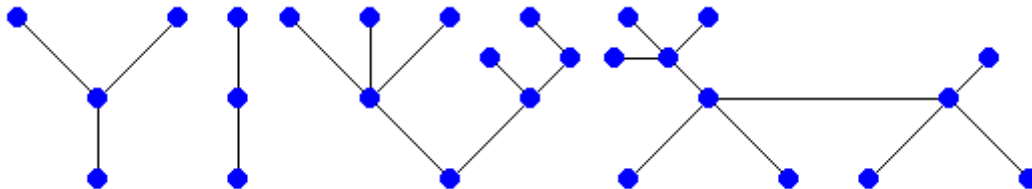


Département de mathématiques de  
l'Université de La Rochelle

## Chapitre 3 - Graphes connexes, arbres

[Retour à la table des matières](#)

Parmi les graphes, les plus simples sont les *arbres*. On appelle ainsi tout graphe *connexe et sans circuit*. (Un circuit est un lacet). Le dessin ci-dessous donne quelques exemples d'arbres.



Lorsqu'un graphe n'est pas nécessairement connexe, mais ne contient aucun circuit, on l'appelle une *forêt*. Toute forêt est une réunion finie d'arbres. L'objectif de cette leçon est de caractériser les arbres par un certain nombre de propriétés, de définir le nombre cyclomatique d'un graphe et de prouver un théorème de Cayley sur l'énumération des arbres étiquetés.

### A - Caractérisation des arbres - Nombre cyclomatique d'un graphe

Soit  $A$  un graphe à  $n$  sommets.

**Théorème** - Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a)  $A$  est un arbre.
- (b)  $A$  ne contient aucun circuit et possède  $n-1$  arêtes.
- (c)  $A$  est connexe et possède  $n-1$  arêtes.
- (d)  $A$  est connexe, et chaque arête est un pont.
- (e) Deux sommets quelconques de  $A$  sont reliés par un unique chemin.
- (f)  $A$  ne contient aucun circuit mais l'addition d'une quelconque nouvelle arête crée exactement un circuit.

**Remarque** - Au point (d), on ne fait plus la restriction sur les sommets devenant isolés : si la suppression d'une arête disconnecte  $A$  en isolant un de ses sommets, on dit quand même que cette arête est un pont, contrairement à ce que l'on faisait au chapitre 1 dans l'étude de l'algorithme de Fleury.

**Démonstration** - on raisonne par récurrence sur  $n$ . L'équivalence des six propriétés est évidente pour  $n=1$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) : il faut montrer que  $A$  possède  $n-1$  arêtes. Supprimons une arête de  $A$ . Cela le disconnecte (sinon  $A$  contiendrait un circuit) en deux sous-graphes  $B$  et  $C$  tous deux connexes et sans circuit, donc possédant, d'après l'hypothèse de récurrence,  $p-1$  et  $q-1$  arêtes (où  $p+q=n$ ). Il en résulte que  $A$  possède  $(p-1) + (q-1) + 1 = n-1$  arêtes.

(b)  $\Rightarrow$  (c) : il faut montrer que  $A$  est connexe. S'il ne l'était pas, chacune de ses composantes serait connexe et sans circuit. Donc, par hypothèse de récurrence, elle posséderait  $q_{i-1}$  arêtes. On aurait donc

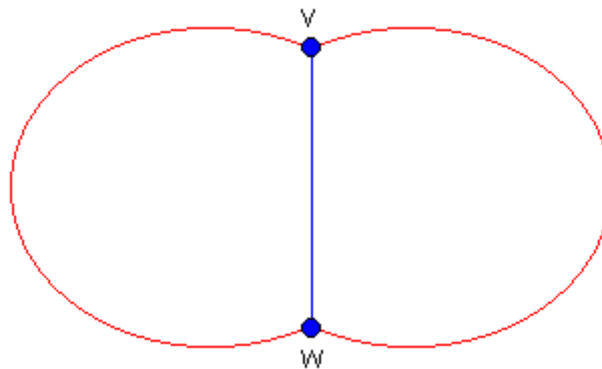
$$n-1 = q_1 - 1 + \dots + q_k - 1 = n - k$$

(où  $k$  est le nombre de composantes). Par conséquent,  $k=1$ , d'où la contradiction.

(c)  $\Rightarrow$  (d) : il faut montrer que si l'on enlève une arête, le graphe n'est plus connexe, ou encore qu'un graphe possédant  $n$  sommets et  $n-2$  arêtes n'est pas connexe. S'il l'était, il aurait forcément un sommet pendant (sommet de degré 1), puisque la somme des degrés est égale à  $2n-4$ , alors qu'elle vaut au moins  $2n$  pour un graphe sans sommet pendant. Retirant ce sommet et l'arête qui lui correspond, on aurait un graphe à  $n-1$  sommets et  $n-3$  arêtes qui serait connexe, ce qui est faux d'après l'hypothèse de récurrence (ou alors : qui entraîne, en recommençant le même raisonnement, l'existence d'un graphe connexe à deux sommets et zéro arête).

(d)  $\Rightarrow$  (e) : puisque  $A$  est connexe, ce chemin existe. S'il y en avait deux,  $A$  contiendrait un circuit et la suppression d'une arête quelconque de ce circuit laisserait  $A$  connexe, en contradiction avec l'hypothèse que toutes les arêtes sont des ponts.

(e)  $\Rightarrow$  (f) : si  $A$  contenait un circuit, deux sommets sur ce circuit seraient reliés par deux chemins. Si l'on ajoute une arête  $vw$ , puisque  $v$  et  $w$  étaient déjà reliés dans  $A$ , on crée un circuit. On ne peut en créer qu'un : si l'on en créait deux, on aurait la figure suivante



et  $A$  aurait déjà contenu auparavant le circuit mis en évidence en rouge.

(f)  $\Rightarrow$  (a) : si  $A$  n'était pas connexe, l'adjonction d'une arête entre deux composantes ne pourrait créer de circuit.  $\square$

**Remarque** - Puisque  $d(v_1) + \dots + d(v_n) = 2(n-1)$  (lemme des poignées de mains), tout arbre possède au moins deux sommets pendants.

**Remarque** - Le résultat établi pour prouver que (c)  $\Rightarrow$  (d) est un cas particulier du suivant :

**Théorème** - Soit  $G$  un graphe simple à  $n$  sommets. Si  $G$  possède  $k$  composantes connexes, le nombre  $m$  de ses arêtes vérifie

$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$$

**Démonstration** - Montrons tout d'abord que  $n - k \leq m$ .

Chaque composante connexe de  $G$  est un graphe simple connexe. Supposons que ce graphe possède un circuit. On peut alors effacer une arête en conservant la connexité. Continuons ceci jusqu'à obtenir un arbre. Il en résulte que  $m_1$  valait au moins  $n_1 - 1$ . Ceci étant vrai pour chaque composante, on a

$$m = m_1 + \dots + m_k \geq (n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k$$

Prouvons maintenant la seconde inégalité :  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$

Nous pouvons supposer que chaque composante est un graphe complet (c'est-à-dire dans lequel deux sommets quelconques sont toujours reliés par une arête). Supposons que nous ayons deux composantes  $C_i$  et  $C_j$  de  $G$ , qui soient des graphes complets possédant respectivement  $n_i$  et  $n_j$  sommets, avec  $n_i \geq n_j > 1$ .

Remplaçons  $C_i$  et  $C_j$  par des graphes complets à  $n_i + 1$  et  $n_j - 1$  sommets respectivement (en d'autres termes : volons aux pauvres pour donner aux riches). Dans une telle opération, le nombre de composantes et celui de sommets reste inchangé. En revanche, le nombre d'arêtes augmente de

$$n_i(n_i + 1)/2 - n_i(n_i - 1)/2 + (n_j - 1)(n_j - 2)/2 - n_j(n_j - 1)/2 = n_i - n_j + 1 > 0$$

Le nombre  $m$  sera donc maximal quand il n'y aura plus qu'une seule composante ayant plus d'un sommet, c'est-à-dire quand on aura  $k - 1$  sommets isolés et un graphe complet à  $n - k + 1$  sommets et, par conséquent,  $(n - k)(n - k + 1)/2$  arêtes.  $\square$

Il résulte du théorème que  $g(G) = m - n + k$  est un entier positif ou nul. Ce nombre est appelé le *nombre cyclomatique* du graphe  $G$ . C'est le plus grand nombre de côtés que l'on peut retirer de  $G$  sans faire apparaître de nouvelle composante connexe (et dans ces conditions, le graphe restant est une forêt). En effet, si  $n_1, \dots, n_k$  sont les nombres de sommets des composantes de  $G$  (de sorte que  $n = n_1 + \dots + n_k$ ), la forêt ainsi créée a  $(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = m - g(G)$  côtés.