Optimisation linéaire
Exercices de modélisation

But

- Choix des variables de décision
- Choix du domaine (réel ou entier ?)
- Définition de la fonction objective
- Définition des contraintes

Exercice 1 : Les pêcheurs

Les variables (réelles)

H : quantité de homards pêchés (tonne)
T : quantité de tourteaux pêchés (tonne)
A : quantité d'araignées pêchées (tonne)

La fonction objective

max : $z = 95(0{,}8H) + 24(0{,}95T) + 17(0{,}9A)$

Les contraintes

$H + T + A \leq 1000$ (capacité maximale des bateaux)

$0{,}8H + 0{,}95T + 0{,}9A \leq 900$ (conditionnement)

$\left|H - (T + A)\right| \leq 100 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H - (T + A) \leq 100 \\ T + A - H \leq 100 \end{cases}$ (équilibre)

$H \geq 0, T \geq 0, A \geq 0$

Exercice 2 : Chaîne d'hôtels

Les variables (entières, modèle {0,1})

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}, \begin{cases} L_i = 1 \text{ si l'hôtel de Lyon est contruit l'année i} \\ L_i = 0 \text{ sinon} \\ \text{idem pour } M_i,\ H_i,\ T_i,\ P_i,\ B_i \end{cases}$$

On a donc $6 \times 4 = 24$ variables $\in \{0,1\}$

La fonction objective

Si on pose $C(L,i)$ le coût de construction de l'hôtel de Lyon l'année i et de même pour $M,\ H,\ P,\ B$ et T, on a :

$$\min : z = \sum_{i=1}^{4} L_i \times C(L,i) + M_i \times C(M,i) + H_i \times C(H,i) + P_i \times C(P,i) + B_i \times C(B,i) + T_i \times C(T,i)$$

Les contraintes

Chaque hôtel ne peut être construit qu'une année parmi les 4 possibles :

$$\sum_{i=1}^{4} L_i \leq 1, \sum_{i=1}^{4} M_i \leq 1, \sum_{i=1}^{4} H_i \leq 1, \sum_{i=1}^{4} P_i \leq 1, \sum_{i=1}^{4} B_i \leq 1, \sum_{i=1}^{4} T_i \leq 1,$$

4 hôtels sont construits :

$$\sum_{i=1}^{4} L_i + M_i + H_i + P_i + B_i + T_i \leq 4$$

a. $\forall i \in \{1,2,3,4\} P_i = L_i$

b.

M_1	B_1	
1	1	
0	1	$\Rightarrow M_1 - B_1 \leq 0$
1	0	
~~1~~	~~0~~	

c. $H_4 = 0, B_4 = 0$

d. $\forall \mathrm{i} \in [1,4] T_i + M_i \leq 1$

e. $150L_1 + 145M_1 + 195P_1 + 140H_1 + 125B_1 + 100T_1 \leq 300$

Exercice 3 : Emploi du temps

Les variables

$\forall i \in I = \{1,2,3,4\}, \forall cl \in C = \{1,2\}, \forall j \in J = \{lu, ma, me, je, ve\}$

$\begin{cases} C_{i,cl,j} = 1 \text{ si M.Cheese a cours avec la classe } cl \text{ le jour } j \text{ au créneau } i \\ C_{i,cl,j} = 0 \text{ sinon} \qquad \text{idem pour les autres profs } p \in P = \{I, Ma, Ef, D, El, Be, Mu, Bi\} \end{cases}$

On a donc $4 \times 2 \times 5 \times 9 = 360$ variables $\in \{0,1\}$

Les contraintes

Un seul prof pour une classe fixée 1 jour, 1 créneau :

$$\forall i \in I, \forall j \in J, \forall cl \in C, \qquad \sum_{p \in P} P_{i,cl,j} \leq 1$$

Un prof ne peut être qu'à un seul endroit à la fois :

$$\forall j \in J, \forall i \in J, \forall p \in P, \qquad \sum_{cl \in C} P_{i,cl,j} \leq 1$$

Respecter la répartition pour M. Cheese :

$$\sum_{j \in J, i \in I} \mathrm{C}_{\mathrm{i,1,j}} = 1 \quad et \qquad \sum_{j \in J, i \in I} \mathrm{C}_{\mathrm{i,2,j}} = 1 \qquad \text{idem pour les autres } p \in P$$

Cours de sport :

$$Mu_{3,1,je} = 1 \qquad Bi_{3,2,je} = 1$$

M. Efdehicks absent le lundi matin :

$$Ef_{1,2,lu} = 0 \qquad Ef_{2,2,lu} = 0$$

Mme Insuline ne travaille pas le mercredi :

$$\forall cl \in C \qquad \sum_{i \in I} I_{i,cl,me} = 0$$

Pas plusieurs cours de la même matière la même journée :

$$\forall cl \in C, \forall j \in J, \forall p \in P \qquad \sum_{i \in I} p_{i,cl,j} \leq 1$$

La fonction objective

$$\min : z = \sum_{cl \in C, j \in J, p \in P} p_{1,cl,j} + p_{4,cl,j}$$