L3 Informatique

Algorithmique avancée
Démonstrations

Etienne Birmelé
etienne.birmele@parisdescartes.fr

automne 2016

Chapitre 1

Notion de graphe

Propriété 1.1. *Un graphe non orienté vérifie*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Un graphe orienté vérifie

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = m.$$

Démonstration. Il suffit pour cela de compter le nombre de couples (noeud,arête) qui sont incidents. Si on compte ces couples en regroupant ceux contenant le même noeud, on obtient que leur nombre est de $\sum_{v \in V(G)} d(v)$. Si on les compte en les regroupant par arête commune, ils sont au nombre de $2m$.

Le raisonnement est similaire dans le cas orienté. $\square$

Codage par matrice d'adjacence :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Parcours de graphe

2.1 Arbres

Théorème 2.1. *Tout arbre enraciné est un arbre. De plus, pour tout arbre T et tout sommet de $r \in V(T)$, T peut être construit comme un arbre enraciné de racine r.*

Démonstration.

1. Soit T un arbre enraciné. T est acyclique et connexe par construction. En effet, pour toute paire de sommets u et v a un plus ancêtre commun le plus récent a (r étant un ancêtre commun à tous). En passant par a, on peut construire un chemin reliant u et v.

   Soit vw une arête de T, où v est le père de w. Alors, de par l'algorithme de construction de T, aucune autre arête ne relie l'ensemble formé par w et ses descendants au reste du graphe. La suppression de vw rompt donc l'existence d'un chemin entre v et w. Ceci étant vrai pour toute arête de T, T est bien un graphe connexe minimal.

2. Soit r un sommet de T. On lui donne le niveau 0. On peut alors reproduire l'algorithme de construction d'un arbre enraciné en sélectionnant comme descendant de v tout sommet voisin de v dans T et non encore considéré. On obtient un arbre enraciné G.

   G est un sous-graphe de T (puisque toute arête de G est une arête de T). Supposons que $V(G) \neq V(T)$. T étant connexe, il existe une arête reliant reliant un sommet $v \in V(G)$ à un sommet $w \in V(T) \setminus V(G)$. Mais alors l'algorithme de construction de G aurait considéré cette arête et inclus w dans $V(G)$. On a donc bien $V(G) = V(T)$.

   G étant connexe par construction, on a alors $G = T$ par minimalité de T.

□