour l'effet global de M ne sera atteinte (avec la garantie $\gamma = 0.90$), que si un écart valant 5.1 est jugé notable ;

mais par ailleurs, une conclusion fiduciaire d'écart négligeable pour l'effet de E ne sera atteinte (avec la même garantie) que si un écart valant 6.5 est jugé négligeable. Avec la garantie $\gamma = 0.90$, on ne pourrait donc pas, dans le cas présent, atteindre simultanément les deux conclusions d'écart notable pour l'effet (global) des Machines et d'écart négligeable pour l'effet (global) du facteur Essai.

UN EXEMPLE D'ANALYSE DE DONNEES MULTIDIMENSIONNELLES

Nous présentons cet exemple parce qu'il porte sur des données de nature intermédiaire entre les données expérimentales et les données d'observation, et peut servir d'introduction à une utilisation combinée de diverses méthodes, notamment les méthodes fiduciaires et les procédures multidimensionnelles mises en oeuvre par le programme VAR4.

Dans la recherche rapportée dans la Réf. 1976d, nous avons réanalysé avec certaines de nos méthodes, en collaboration avec la spécialiste de psychologie différentielle qui avait procédé aux premières analyses, les données d'une enquête qui avait été effectuée par l'Institut National d'Orientation Pédagogique sur des élèves du CM 2 ; ces élèves avaient été divisés en 4 groupes en croisant les deux facteurs suivants, chacun à deux modalités :

- . Facteur Pédagogie (des mathématiques) : enseignement $\left\{ \begin{array}{l} \text{"traditionnel"} \\ \text{"moderne"} \end{array} \right.$;
- . Facteur Milieu (familial) $\left\{ \begin{array}{l} \text{"favorisé"} \\ \text{"défavorisé"} \end{array} \right.$

A partir de ces 2 facteurs, on peut définir 3 effets correspondant à chacun des 2 effets globaux des facteurs précédents, et à leur interaction. Les variables dépendantes examinées étaient des tests de développement intellectuel et de connaissance : 9 variables en tout (certains tests étant passés deux fois). On a d'abord examiné, pour chacune des 9 variables, l'effet des 3 sources de variation par les méthodes fiduciaires. On peut résumer l'ensemble des conclusions sous forme d'un tableau présentant, pour chacune des variables et pour chacune des 3 sources de variation, celles des conclusions fiduciaires (effet notable, ou effet négligeable) qui ont pu être atteintes avec la garantie $\gamma = 0.90$. Par exemple, pour la variable "test de combinatoire, deuxième passation", on a le résultat suivant, pour l'effet du facteur "Pédagogie" :

$$P^*(\delta^* > 0.58 s) = 0.90$$

ce qui s'interprète de la façon suivante : δ désigne la différence (dans la population) des 2 moyennes relatives aux modalités enseignement moderne et enseignement traditionnel ; c'est donc le paramètre sur lequel porte l'inférence : effet de la pédagogie ; s désigne l'écart-type observé intra-groupes. (Dans le cas présent, les effectifs des groupes étant suffisamment élevés, on peut considérer que s est une bonne estimation de l'écart-type de la population). L'énoncé précédent exprime qu'avec la garantie fiduciaire 0.90, on peut dire que l'effet δ est supérieur à 0.58 écarts-types, ou si l'on préfère, que $\zeta = \frac{\delta}{s}$ (effet "standardisé") est supérieur à 0.58.

Dans la mesure où une différence de moyennes supérieure au tiers de l'écart-type de référence intra sera généralement considérée comme notable d'un point de vue de psychologie différentielle, on pourra donc interpréter l'énoncé précédent comme une conclusion d'effet notable du facteur Pédagogie sur la variable examinée (le test de combinatoire) et conclure que l'enseignement "moderne" favorise apparemment la réussite à des épreuves de type combinatoire.

On peut également, avec des procédures multidimensionnelles telles que celles mises en oeuvre dans le programme VAR4, examiner les effets associés à des comparaisons portant sur plusieurs variables dépendantes prise à la fois.

Par exemple, pour chaque source de variation, on peut construire, à partir des effets individuels associés à chacune des 9 variables, un indice combinant l'effet des 9 variables et rechercher une conclusion fiduciaire globale pour cet indice. Si les variables étaient non-corrélées, on pourrait prendre comme indice global la moyenne quadratique des 9 effets, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{1}{9} \sum_{p=1}^9 \zeta_p^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{9} \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\delta_p}{s_p} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Mais comme les variables sont corrélées, on pourra envisager, par exemple, l'indice suivant fondé sur la distance de Mahalanobis :

$$\zeta = \left(\frac{1}{9} \delta' S^{-1} \delta \right)^{1/2}, \text{ où } \delta \text{ représente le vecteur-colonne des 9 effets } \delta_p \text{ (et } \delta'$$

le vecteur-ligne transposé) et S la matrice des variances et covariances observée intra-groupes.

Un calcul qui nécessite d'une part, une inversion de matrice, d'autre part, une intégration numérique, mais qui ne soulève pas de difficulté conceptuelle nouvelle, par rapport à ceux rapportés plus haut pour chaque variable, conduit aux résultats suivants pour les 3 effets globaux :

$$\text{Pédagogie} : P^* (\zeta^* > 0.29) = 0.90$$

$$\text{Milieu} : P^* (\zeta^* > 0.21) = 0.90$$

$$\text{Interaction} : P^* (\zeta^* > 0.21) = 0.90$$

Ces résultats, interprétés comme les précédents, pourront être considérés comme constituant le résumé inférentiel le plus condensé de la recherche effectuée.

On peut également construire, à partir des variables initiales, une ou plusieurs "variables factorielles" (1) et chercher à évaluer l'effet de chacune des sources de variation vis-à-vis de ces nouvelles variables. Si on fait en sorte que les nouvelles variables soient non-corrélées, on pourra procéder à des analyses "variable par variable" qui pourront être jugées plus "signifiantes" que celles effectuées sur les variables initiales.

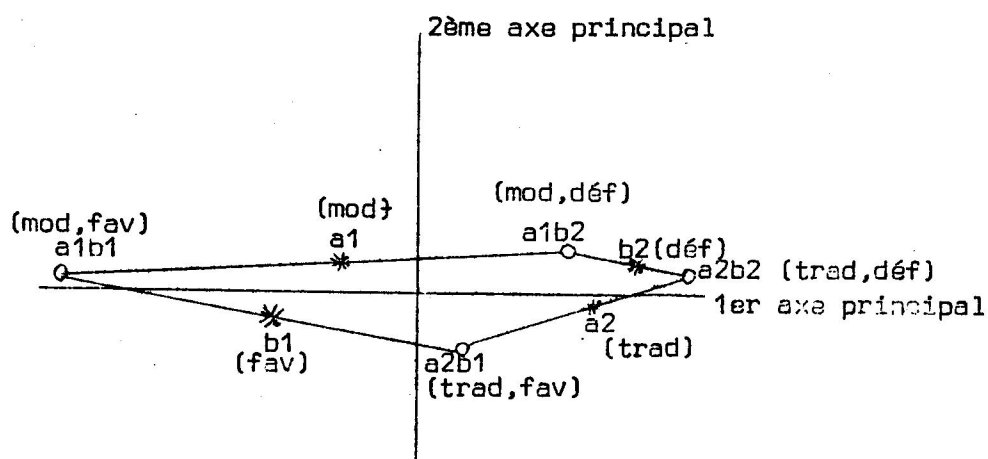
Ainsi, si dans l'enquête INOP on procède, après réduction des 9 variables, à une analyse en composantes principales, on obtient les résultats suivants pour chacune des 2 premières variables principales (lesquelles prennent respectivement en compte 51 % et 10 % de la variance totale) :

	1ère variable principale	2ème variable principale
Source de variation (entre les 4 groupes)	192	4
{ Effet de A (Pédagogie)	{ 86	{ 1
{ Effet de B (Milieu)	{ 104	{ 1
{ Interaction A.B	{ 2	{ 2

(1) Nous désignons ici par "variable factorielle" ce qu'on appelle communément "facteur" en analyse factorielle, afin d'éviter toute confusion avec le terme de facteur que nous avons utilisé dans ce texte avec le sens tout différent de "facteur du protocole".

Géométriquement, dans le plan principal (sous-espace de l'espace d'observation engendré par les deux premiers axes principaux), on peut représenter par des points les 4 groupes (barycentres des points individuels) et les 4 modalités des facteurs Pédagogie et Milieu, soit a1 (Pédagogie moderne), a2 (Pédagogie traditionnelle), b1 (Milieu favorisé), b2 (Milieu défavorisé), ces points étant eux-mêmes les barycentres des points représentant les groupes.

Le premier axe principal oppose Pédagogie moderne (a1) et Milieu favorisé (b1) d'une part, à Pédagogie traditionnelle (a2) et Milieu défavorisé (b2) d'autre part. Le 2ème axe principal oppose (dans une bien moindre mesure) Pédagogie moderne (a1) et Milieu défavorisé (b2) à Pédagogie traditionnelle (a2) et Milieu favorisé (b1).



Le fait que les deux facteurs A et B ont des effets descriptifs du même ordre de grandeur au niveau du plan principal se traduit sur la figure par le fait que le parallélogramme a_1, b_1, a_2, b_2 n'est pas très éloigné d'un rectangle ; l'importance de l'interaction se traduit par l'écart du quadrilatère $a_1b_1, a_2b_1, a_2b_2, a_1b_2$ à la forme du parallélogramme.

On observera que puisque les barycentres de points d'un même espace appartiennent au même espace, les proximités des points de type a_i et de type b_j (bien que représentant des éléments d'ensembles "de natures différentes") s'interprètent directement (sans transformation métrique) sur le graphique : il s'agit donc ici d'une véritable représentation simultanée et non pas de la superposition de graphiques appartenant à des espaces différents.

EN GUISE DE CONCLUSION

Dans ce texte nous avons essayé d'illustrer comment en développant l'analyse des comparaisons, nous avons cherché à fournir à des expérimentalistes des instruments statistiques mieux centrés sur leurs objectifs, fondés théoriquement et commodes à mettre en oeuvre pratiquement ; nous rappelons maintenant les caractéristiques principales de l'analyse des comparaisons :

- du point de vue théorique, la primauté de l'approche algébrique, avec son double aspect ensembliste (conduisant notamment au langage des formules) et linéaire (notion formalisée de comparaison) ;

- du point de vue méthodologique, l'accent mis sur la notion d'analyse locale, aussi bien dans la phase d'exploration des données que dans celle des "analyses fines" (ensemble planifié d'analyses approfondies, généralement inférentielles) ;

- du point de vue pratique, la réalisation de programmes-machine fondés sur un système de demandes d'analyse qui découle directement de la théorie.

L'accueil qu'ont réservé, depuis deux ans (date de "lancement" du programme VAR3) un nombre croissant de chercheurs expérimentalistes à nos programmes, nous permet de penser que ceux-ci pourraient, dans des délais assez rapides, faire partie des "programmes de base" d'analyse statistique et par là, accréditer l'idée que des méthodes plus efficaces que les pratiques statistiques "usuelles" sont non seulement concevables en théorie, mais aussi tout à fait praticables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES SUR L'ANALYSE DES COMPARAISONS

- Réf. 1968 H. ROUANET, J. ROGALSKI, D. LEPINE,
Algèbre linéaire et formalisation de la
notion de comparaison, *"Mathématiques et
Sciences Humaines"*, 24, 5-16.
- Réf. 1972-73 H. ROUANET, D. LEPINE,
Statistiques de groupe, groupes d'obser-
vation, *"Mathématiques et Sciences Humai-
nes"*, 41, 31-36.
- Réf. 1970 H. ROUANET, D. LEPINE,
Comparaisons between treatments in a
repeated-measurement design ; ANOVA and
multivariate methods, *"British Journal of
Mathematical and Statistical Psychology"*,
23,2, 147-163.
- (1975) J-M. HOC Note sur l'analyse de variance et l'infé-
rence fiduciaire, *Le travail humain*, 38,
2, 279-286.
- Réf. 1975 D. LEPINE, H. ROUANET,
Introduction aux méthodes fiduciaires :
inférence sur un contraste entre moyen-
nes, *Cahiers de Psychologie*, 18, 193-218.
- Réf. 1975-76 H. ROUANET, D. LEPINE, M-F. EHRLICH, P. MARQUER, R. PLAS,
Introduction aux procédures élémentaires
d'analyse descriptive des données : pré-
sentation à partir d'un exemple, *Bulletin
de Psychologie*, XXIX, 212-221.
- Réf. 1976a D. LEPINE, H. ROUANET, M-O. LEBEAUX,
L'analyse des comparaisons systématiques
dans un plan à un facteur aléatoire
(structure S<G>*T) ; introduction au pro-
gramme VAR3 (*"brochure verte"*, ronéotée ;
VI + 52 pages, sans indication de date).

- Réf. 1976b H. ROUANET, D. LEPINE,
Structures linéaires et analyse des comparaisons, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 56, 5-46.
- Réf. 1976c H. ROUANET,
L'analyse statistique des données expérimentales ; introduction à une approche algébrique, Communications au *Colloque international DGRST-CNRS : "Informatique et Sciences Humaines"*, Marseille, décembre 1975 (à paraître avec les Actes du Colloque, collection 10/18).
- Réf. 1976d H. ROUANET, D. LEPINE, J. PELNARD-CONSIDERE,
Bayes-fiducial procedures as practical substitutes for misplaced significance testing : a application to educational data. Communication à l'"International Symposium for Educational Testing", Montreux, 1975 ; in D.N.M. de Gruijter and L.J.Th. Van der Kamp (Eds) : *Advances in Psychological and Educational Measurement*, J. Wiley and Sons, 33-50.
- Réf. 1976e H. ROUANET, D. LEPINE,
A propos de l'"Analyse des données" selon Benzécri (suivi d'une "lettre de Commentaires de J-P. Benzécri), *Année Psychologique*, 78, 133-144.
- (1976) V. DUQUENNE,
Un programme de description de données, *Cahiers de Psychologie*, 19, 109-118.
- Réf. 1977a D. LEPINE,
Facteurs et plans :
I - Structure de finesse, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 57, 5-26.
II- Plans quasi-complets, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 58, 1977, 5-24.
- Réf. 1977b H. ROUANET, D. LEPINE, D. HOLENDER,
Model acceptability and the use of Bayes-fiducial methods for validating models in J. REQUIN (Ed), *Attention and Performance VII*, Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates, Inc., sous presse.

- Réf. 1977c H. ROUANET, C1 de Psychologie générale : documents pour le cours de statistique (1977-78) :
- Réf. 1977d H. ROUANET, Compte-rendu de fin d'études sur la recherche : méthodes fiduciaires d'analyse des données expérimentales (contrat DGRST n° 75.7.0454, ACC "Informatique et Sciences Humaines"). Document ronéoté.
- (1977) V. DUQUENNE, Représentation optimale d'un plan quasi-complet, colloque IRIA "Analyse des données et Informatique", 297-302.
- (1977) J-M. HOC L'inférence fiduciaire comme méthode d'analyse de données. Colloque IRIA, *Analyse des données et informatique*, 291-296.
- (1977) B. et M-P. LECOUTRE, Analyse d'une expérience d'apprentissage incident (ronéoté, 27 pages), à paraître.
- (1977) B. LECOUTRE, Note sur le calcul de la distribution fiduciaire pour une inférence sur un contraste entre moyennes, *Cahiers de Psychologie*, sous presse.
- (1977) M. WAISEROT, Distributions de formes quadratiques de variables multinormales : application au plan S<G>*T (mémoire DEA, ronéoté).

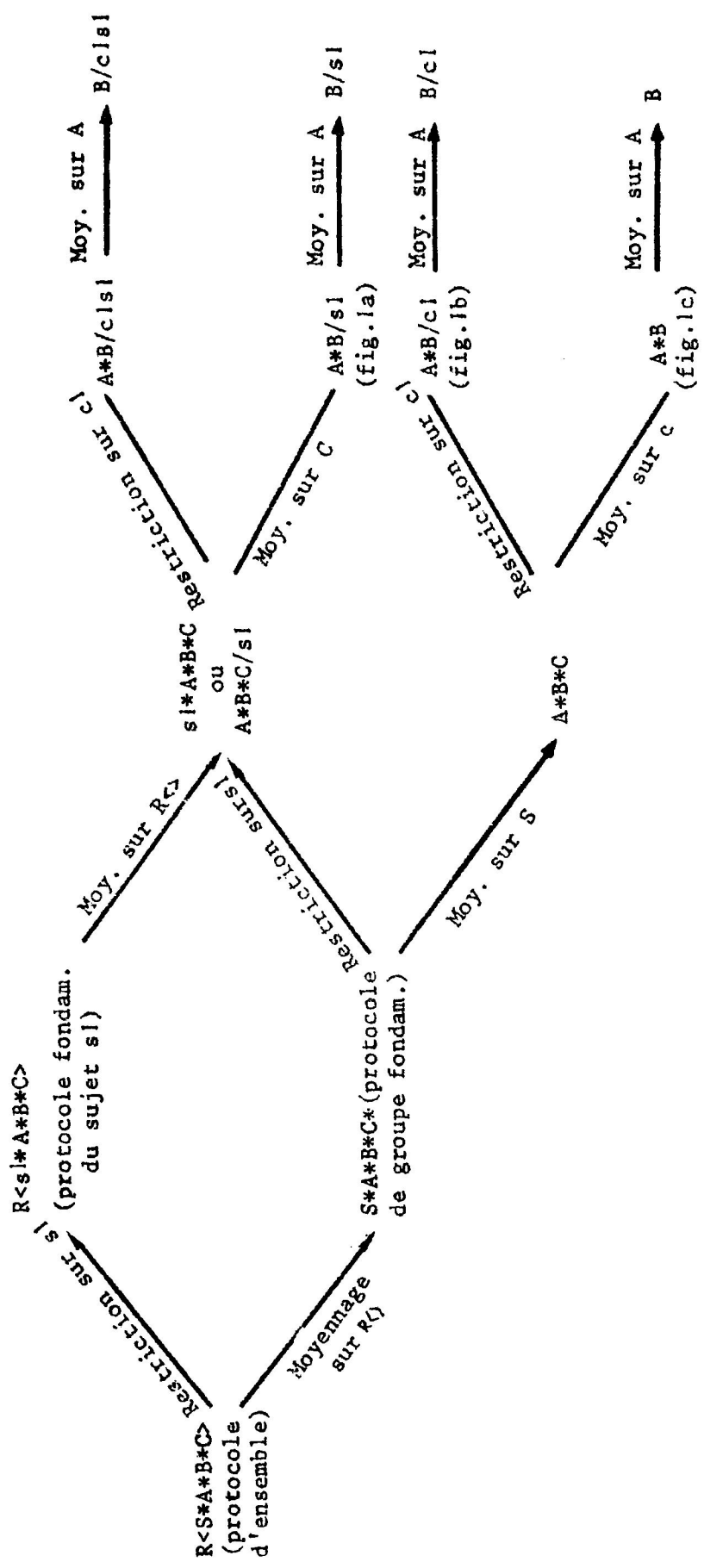


Tableau II - Quelques chaînes de dérivation envisageables à partir du protocole d'ensemble $R\langle S!A*B*C \rangle$

Tableau III - Exemples de questions et de demandes d'analyse, et caractérisation des effets (en posant $C = C_2$) selon les critères d'évaluation suivantes :

d : effet observé (en millisecondes) ;
 t : statistique de test (pour les analyses individuelles, le nombre de d.l. est très élevé) ;
 (pour A.B/C) ℓ : limite fiduciaire absolue (en millisecondes).

		Protocole de groupe fondamental S*A*B*C	Protocole individuel fondamental (sujet s1) R<A*B*C*s1>
questions	B/A*c1	B/A*c1*S $\begin{cases} d = - 34.6 \\ t = - 5.22 \text{ (11 d.l.)} \end{cases}$	B/A*c1*s1 $\begin{cases} d = - 16.2 \text{ (définition)} \\ t = - 1.42 \text{ (équipondérée)} \end{cases}$
	A.B/C	A.B/C*S $\begin{cases} d = - 7.4 \\ t = - 1.29 \text{ (11 d.l.)} \\ \ell = 16 \end{cases}$	A.B/C*s1 $\begin{cases} d = + 3 \\ t = + 0.17 \\ \ell = 26 \end{cases}$

Tableau IV - Analyses individuelles de l'effet d'interaction A.B/C (avec $C = C_2$) selon les trois critères d'évaluation du tableau III, ci-dessus).

n° sujet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d	+3	+6	+7	+9	+11	-12	-22	-24	+25	-29	-29	-35
t	+0.17	+0.36	+0.33	+0.55	+0.61	-0.63	-1.72	-1.44	+1.53	-1.55	-1.50	-1.47
ℓ	26	31	35	32	34	36	38	45	46	52	53	66

n° 1 à 5' : cas équilibré

1(P) à 5(P) : cas pondéré (pour le sujet s1)

n° du contraste	a1			a2			a1			a2			a1			a2			a1			a2			comparaisons engendrées
	b1	c0	0	b1	c0	0	b1	c1	1	b1	c1	1	b1	c1	1	b1	c1	1	b1	c1	1	b1	c1	1	
n° 1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
n° 1'	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
n° 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
n° 3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
n° 3'	0	0	0	0	0	0	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	
n° 4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
n° 5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
n° 5'	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	
n° 1(P)	0	0	0	0	0	0	71/95	24/95	71/95	71/95	24/95	71/95	0	0	0	-70/93	-23/93	-23/93	0	0	0	0	0	0	B/c1 (P) ou B(c1)
n° 2(P)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	72/96	24/96	72/96	-72/95	-23/95	-23/95	B/c2 (P) ou B(c2)
n° 3(P)	0	0	0	0	0	0	71/191	24/191	71/191	71/191	24/191	71/191	71/191	24/191	71/191	-70/188	-23/188	-23/188	72/191	24/191	72/191	-72/188	-23/188	-23/188	B/c1 c2(P)
n° 4(P)	0	0	0	0	0	0	71/285	24/94	71/285	71/285	24/94	71/285	71/285	24/94	71/285	70/285	-23/94	-23/94	72/285	-24/94	72/285	-72/285	-23/94	-23/94	A/c1 c2 (P)
n° 5(P)	0	0	0	0	0	0	71/143	-24/48	71/143	71/143	-24/48	71/143	71/143	-24/48	71/143	-70/142	23/46	23/46	-72/142	-24/48	-72/142	23/46	23/46	23/46	A.B/c1 c2

Temps de réaction en millisecondes

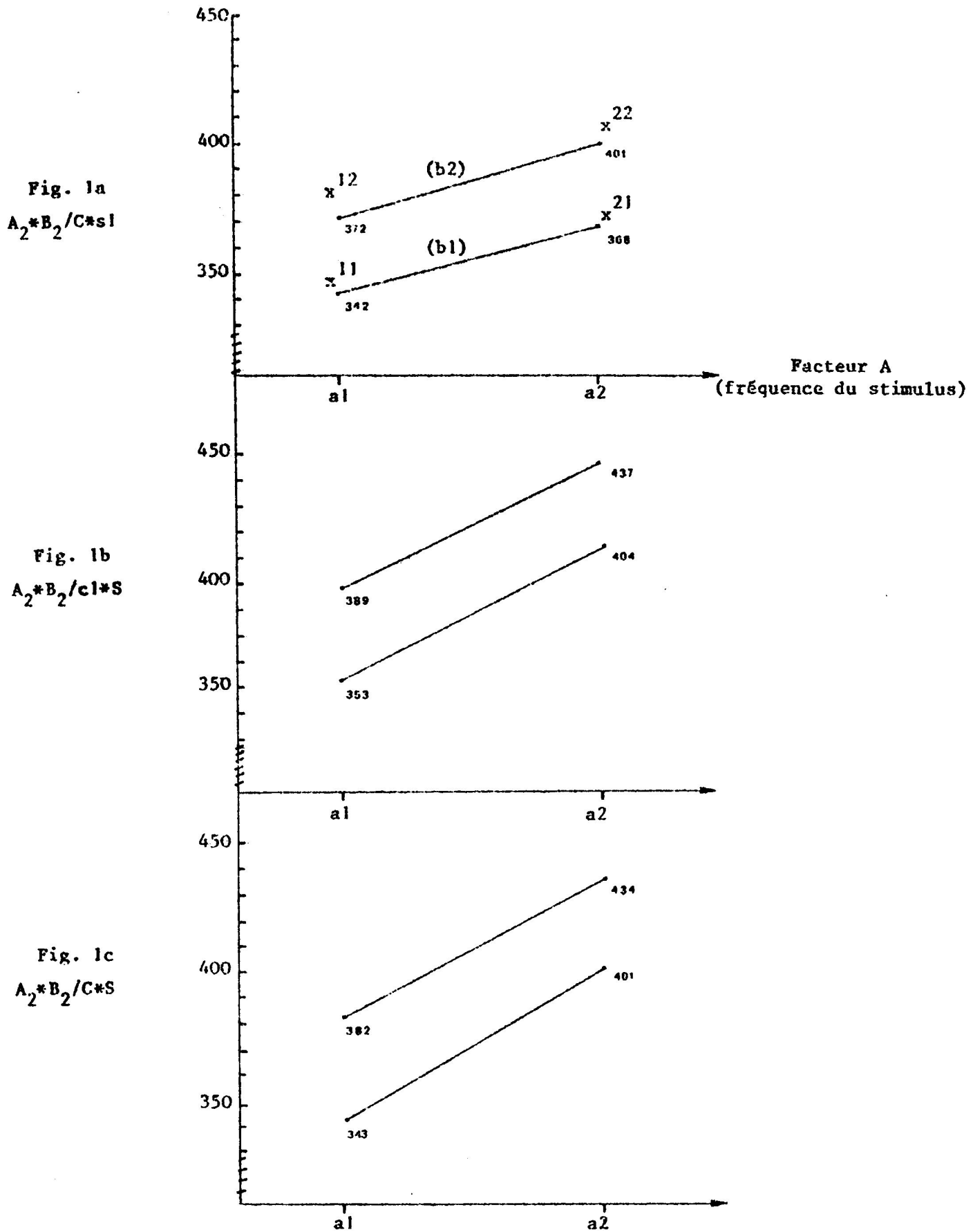
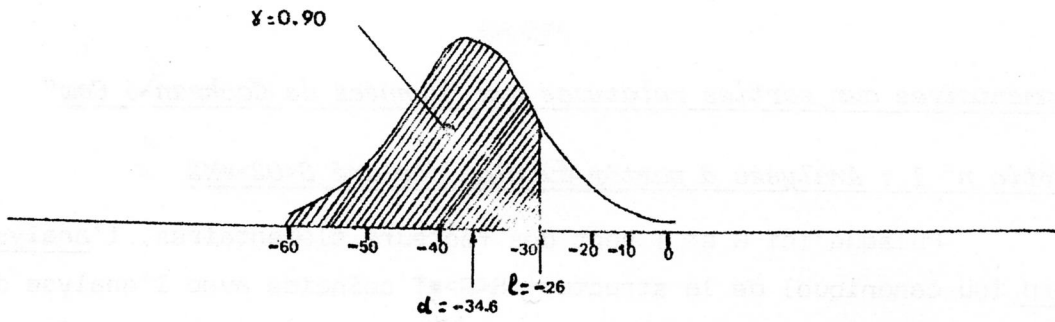
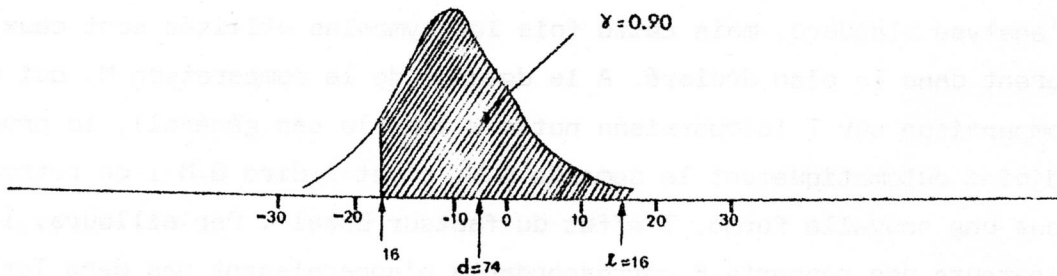


Figure 1 : Données de Holender & Bertelson : trois protocoles dérivés relatifs au croisement $A_2 * B_2$ des deux facteurs expérimentaux, avec A_2 , fréquence du stimulus (a1 fréquent, a2 rare) ; B_2 , période préparatoire (b1 courte, b2 longue), et $C = C_2$, sessions expérimentales (c1 et c2).



Effet B/A*c1 : $\delta^* = -34.6 + 6.63 t_{[11]}$

$P^* (\delta^* < -26) = 0.90$



Effet A.B/C : $\delta^* = -7.4 + 5.72 t_{[11]}$

$P^* (|\delta^*| < 16) = 0.90$

Figure II : Distributions fiduciaires pour les effets B/A*c1 et A.B/C (analyse de groupe) et limites fiduciaires de garantie $\gamma = 0.90$.

Commentaires aux sorties relatives aux "données de Cochran & Cox"

Sortie n° 1 : Analyses à partir du plan déclaré S<O2>*M2

Puisque ici G et T sont des facteurs élémentaires, l'analyse standard (ou canonique) de la structure S<G>*T coïncide avec l'analyse du plan déclaré, donc permet de répondre aux questions qui portent sur les effets globaux de chacun des deux facteurs systématiques, à condition de retraduire les symboles génériques G et T dans les termes de l'expérience ; il suffit donc de remplacer G par O, et T par M ; enfin, on obtient l'effet du facteur Essai E en remarquant que cet effet est ici confondu avec l'interaction O.M, c'est-à-dire ici G.T.

Parmi les analyses locales figurent d'abord les demandes : O, M, O.M, qui constituent les reformulations des questions déjà examinées avec l'analyse standard, mais cette fois les symboles utilisés sont ceux qui figurent dans le plan déclaré. A la demande de la comparaison M, qui est une comparaison sur T (comparaison notée W dans le cas général), le programme a adjoint automatiquement la demande G.W, c'est-à-dire O.M ; on retrouve encore sous une nouvelle forme, l'effet du facteur Essai . Par ailleurs, les dénominateurs des rapports F correspondants n'apparaissent pas dans les sorties, car l'analyse des formules par le programme conduit celui-ci à utiliser l'un ou l'autre des dénominateurs $CM_{S(G)}$ ou $CM_{S(G).T}$ de l'analyse standard.

Dans les demandes d'analyse suivantes, on a conditionné soit par une modalité de M, soit par une des modalités de O. Ainsi, la demande O/M1 concerne l'effet du facteur Ordre pour (restreint à) la machine M1, c'est-à-dire la comparaison de la machine M1 passée en premier avec cette même machine passée en second ; on peut donc l'interpréter comme l'effet du facteur Essai pour la machine M1.

Cette demande est une demande sur G conditionnelle à une partie stricte T (ici M1) de T ; en conséquence, le programme prend comme carré-moyen adjoint le carré-moyen correspondant à cette partie stricte $CM_{S(G)/T}$, (ce carré-moyen, qui n'appartient pas à l'analyse canonique de la structure S<G>*T, apparaît dans la sortie). (De même, pour la demande O/M2). La demande O(M1), qui se lit : "O à l'intérieur de M1" est équivalente à la demande O/M1.

La formule C(M) correspond à la somme (orthogonale) des deux comparaisons O(M1) et O(M2) (l'orthogonalité entraîne l'additivité non seulement des d.l. mais des inerties). (On observe ici qu'en constituant le carré-moyen adjoint à cette somme, le programme "retrouve" le $CM_{S(G).T}$ mais ne le "reconnaît" pas en tant que CM canonique et le fait donc apparaître dans la sortie). On a ensuite demandé O/M pour illustrer le fait que cette demande est équivalente à O (et non pas à O(M)).

Les demandes suivantes portent sur le facteur Machines. La demande M/O1 concerne l'effet du facteur M pour l'ordre O1 ; il s'agit cette fois d'une demande sur T conditionnelle à une partie stricte G' (ici O1) de G, donc le programme envisage deux carrés-moyens adjoints : le carré-moyen intra-S pour la partie G' ($S(G').T$) qui conduit au rapport F1 et le carré-moyen intra-S global ($S(G).T$), déjà calculé dans l'analyse standard, qui conduit au rapport F2.

Rappelons que les conditions de validité du test F2 sont plus strictes que celles du test F1, et qu'elles impliquent l'homogénéité des deux variances estimées par les deux carrés moyens $S(G').T$ associés respectivement à M/O1 et M/O2 ; étant donné l'écart important entre ces deux CM, on préférera ici conclure à partir du test plus valide fondé sur $F1 = 10.98$. La demande M/O2 appelle des commentaires analogues. On a demandé ensuite la comparaison M(O) qui est la somme (orthogonale) des comparaisons M/O1 et M/O2.

Finalement, on a formulé la demande O1M1, O2M2, qui concernerait la comparaison des machines à l'essai E1 ; mais cette demande n'est pas acceptable par le programme, car il s'agit d'une comparaison entre parties qui ne sont ni des parties de G ni des parties de T. Le programme envoie un diagnostic d'erreur et passe à la demande suivante, qui correspond à la même question mais formulée cette fois à partir d'une entrée par vecteurs (demande spécifique). Cette fois le programme calcule la SC et le CM, mais comme il s'agit d'une comparaison spécifique, il calcule un rapport F fondé sur $CM_{S(G)(T)}$. Un dénominateur plus approprié sera obtenu en recherchant, dans le tableau des inerties, les inerties correspondant à O1M1 et O2M2, d'où le CM correspondant : $\frac{1}{8} (206.+187.2) = 49.25$ et $F = \frac{144.40}{49.25} = 2.93$.

Analyses à partir du plan déclaré S<O2>*E2

L'analyse standard de la structure S<G>*T apporte les mêmes résultats que la précédente, à condition d'invertir T et G.T.

Les analyses locales sont calquées sur les analyses précédentes en remplaçant M par E. Les demandes E/O1, E/O2 et E(O) conduisent à des résultats respectivement identiques à ceux des demandes M/O1, M/O2, M(O) de la première analyse.

Les demandes O/E1 et O/E2 conduisent à des résultats qui n'avaient pas pu être demandés par formules dans la première analyse.

(Pour O/E1 on retrouve les résultats auxquels on était parvenu indirectement).


```

*****
*
* ANALYSE DES COMPARAISONS - PROGRAMME VAR3 - STRUCTURE S<G> * T - 1975 -*
*
* M.O. LEBEAUX -
* D. LEPINE - 28 RUE SERPENTE-75006 PARIS
* H. ROUANET - BUREAU 519-SORBONNE-12 RUE CUJAS-75005 PARIS
*
*****

```

DONNEES HOLENDER ET BERTELSON :PROTOCOLE DE GROUPE FONDAMENTAL (SORTIE N°1)

PLAN S12*A2*B2*C2

FACTEUR G A 1 MODALITE(S)
 FACTEUR T A 8 MODALITE(S)
 NOMBRE DE MODALITES DE S PAR MODALITE DE G 12-

TABLEAU DES DONNEES

```

*****
*      A 1      A 2      A 1      A 2      A 1      A 2      A 1      A 2
*      B 1      B 1      B 2      B 2      B 1      B 1      B 2      B 2
*      C 1      C 1      C 1      C 1      C 2      C 2      C 2      C 2
*****
S  1  * 357.704 388.708 372.043 406.739 326.292 347.833 371.236 394.304
S  2  * 368.056 431.958 432.347 504.087 341.181 407.348 392.183 463.130
S  3  * 387.181 454.083 437.653 496.042 367.556 465.591 405.845 525.833
S  4  * 321.069 336.227 343.127 368.318 310.648 344.095 333.971 375.842
S  5  * 357.394 366.708 394.069 411.208 338.278 366.273 380.333 421.696
S  6  * 387.493 434.708 415.986 472.667 356.958 419.375 409.282 439.273
S  7  * 333.278 362.478 358.306 390.478 327.222 399.227 366.611 391.609
S  8  * 316.875 375.174 340.814 391.667 311.310 395.174 369.900 413.826
S  9  * 336.472 346.273 340.347 421.000 326.056 377.217 333.000 363.652
S 10  * 344.111 430.143 352.069 393.174 329.704 401.174 354.817 414.208
S 11  * 344.704 408.304 416.887 479.136 331.239 421.000 408.833 442.842
S 12  * 385.903 509.625 464.271 512.682 317.153 440.286 384.500 512.783

```

TABLEAU DES TOTAUX ET DES MOYENNES

```

*****
*      A 1      A 2      A 1      A 2      A 1      A 2      A 1      A 2
*      B 1      B 1      B 2      B 2      B 1      B 1      B 2      B 2
*      C 1      C 1      C 1      C 1      C 2      C 2      C 2      C 2
*****
* 4240.2400 4844.3890 4667.9190 5247.1980 3983.5970 4784.5930 4510.5110 5158.9980
* 353.3533 403.6991 388.9933 437.2665 331.9664 398.7161 375.8759 429.9165

```

TABLEAU D'ANALYSE DE LA VARIANCE ET RAPPORTS F -

DONNEES HOLENDER ET BERTELSON :PROTOCOLE DE GROUPE FONDAMENTAL (SORTIE N°2)

PLAN S12*A2*B2*C2

SOURCE DE VARIATION*	INERTIE	* D.L.	* CARRE MOYEN *	RAPPORTS F	

(MOYENNE)	*14599607.1680 *	1	*14599607.1680 *	F = 1605.42	
Analyse de la structure S<G>*T	*	*	*	(1- 11)	
S * T	* 246558.8198 *	95	* 2595.3560 *	F = 30.87	
T	* 108029.4788 *	7	* 15432.7827 *	(7- 77)	
S	* 100033.7116 *	11	* 9093.9738 *	F = 18.19	
(Source adjointe maximale)	*	*	*	(11- 77)	
S . T	* 38495.6293 *	77	* 499.9432 *	→ DENOMINATEUR COMMUN A TOUS LES RAPPORTS F"	

Analyses locales planifiées :					
A.B/C	* 327.7428 *	1	* 327.7428 *	F' = 1.68	F" = 0.66
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 2151.7317 *	11	* 195.6120 *		
B/A*C1	* 14368.9650 *	1	* 14368.9650 *	F' = 27.24	F" = 28.74
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 5803.2938 *	11	* 527.5722 *		
B/A*C2	* 16924.4987 *	1	* 16924.4987 *	F' = 42.70	F" = 33.85
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 4359.7968 *	11	* 396.3452 *		
Analyse standard (décomposition cano-*					
nique de G*T selon le plan déclaré)					
A	* 72210.6285 *	1	* 72210.6285 *	F' = 59.39	F" = 144.44
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 13375.4611 *	11	* 1215.9510 *		
B	* 31241.2030 *	1	* 31241.2030 *	F' = 47.30	F" = 62.49
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 7266.1457 *	11	* 660.5587 *		
C	* 3290.5920 *	1	* 3290.5920 *	F' = 4.50	F" = 6.58
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 8039.7948 *	11	* 730.8904 *		
A.B	* 327.7428 *	1	* 327.7428 *	F' = 1.68	F" = 0.66
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 2151.7317 *	11	* 195.6120 *		
A.C	* 737.3465 *	1	* 737.3465 *	F' = 4.53	F" = 1.47
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 1792.3360 *	11	* 162.9396 *		
B.C	* 52.2607 *	1	* 52.2607 *	F' = 0.20	F" = 0.10
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 2896.9449 *	11	* 263.3586 *		
A.B.C	* 169.7054 *	1	* 169.7054 *	F' = 0.63	F" = 0.24
	*	*	*	(1- 11)	(1- 77)
S.W	* 2973.2152 *	11	* 270.2923 *		
Analyse locale complémentaire:					
B(C)/A	* 31293.4637 *	2	* 15646.7319 *	F' = 33.87	F" = 31.30
	*	*	*	(2- 22)	(2- 77)
S.W	* 10163.0906 *	22	* 461.9587 *		
	*	*	*		

PLAN S5<O2>*M2
 FACTEUR G A 2 MODALITE(S)
 FACTEUR T A 2 MODALITE(S)
 NOMBRE DE MODALITES DE S PAR MODALITE DE G 5- 5-

SOURCE DE VARIATION*	INERTIE	* D.L.	* CARRE	MOYEN *	RAPPORTS F	
(MOYENNE)	* 6195.2000	* 1	* 6195.2000	* F = 138.83		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
S<G> * T	* 910.8000	* 19	* 47.9368	* *		
G * T	* 385.6000	* 3	* 128.5333	* *		
	* *	* *	* *	* *		
G	* .8000	* 1	* .8000	* F = .02		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
T	* 320.0000	* 1	* 320.0000	* F = 15.22		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
G . T	* 64.8000	* 1	* 64.8000	* F = 3.08		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
S(G)	* 357.0000	* 8	* 44.6250	* F = 2.12		
	* *	* *	* *	* (8- 8)		
S(G) . T	* 168.2000	* 8	* 21.0250	* *		
S(G) (T)	* 525.2000	* 16	* 32.8250	* *		
	* *	* *	* *	* *		
O	* .8000	* 1	* .8000	* F = 0.02		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
M	* 320.0000	* 1	* 320.0000	* F = 15.22		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
G.W	* 64.8000	* 1	* 64.8000	* F = 3.08		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
O.M	* 64.8000	* 1	* 64.8000	* F = 3.08		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
O/M1	* 25.6000	* 1	* 25.6000	* F = 0.85		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G)/T'	* 240.8000	* 8	* 30.1000	* *		
	* *	* *	* *	* *		
O/M2	* 40.0000	* 1	* 40.0000	* F = 1.13		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G)/T'	* 284.4000	* 8	* 35.5500	* *		
	* *	* *	* *	* *		
O(M1)	* 25.6000	* 1	* 25.6000	* F = 0.85		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G)/T'	* 240.8000	* 8	* 30.1000	* *		
	* *	* *	* *	* *		
O(M)	* 65.6000	* 2	* 32.8000	* F = 0.74		
	* *	* *	* *	* (2- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G)/T'	* 357.0000	* 8	* 44.6250	* *		
	* *	* *	* *	* *		
O/M	* .8000	* 1	* .8000	* F = 0.02		
	* *	* *	* *	* (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G)/T'	* 357.0000	* 8	* 44.6250	* *		
	* *	* *	* *	* *		
M/O1	* 336.4000	* 1	* 336.4000	* F1 = 10.98 F2 = 16.00		
	* *	* *	* *	* (1- 4) (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G') . T	* 122.6000	* 4	* 30.6500	* *		
	* *	* *	* *	* *		
M/O2	* 48.4000	* 1	* 48.4000	* F1 = 4.25 F2 = 2.30		
	* *	* *	* *	* (1- 4) (1- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
S(G') . T	* 45.6000	* 4	* 11.4000	* *		
	* *	* *	* *	* *		
	* *	* *	* *	* *		
M(O)	* 384.8000	* 2	* 192.4000	* F = 9.15		
	* *	* *	* *	* (2- 8)		
	* *	* *	* *	* *		
ERREUR 2 DANS LA COMPARAISON O1M1,O2M2	* *	* *	* *	* *		
O1M1,O2M2	V.* 144.4000	* 1	* 144.4000	* F = 4.40		
	* *	* *	* *	* (1- 16)		
	* *	* *	* *	* *		

COCHRAN ET COX-CROSS OVER DESIGN-P.113 S<O>*E (SORTIE N°2)

PLAN S5<O2>*E2
 FACTEUR G A 2 MODALITE(S)
 FACTEUR T A 2 MODALITE(S)
 NOMBRE DE MODALITES DE S PAR MODALITE DE G 5- 5-

SOURCE DE VARIATION*	INERTIE	* D.L. *	CARRE MOYEN *	RAPPORTS F	
(MOYENNE)	6195.2000	1	6195.2000	F =	138.83
				(1- 8)
S<G> * T	910.8000	19	47.9368		
G * T	385.6000	3	128.5333		
G	.8000	1	.8000	F =	.02
				(1- 8)
T	64.8000	1	64.8000	F =	3.08
				(1- 8)
G . T	320.0000	1	320.0000	F =	15.22
				(1- 8)
S(G)	357.0000	8	44.6250	F =	2.12
				(8- 8)
S(G) . T	168.2000	8	21.0250		
S(G) (T)	525.2000	16	32.8250		

O	.8000	1	.8000	F =	0.02
				(1- 8)
E	64.8000	1	64.8000	F =	3.08
				(1- 8)
G.W	320.0000	1	320.0000	F =	15.22
				(1- 8)
O.E	320.0000	1	320.0000	F =	15.22
				(1- 8)
O/E1	144.4000	1	144.4000	F =	2.93
				(1- 8)
S(G)/T'	394.0000	8	49.2500		
O/E2	176.4000	1	176.4000	F =	10.76
				(1- 8)
S(G)/T'	131.2000	8	16.4000		
O(E1)	144.4000	1	144.4000	F =	2.93
				(1- 8)
S(G)/T'	394.0000	8	49.2500		
O(E)	320.8000	2	160.4000	F =	3.59
				(2- 8)
S(G)/T'	357.0000	8	44.6250		
O/E	.8000	1	.8000	F =	0.02
				(1- 8)
S(G)/T'	357.0000	8	44.6250		
E/O1	336.4000	1	336.4000	F1 =	10.98
				(1- 4)
				F2 =	16.00
				(1- 8)
S(G').T	122.6000	4	30.6500		
E/O2	48.4000	1	48.4000	F1 =	4.25
				(1- 4)
				F2 =	2.30
				(1- 8)
S(G').T	45.6000	4	11.4000		
E(O)	384.8000	2	192.4000	F =	9.15
				(2- 8)