

# Méthode des moindres carrés (least squares – LS)

La méthode des moindres carrés (MC) est une alternative au filtrage de Wiener. Les filtres de Wiener sont déduits à partir de moyennes d'ensemble alors que la technique des MC est déterministe dans son approche.

# Plan

- Formulation du problème
- Principe d'orthogonalité (visité de nouveau)
- Les équations normales
- Propriétés de la matrice d'autocorrélation
- Reformulation des équations normales
- Propriétés des estimateurs au sens des moindres carrés
- La décomposition en valeurs singulières

# Formulation du problème

On a le modèle linéaire suivant:

$$d(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{s,l} x(i-l) + u(i), \quad (1)$$

$d(i)$  est le **signal observé (désiré)** à l'instant  $i$  obtenu à partir du **signal d'entrée**  $x(i)$ .  $h_{s,l}$  sont les paramètres inconnus du modèle et  $u(i)$  représente le bruit de mesure qui est une variable aléatoire (non observable). Il est d'usage de supposer que  $u(i)$  est blanc de moyenne nulle, et dont la variance est  $\sigma_u^2$ .

Notre objectif est d'estimer les paramètres  $h_{s,l}$  étant donnés les deux ensembles de données observables:  $x(i)$  et  $d(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Pour cela, on définit le **signal d'erreur** comme la différence entre le signal désiré  $d(i)$  et la sortie  $y(i)$  d'un filtre RIF qui a pour coefficients  $h_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ , càd:

$$\begin{aligned} e(i) &= d(i) - y(i) \\ &= d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l). \end{aligned} \quad (2)$$

Dans la **méthode des moindres carrés (MC)**, on choisit les paramètres  $h_l$  qui minimisent la **fonction coût** suivante:

$$J_{LS} = \sum_{i=i_1}^{i_2} e^2(i), \quad (3)$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont des indices qui représentent l'intervalle dans lequel la minimisation se fait. Pour cette minimisation, les coefficients du filtre  $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$  sont constants pendant l'intervalle  $i_1 \leq i \leq i_2$ . **Le filtre obtenu de cette minimisation est le filtre linéaire au sens des moindres carrés.**

Dans la suite, on utilisera  $i_1 = L$  et  $i_2 = N$ . Dans ce cas, le signal d'entrée peut être réarrangé sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} x(L) & x(L+1) & \cdots & x(N) \\ x(L-1) & x(L) & \cdots & x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N-L+1) \end{bmatrix}.$$

# Principe d'orthogonalité (visité de nouveau)

La fonction coût qu'on cherche à minimiser est:

$$\begin{aligned} J_{LS} &= \sum_{i=L}^N e^2(i) \\ &= \sum_{i=L}^N \left[ d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) \right]^2, \end{aligned} \quad (4)$$

pour obtenir les coefficients du filtre RIF qui donnent la valeur minimale pour  $J_{LS}$ . Le **gradient** de (4) est:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} &= 2 \sum_{i=L}^N \frac{\partial e(i)}{\partial h_l} e(i) \\ &= -2 \sum_{i=L}^N x(i-l) e(i). \end{aligned} \quad (5)$$

Pour que  $J_{LS}$  soit minimisée, on doit prendre son gradient égal à zéro:

$$\frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (6)$$

Soit  $e_{\min}(i)$  l'erreur pour laquelle  $J_{LS}$  est minimisée (càd pour le filtre optimal), on a donc:

$$\sum_{i=L}^N x(i-l)e_{\min}(i) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (7)$$

L'expression précédente est la description mathématique de la version temporelle du **principe d'orthogonalité**. En d'autres termes: la suite temporelle  $e_{\min}(i)$  est orthogonale à la suite temporelle  $x(i-l)$  quand le filtre opère dans les conditions des moindres carrés.

### corollaire

Soient  $h_{\text{opt},0}, h_{\text{opt},1}, \dots, h_{\text{opt},L-1}$  les coefficients du filtre optimal (càd qui minimisent  $J_{LS}$ ). Le signal de sortie de ce filtre optimal est:

$$y_{\text{opt}}(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{\text{opt},l}x(i-l) = \hat{d}(i), \quad (8)$$

qui est une estimation au sens des moindres carrés de la sortie désirée  $d(i)$ . En multipliant les deux côtés de l'équation (7) par  $h_{\text{opt},l}$  et en additionnant sur l'intervalle  $[0, L-1]$ , on obtient (après avoir

interchangé l'ordre des sommes):

$$\sum_{i=L}^N \left[ \sum_{l=0}^{L-1} h_{\text{opt},l} x(i-l) \right] e_{\min}(i) = \sum_{i=L}^N \hat{d}(i) e_{\min}(i) = 0.$$

L'expression précédente est la description mathématique du corollaire du principe d'orthogonalité. **En d'autres termes, quand le filtre opère dans les conditions des moindres carrés, la réponse désirée estimée  $\hat{d}(i)$  est orthogonale à l'erreur minimale  $e_{\min}(i)$ .**

Il est clair qu'on a:

$$\begin{aligned} e_{\min}(i) &= d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_{\text{opt},l} x(i-l) \\ &= d(i) - \hat{d}(i). \end{aligned} \quad (9)$$

On en déduit, en utilisant le corollaire du principe d'orthogonalité, l'équation aux énergies:

$$E_d = E_{\hat{d}} + E_{e_{\min}}, \quad (10)$$

où  $E_d = \sum_{i=L}^N d^2(i)$ ,  $E_{\hat{d}} = \sum_{i=L}^N \hat{d}^2(i)$ , et  $E_{e_{\min}} = \sum_{i=L}^N e_{\min}^2(i)$ .

# Les équations normales

Il existe une autre manière de décrire le principe d'orthogonalité: c'est le système d'équations normales.

En effet, on a:

$$\sum_{i=L}^N x(i-l)e_{\min}(i) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L-1,$$

$$\sum_{i=L}^N x(i-l) \left[ d(i) - \sum_{k=0}^{L-1} h_{\text{opt},k} x(i-k) \right] = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{L-1} h_{\text{opt},k} \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k) = \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i),$$

$$\sum_{k=0}^{L-1} h_{\text{opt},k} r(k,l) = p(-l), \quad l = 0, 1, \dots, L-1, \quad (11)$$

où

$$r(k,l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k), \quad l, k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (12)$$



est la **fonction d'autocorrélation** du signal d'entrée  $x(i)$ , et

$$p(-l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i), \quad l = 0, 1, \dots, L-1, \quad (13)$$

est l'**intercorrélation** entre la sortie désirée  $d(i)$  et l'entrée  $x(i)$ .

On peut facilement vérifier que les **équations normales** peuvent s'écrire sous forme matricielle:

$$\mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{p}, \quad (14)$$

où

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(1,0) & \cdots & r(L-1,0) \\ r(0,1) & r(1,1) & \cdots & r(L-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(0,L-1) & r(1,L-1) & \cdots & r(L-1,L-1) \end{bmatrix}$$

est la **matrice d'autocorrélation** du signal d'entrée  $x(i)$ ,

$$\mathbf{p} = \left[ p(0) \quad p(-1) \quad \cdots \quad p(-L+1) \right]^T$$

est le **vecteur d'intercorrélation** entre la sortie désirée

$d(i)$  et l'entrée  $x(i)$ , et

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \left[ h_{\text{opt},0} \quad h_{\text{opt},1} \quad \cdots \quad h_{\text{opt},L-1} \right]^T$$

est le **filtre optimal au sens des moindres carrés**.

En supposant que  $\mathbf{R}$  est inversible, on a donc:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \quad (15)$$

L'expression précédente est similaire à l'équation de Wiener-Hopf.

D'autre part, on peut facilement montrer, en utilisant (15), que:

$$E_{\hat{d}} = \sum_{i=L}^N \hat{d}^2(i) = \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{p}. \quad (16)$$

D'où:

$$\begin{aligned} E_{e_{\text{min}}} &= E_d - E_{\hat{d}} \\ &= E_d - \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{p} \\ &= E_d - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (17)$$

# Propriétés de la matrice d'autocorrélation

Soit le vecteur suivant:

$$\mathbf{x}(i) = [ x(i) \quad x(i-1) \quad \cdots \quad x(i-L+1) ]^T,$$

la [matrice d'autocorrélation](#) peut se réécrire:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=L}^N \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^T(i). \quad (18)$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés de cette matrice.

**Propriété 1.** La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  est symétrique, c'à d  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ .

**Propriété 2.** La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  est toujours définie non négative, c'à d  $\mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z} \geq 0, \forall \mathbf{z}$ .

**Propriété 3.** La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

**Propriété 4.** Les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  sont toutes réelles et non négatives.

**Propriété 5.** La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  est le produit d'une matrice rectangulaire de Toeplitz et la transposée de cette même matrice.

En effet, soit la matrice rectangulaire de Toeplitz de taille  $L \times (N - L + 1)$  suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= \left[ \mathbf{x}(L) \quad \mathbf{x}(L + 1) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(N) \right] & (19) \\ &= \begin{bmatrix} x(L) & x(L + 1) & \cdots & x(N) \\ x(L - 1) & x(L) & \cdots & x(N - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N - L + 1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

on voit bien que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (20)$$

**Propriété 6.** La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  est inversible si et seulement si le rang colonne de la matrice  $\mathbf{X}$  est égal à  $L$ .

# Reformulation des équations normales

L'équation normale  $\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$  peut encore s'écrire en fonction de la matrice des données d'entrées  $\mathbf{X}$ . On a d'une part:  $\mathbf{R} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$  et de l'autre part, on a:

$$p(-l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i), \quad l = 0, 1, \dots, L-1,$$

soit sous forme matricielle:

$$\mathbf{p} = \mathbf{X}^T \mathbf{d},$$

d'où la nouvelle forme de l'équation normale:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}. \quad (21)$$

L'énergie de l'erreur minimale peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned} E_{e_{\min}} &= E_d - E_{\hat{d}} \\ &= E_d - \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{p} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (22)$$

L'estimation de  $\mathbf{d}$  au sens des moindres carrés est donc:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}} &= \mathbf{X}\mathbf{h}_{\text{opt}} \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{d}.\end{aligned}$$

La matrice

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T \quad (23)$$

est un **opérateur de projection** pour le sous-espace  $\mathbf{X}$ . On vérifie directement l'égalité  $\mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ . L'**opérateur de projection orthogonale** est défini par:

$$\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}. \quad (24)$$

D'où:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{P}\mathbf{d} \quad (25)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\text{min}} &= \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \mathbf{P}\mathbf{d} \\ &= \mathbf{P}^\perp\mathbf{d}.\end{aligned} \quad (26)$$

# Propriétés des estimateurs au sens des moindres carrés

**Propriété 1.** L'estimateur au sens des moindres carrés  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  est non-biaisé si l'on suppose que le signal bruit  $u(i)$  est de moyenne nulle.

On se souvient de notre modèle:

$$\mathbf{d} = \mathbf{X}\mathbf{h}_s + \mathbf{u}. \quad (27)$$

En remplaçant l'expression précédente dans l'équation normale, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{opt}} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{h}_s + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (28)$$

et en prenant l'espérance mathématique, on a:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{h}_{\text{opt}}\} &= \mathbf{h}_s + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E\{\mathbf{u}\} \\ &= \mathbf{h}_s. \end{aligned} \quad (29)$$

**Propriété 2.** Quand le signal bruit  $u(i)$  est blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_u^2$ , la matrice de covariance de l'estimateur  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  est égale à  $\sigma_u^2 \mathbf{R}^{-1}$ .

En utilisant (28), la matrice de covariance de l'estimateur  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  est:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\mathbf{h}_{\text{opt}}) &= E\{(\mathbf{h}_{\text{opt}} - \mathbf{h}_s)(\mathbf{h}_{\text{opt}} - \mathbf{h}_s)^T\} \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E\{\mathbf{u}\mathbf{u}^T\} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma_u^2 \mathbf{R}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

**Propriété 3.** Quand le signal bruit  $u(i)$  est blanc et de moyenne nulle, l'estimateur  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  est le meilleur estimateur linéaire non-biaisé.

Soit un estimateur linéaire non-biaisé quelconque:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{B}\mathbf{d}, \tag{31}$$

où  $\mathbf{B}$  est une matrice de taille  $L \times (N - L + 1)$ . En remplaçant  $\mathbf{d} = \mathbf{X}\mathbf{h}_s + \mathbf{u}$  dans l'équation précédente, on a:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{h}_s + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{32}$$



et en prenant l'espérance mathématique:

$$E\{\tilde{\mathbf{h}}\} = \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{h}_s. \quad (33)$$

Or, pour que l'estimateur  $\tilde{\mathbf{h}}$  soit non-biaisé il faut que  $\mathbf{B}$  satisfasse la condition:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{I}. \quad (34)$$

Dans ce cas, l'équation (32) s'écrit:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_s + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (35)$$

La matrice de covariance de  $\tilde{\mathbf{h}}$  est:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\mathbf{h}}) &= E\{(\tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{h}_s)(\tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{h}_s)^T\} \\ &= \mathbf{B}E\{\mathbf{u}\mathbf{u}^T\}\mathbf{B}^T \\ &= \sigma_u^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \end{aligned} \quad (36)$$

Maintenant, on définit la matrice suivante:

$$\Psi = \mathbf{B} - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (37)$$

En formant le produit  $\Psi\Psi^T$  et en prenant  $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ , on obtient:

$$\begin{aligned}\Psi\Psi^T &= [\mathbf{B} - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T][\mathbf{B}^T - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}] \\ &= \mathbf{B}\mathbf{B}^T - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}.\end{aligned}$$

Comme les éléments diagonaux de la matrice  $\Psi\Psi^T$  sont toujours non-négatifs, on en déduit:

$$\text{diag}[\mathbf{B}\mathbf{B}^T] \geq \text{diag}[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}]$$

ou encore

$$\sigma_u^2 \text{diag}[\mathbf{B}\mathbf{B}^T] \geq \sigma_u^2 \text{diag}[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}]. \quad (38)$$

Le terme  $\sigma_u^2\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  est égal à la matrice de covariance de l'estimateur linéaire  $\tilde{\mathbf{h}}$ . On sait aussi que le terme  $\sigma_u^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$  est égal à la matrice de covariance de l'estimateur linéaire  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  au sens des moindres carrés. Ainsi, l'équation (38) montre que dans la classe des estimateurs linéaires non-biaisés, l'estimateur au sens des moindres carrés  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  est le "meilleur" estimateur des paramètres inconnus  $\mathbf{h}_s$ , dans le sens que chacun des éléments de  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  a la plus petite possible variance.

**Propriété 4.** Quand le signal bruit  $u(i)$  est blanc gaussien et de moyenne nulle, l'estimateur  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  atteint la borne inférieure de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés.

Soit  $f(\mathbf{u})$  la densité de probabilité conjointe du vecteur  $\mathbf{u}$ . Soit  $\hat{\mathbf{h}}$  un estimateur non-biaisé quelconque des paramètres inconnus  $\mathbf{h}_s$ , alors la matrice de covariance de  $\hat{\mathbf{h}}$  satisfait toujours l'inégalité:

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{h}}) \geq \mathbf{F}^{-1}, \quad (39)$$

où

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{h}}) = E\{(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}_s)(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}_s)^T\}. \quad (40)$$

La matrice  $\mathbf{F}$  est appelée la [matrice d'information de Fisher](#) et elle est définie par:

$$\mathbf{F} = E \left\{ \left( \frac{\partial l}{\partial \mathbf{h}_s} \right) \left( \frac{\partial l}{\partial \mathbf{h}_s} \right)^T \right\}, \quad (41)$$

où

$$l = \ln f(\mathbf{u}). \quad (42)$$

On peut facilement montrer que pour un bruit blanc gaussien et de moyenne nulle, on a :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma_u^2} \mathbf{R}. \quad (43)$$

Or, d'après la **Propriété 2**, nous savons que  $\sigma_u^2 \mathbf{R}^{-1}$  est égal à la matrice de covariance de l'estimateur  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  au sens des moindres carrés. Ainsi :

$$\text{COV}(\mathbf{h}_{\text{opt}}) = \mathbf{F}^{-1}. \quad (44)$$

# La décomposition en valeurs singulières (singular-value decomposition – SVD)

La SVD est très utile pour résoudre un système linéaire aux moindres carrés.

On rappelle l'équation normale:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}, \quad (45)$$

où la matrice  $\mathbf{X}$  contient les échantillons du signal d'entrée  $x$  et  $\mathbf{d}$  est un vecteur des éléments du signal désiré. Définissons la matrice suivante:

$$\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T, \quad (46)$$

alors l'équation normale peut encore s'écrire:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{X}^+ \mathbf{d}. \quad (47)$$

La matrice  $\mathbf{X}^+$  est la [pseudo-inverse](#) ou l'[inverse généralisée de Moore-Penrose](#) de la matrice  $\mathbf{X}$ .

En pratique, il arrive très souvent que la matrice  $\mathbf{X}$  ne soit pas de rang plein, c'ad que cette matrice contient des colonnes qui sont linéairement dépendantes. Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  n'est pas inversible et le système a une infinité de solutions. Laquelle choisir?

## Théorème de la SVD

Nous sommes intéressés au système d'équations linéaires suivant:

$$\mathbf{X}\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{d}, \quad (48)$$

où la matrice  $\mathbf{X}$  est de taille  $K \times L$ ,  $\mathbf{d}$  est un vecteur de longueur  $K$ , et  $\mathbf{h}_{\text{opt}}$  (qui représente l'estimation du vecteur de paramètres inconnus) est un vecteur de dimension  $L$ .

Etant donnée la matrice  $\mathbf{X}$ , il existe deux matrices orthogonales  $\mathbf{V}$  (de taille  $L \times L$ ) et  $\mathbf{U}$  (de taille  $K \times K$ ) telles que:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{X} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0}_{W \times L-W} \\ \mathbf{0}_{K-W \times W} & \mathbf{0}_{K-W \times L-W} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

où

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_W) \quad (50)$$

est une matrice diagonale et  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_W > 0$ . L'expression (49) est le théorème de la SVD.  $W$  représente le rang de la matrice  $\mathbf{X}$ .

Puisqu'il est possible d'avoir  $K > L$  ou  $K < L$ , il y a deux cas différents. Pour le cas  $K > L$ , on a un système sur-déterminé (plus d'équations que d'inconnues). Pour le cas  $K < L$ , on a un système sous-déterminé (plus d'inconnues que d'équations).

Une autre manière d'écrire la SVD est la suivante. Puisque  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ , on a:

$$\mathbf{X}\mathbf{V} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0}_{W \times L-W} \\ \mathbf{0}_{K-W \times W} & \mathbf{0}_{K-W \times L-W} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Ainsi,

$$\mathbf{X}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, W, \quad (52)$$

et

$$\mathbf{X}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad i = W + 1, W + 2, \dots, K. \quad (53)$$

D'où la forme:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^W \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (54)$$

## Relation avec les valeurs propres

En multipliant  $(\mathbf{U}^T \mathbf{XV})^T$  par  $\mathbf{U}^T \mathbf{XV}$ , on obtient:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{X}^T \mathbf{XV} = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & \mathbf{0}_{W \times L-W} \\ \mathbf{0}_{L-W \times W} & \mathbf{0}_{L-W \times L-W} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Les vecteurs  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_L$  de la matrice  $\mathbf{V}$  sont les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  et  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_W^2 > 0, \sigma_{W+1}^2 = \dots = \sigma_L^2 = 0$ , sont les valeurs propres correspondantes.

De la même manière, en multipliant  $\mathbf{U}^T \mathbf{XV}$  par  $(\mathbf{U}^T \mathbf{XV})^T$ , on obtient:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & \mathbf{0}_{W \times K-W} \\ \mathbf{0}_{K-W \times W} & \mathbf{0}_{K-W \times K-W} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Les vecteurs  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_K$  de la matrice  $\mathbf{U}$  sont les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$  et  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_W^2 > 0, \sigma_{W+1}^2 = \dots = \sigma_K^2 = 0$ , sont les valeurs propres correspondantes.

## Pseudo-inverse

L'intérêt de la SVD est de formuler une définition générale pour la pseudo-inverse. On définit la pseudo-



inverse de la matrice  $\mathbf{X}$  comme:

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbf{0}_{W \times K-W} \\ \mathbf{0}_{L-W \times W} & \mathbf{0}_{L-W \times K-W} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T, \quad (57)$$

où

$$\Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_W^{-1}) \quad (58)$$

et  $W$  est le rang de  $\mathbf{X}$ . Cette définition s'applique quelle que soit la matrice  $\mathbf{X}$ , qu'elle soit sur- ou sous-déterminée et quel que soit son rang. Cette pseudo-inverse peut encore s'écrire:

$$\mathbf{X}^+ = \sum_{i=1}^W \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T. \quad (59)$$

Finalement la solution du problème des moindres carrés

$$\mathbf{X} \mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{d} \quad (60)$$

est

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{X}^+ \mathbf{d}. \quad (61)$$