

# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse traite deux problèmes distincts qui sont reliés par deux points communs : ce sont deux problèmes mal posés, et pour chacun de ces problèmes nous proposons une solution qui repose sur l'usage d'ondelettes. Le premier problème est celui de la mesure du flot optique. Le deuxième est le problème de l'interpolation à grille irrégulière. On peut donc voir cette thèse comme deux illustrations différentes de la résolution de problèmes mal posés avec des ondelettes.

Qu'est-ce qu'un problème inverse ou mal posé? C'est le problème qui consiste à résoudre une équation

$$Ax = y$$

où  $A$  est un opérateur qui n'est pas inversible. Nous considérons ici que  $A$  sera un opérateur linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ .

Une méthode générale de résolution de ce type de problème est la régularisation. Elle consiste à reformuler le problème d'inversion comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'adéquation quadratique

$$x = \arg \min_{x'} \|Ax' - y\|^2$$

tout aussi mal posé que le précédent, car la fonctionnelle est positive, mais n'est pas définie. La méthode consiste ensuite à supposer que la solution se trouve dans un espace de HILBERT  $\mathcal{H} \subset E$  et à pénaliser la fonctionnelle d'adéquation par un terme supplémentaire dit de régularisation qui est lui coercif.

$$x = \arg \min_{x'} \|Ax' - y\|^2 + \lambda \|x'\|_{\mathcal{H}}^2$$

La fonctionnelle obtenue est donc par construction coercive, et le nouveau problème ainsi construit a une solution unique, pourvu que l'opérateur  $A$  soit continu au sens de la norme hilbertienne de  $\mathcal{H}$ .

La régularisation est donc un moyen systématique de transformer un problème mal posé en un problème bien posé. Cet avantage a un prix considérable. Régulariser ainsi un problème mal posé revient à faire des hypothèses fortes sur le signal, à savoir que :

- le signal est dans l'espace de HILBERT  $\mathcal{H}$

- la solution du problème est un optimum bayésien qui consiste à voir le signal  $x$  comme une réalisation d'un processus aléatoire centré et dont la matrice de covariance est la matrice du produit scalaire qui définit  $\mathcal{H}$ .

Ces hypothèses sont parfois difficiles à justifier. Par ailleurs le choix d'un espace de HILBERT  $\mathcal{H}$  précis est souvent arbitraire, alors qu'il a une influence déterminante sur la forme de la solution. Dans les deux problèmes que nous allons aborder, nous allons également faire une sorte de régularisation locale. La différence est que la nature de la régularisation que nous allons effectuer ne sera pas fixée à l'avance, mais s'adaptera en fonction des caractéristiques locales de l'information dont nous disposons.

## 1.1 La mesure du mouvement

---

Le problème qui fait l'objet de la première partie de la thèse est celui de la mesure du mouvement dans une séquence d'images vidéo. En général, l'évolution de l'image au cours du temps est due principalement à deux facteurs

- des sauts entre deux séquences successives, qui sont rares et ponctuels,
- le déplacement relatif des objets filmés et de la caméra.

Le mouvement relatif des objets et de la caméra est un champ de vecteurs à trois composantes des vitesses des objets filmés dans le référentiel de la caméra, que nous appellerons mouvement réel. La scène est projetée sur le plan du film de la caméra, et nous pouvons donc définir sur ce plan du film un deuxième champ de vitesse qui est le champ de vitesses projeté. On note  $p$  l'opérateur de projection (qui peut être linéaire ou projectif). Pour chaque point  $\mathbf{x}$  de l'image, qui est le projeté  $p(\mathbf{X})$  d'un point réel  $\mathbf{X}$  de vitesse  $\mathbf{V}$ , le flot optique en  $\mathbf{x}$  est alors le vecteur  $\mathbf{v} = dp(\mathbf{X})\mathbf{V}$ .

L'objet de la mesure du flot optique est d'estimer le flot optique sur la base d'une séquence d'images filmées  $I(t; \mathbf{x})$ . Ce problème est déjà en soi un problème mal posé. Un deuxième problème est le prolongement naturel de ce premier problème: il consiste à reconstituer le champ de déplacement tridimensionnel à partir du flot optique, mais nous ne l'étudierons pas ici.

La mesure du flot optique a un certain nombre d'applications possibles. Elle peut servir en tant que telle pour faire de la compression de séquences d'images vidéo par compensation de mouvement (prédiction d'images sur la base d'un champ de déplacement). La mesure du flot optique sert également pour l'analyse de scènes: le mouvement apparent des objets d'une scène peut permettre de reconstruire un scène tridimensionnelle si on dispose d'informations supplémentaires sur la nature du mouvement réel. Ces techniques servent donc pour la construction de modèles tridimensionnels d'objets réels (acquisition tridimensionnelle) pour la réalité virtuelle, ou encore en robotique, pour construire une représentation de l'environnement d'un robot qui se déplace.

Une séquence d'images (en noir et blanc) est représentée par une fonction de niveaux de gris  $I(t; x_1, x_2)$ . Pour mesurer le flot optique, il est courant de faire une hypothèse d'illumination constante. Un point réel visible par la caméra aura la même couleur ou intensité de gris au cours du temps.

La dérivée de cette valeur de gris s'écrit

$$\frac{d}{dt}I(t; \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I$$

et l'hypothèse d'illumination constante se traduit donc par l'équation

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0 \quad (\text{OF})$$

dite équation du flot optique.

Ce mouvement n'est pas toujours mesurable (ni visible par l'œil). Si notamment nous considérons une zone homogène de l'image invariante par translation, plusieurs mouvements différents donneront (au moins localement) la même séquence. Notre problème n'a alors pas de solution unique. C'est le problème *d'ouverture*.

### 1.1.1 La mesure du mouvement est un problème mal posé

Si on considère l'équation du flot optique donnée ci-dessus, on voit que la valeur du vecteur  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)$ , un vecteur de dimension supérieure à 1, n'est contrainte que par une unique équation scalaire linéaire. Dans ces conditions, la seule information sur le champ  $\mathbf{v}$  que l'on peut extraire est sa composante dans la direction du gradient  $I$ , et non pas toutes les composantes du vecteur  $\mathbf{v}$ .

Comme le problème n'est pas soluble en l'état, les approches qui ont été proposées par différents auteurs reposent toutes sur une hypothèse supplémentaire faite sur le flot.

#### La régularisation

Une méthode de régularisation a été proposée en 1980 par HORN et SCHUNCK. Elle consiste à rechercher la solution  $\mathbf{v}$  pour un instant  $t$  donné comme minimum de la fonctionnelle

$$\mathbf{v} = \arg \min \left( \iint \left( \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I \right)^2 dx_1 dx_2 + \lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 \right)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  désigne une norme hilbertienne régularisante (par exemple de SOBOLEV). Ceci revient à considérer que la meilleure solution de ce problème est la solution la plus régulière. En pratique, la résolution numérique de ce problème régularisé se fait par inversion d'un système symétrique défini positif dont les inconnues sont toutes les composantes du champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  à un instant donné. La matrice est très grande (à  $2NM$  inconnues si l'image est de taille  $N \times M$ ) et son inversion se fait par une méthode itérative.

#### Méthode d'appariement

Une autre approche (dite d'appariement par fenêtre ou *block matching*) consiste à chercher une correspondance entre des fenêtres d'images de deux instants consécutifs. Si  $W + \{\mathbf{x}_0\}$

est une fenêtre spatiale placée autour du point  $\mathbf{x}_0$ , les méthodes d'appariement consistent à rechercher  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)$  comme le déplacement fini  $\mathbf{v}$  tel que l'erreur quadratique

$$\iint_{W+\{\mathbf{x}_0\}} (I(t+1; \mathbf{x} + \mathbf{v}) - I(t; \mathbf{x}))^2 d^2\mathbf{x}$$

soit minimale. Il faut pour cela supposer que le champ de déplacement réel est constant sur un fenêtre  $W + \{\mathbf{x}_0\}$ . Ce genre de méthode est coûteuse, car la fonctionnelle à minimiser est susceptible d'avoir des minima locaux. Il faut donc rechercher le déplacement qui la minimise dans une gamme de valeurs discrètes  $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ .

### Spectre spatio-temporel local

Une autre famille d'approches a été proposée sur la base d'observations de ADELSON et BERGEN. Elles consistent à faire une analyse fréquentielle locale sur des portions d'espace-temps de la séquence d'images. Si sur une petite portion d'espace-temps le déplacement est uniforme :

$$I(t; x_1, x_2) = P(x_1 - v_1 t, x_2 - v_2 t)$$

la transformée de FOURIER de cette portion est une nappe de DIRAC pondérée dont le support est un plan orthogonal à la vitesse :

$$\hat{I}(\tau; \xi_1, \xi_2) \propto \hat{P}(\xi_1, \xi_2) \delta(v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \tau)$$

En identifiant l'inclinaison du plan d'équation  $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \tau = 0$ , on peut retrouver les composantes  $(v_1, v_2)$  du vecteur vitesse. Des variantes de ces méthodes existent, suivant que le module ou la phase de la sortie des filtres spatio-temporels sont utilisés. Ces méthodes reposent sur l'hypothèse que le flot optique est constant sur des portions spatio-temporelles parallélépipédiques de la séquence d'image.

### Méthode différentielle filtrée

WEBER et MALIK ont proposé d'appliquer l'équation du flot optique non pas à l'image  $I$ , mais à l'image filtrée avec différents filtres spatio-temporels  $f_n(\mathbf{x}, t)$ . Si on peut faire l'hypothèse que le flot optique est constant sur le support d'un filtre  $f_n$ , alors on peut écrire

$$I_n(\mathbf{x}, t) = I * f_n(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial I_n}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I_n(\mathbf{x}, t) = 0 \quad n = 1 \dots N$$

et obtenir ainsi un jeu de  $N$  équations soluble par la méthode des moindres carrés.

#### 1.1.2 Aliasage en temps et localisation de la mesure

En pratique, les séquences d'images vidéo sont échantillonnées suivant les trois variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $t$ . Comme l'image est échantillonnée en temps, et n'est connue que sur des intervalles de temps discrets, on ne mesure en pratique pas des vitesses, mais des déplacements finis.

C'est ce qu'on appelle l'aliasage en temps. La plupart des méthodes décrites ci-dessus sont des méthodes locales. Pour estimer le déplacement en un point donné  $\mathbf{x}_0$ , elles ne prennent en compte des valeurs de l'image que sur une fenêtre spatiale  $W + \{\mathbf{x}_0\}$ , où  $W$  est

- le support de l'analyse de FOURIER locale pour les méthodes spatiotemporelles,
- le support des filtres pour la méthode de WEBER et MALIK,
- le support des filtres de dérivation spatiale pour la méthode de HORN et SCHUNCK (qui est elle aussi sensible à l'aliasage en temps, malgré sa formulation globale).

Si le déplacement  $|\mathbf{d}|$  entre deux images consécutives est plus grand que les dimensions de la fenêtre  $W$ , alors les portions d'image considérées qui sont

$$\begin{array}{ll} [I(t; \mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in W} & \text{pour le temps } t \\ [I(t+1; \mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in W} = [I(t; \mathbf{x} - \mathbf{d})]_{\mathbf{x} \in W} & \text{pour le temps } t+1 \end{array}$$

correspondent à des portions *disjointes* de l'image d'origine  $I(t)$ , et ne permettent pas d'identifier le déplacement sous-jacent. Dans les méthodes d'appariement, où la fenêtre est mobile, ce problème apparaît également, car la complexité algorithmique de la méthode est proportionnelle au nombre des déplacements possibles parmi lesquels on recherche le vecteur  $\mathbf{v}$  et la gamme des déplacements explorée doit donc être limitée. L'aliasage en temps limite donc la précision de la mesure du flot optique en bornant la gamme des vitesses mesurables.

À l'inverse, on ne peut pas travailler avec des fenêtres de l'image indéfiniment grandes, car les mesures obtenues sont alors très corrélées spatialement (très lissées). On doit donc trouver un compromis entre deux contraintes antagonistes :

- la contrainte d'aliasage, qui impose que la mesure soit faite sur des fenêtres de taille suffisamment grande en comparaison du déplacement entre deux images consécutives
- le besoin d'avoir un champ de déplacement à la plus haute résolution spatiale possible, ce qui impose d'avoir des fenêtres les plus petites possibles.

### Approches multi-résolutions

Cette constatation a motivé le choix de variantes multi-résolutions dans les méthodes de mesure du flot optique. Elles consistent généralement à effectuer une mesure de déplacement sur la base de fenêtres de différentes tailles, et à combiner les mesures obtenues à ces différentes échelles par des techniques d'arbitrage ou de raffinement.

La méthode proposée par WEBER et MALIK est une méthode multi-résolutions. Les filtres  $f_n$  sont dilatés sur une gamme d'échelle géométrique de raison 1,8. WEBER et MALIK obtiennent ainsi des cartes de déplacement plus ou moins lissées suivant les échelles de dilatation des filtres, et, par une technique d'arbitrage, sélectionnent les mesures les plus fines pour lesquelles l'erreur d'aliasage soit acceptable.

Étienne MÉMIN et Patrick PÉREZ ont décrit une variante multirésolution de la méthode de HORN et SCHUNCK. De plus, les fonctionnelles de régularisation et d'appariement qu'ils utilisent ne sont plus convexes, afin que les discontinuités du flot optiques soient tolérées. Leur méthode est très précise (avec une erreur d'estimation d'environ 20% inférieure à celle décrite dans cette thèse), mais avec une structure de calcul plus complexe et un temps de calcul plus élevé.

Les méthodes d'appariement par fenêtres ont aussi une déclinaison multi-résolutions. Les appariements sont effectués sur des images filtrées à différentes échelles (par une pyramide laplacienne, par exemple). Des mesures de déplacements à grande échelles sont réutilisées à une échelle plus fine pour choisir une gamme de déplacements  $\mathcal{G}$  centrée autour du déplacement mesuré à une échelle plus grossière. Le gain de l'approche multi-résolutions est de réduire le coût de calcul pour une gamme de déplacements totale fixée, ou encore d'augmenter la gamme de déplacements possibles pour un coût de calcul fixé.

### Notre approche : méthode différentielle projetée

L'approche que nous proposons et défendons dans cette thèse s'apparente à la méthode de WEBER et MALIK. Elle consiste à choisir comme filtres spatiaux des ondelettes. En partant d'une famille de  $N$  ondelettes mères  $(\psi^n)_{n=1\dots N}$ , nous construisons une famille indexée par  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  et  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$

$$\psi_{j\mathbf{k}}^n = 2^j \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

De la même manière que WEBER et MALIK, nous projetons l'équation du flot optique sur les différentes ondelettes

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle = 0$$

Si nous supposons que le déplacement  $\mathbf{v}$  est uniforme sur le support des ondelettes  $\psi_{j\mathbf{k}}^n$  pour  $n = 1 \dots N$  (hypothèse dite de séparation d'échelles) ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \langle \nabla I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle = 0$$

et après une intégration par parties

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} = v_1 \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle + v_2 \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle$$

Pour des indices  $j$  et  $\mathbf{k}$  donnés, nous avons donc un système de  $N$  équations dont les inconnues sont  $v_1$  et  $v_2$ . Ce système est cette fois surdéterminé, et nous pouvons en extraire une solution unique (de régression).  $v_1$  et  $v_2$  désignent la valeur du déplacement uniforme sur un domaine centré en  $2^{-j}\mathbf{k}$  et de rayon  $2^{-j}$ . Jusque là, cette méthode est proche de celle de WEBER et MALIK.

Elle a cependant des avantages considérables :

1. l'algorithme de calcul est extrêmement rapide. Le temps de calcul pour estimer le flot optique entre deux images successives est de l'ordre de nombre de pixels de l'image. En effet, les différents systèmes construits sont moins nombreux à échelle grossière qu'à échelle fine. Nous tirons ainsi parti de la corrélation des estimations obtenues à échelle grossière en ne produisant qu'une carte de déplacement sous-échantillonnée. Enfin, tous les coefficients du système ci-dessus sont des coefficients d'ondelettes de l'image et de sa dérivée temporelle. Ces coefficients d'ondelettes peuvent être calculés par des cascades de filtrages et de sous-échantillonnages en temps proportionnel au nombre de points de l'image.

2. l'algorithme est prouvable. Sous certaines hypothèses (de régularité du flot et de richesse de la texture qui se déplace), on peut montrer que l'estimation de flot donne une estimation asymptotiquement exacte du flot optique.
3. nous montrons enfin comment notre approche peut être adaptée à différents modèles locaux du flot optique. Nous montrons notamment en détail comment mesurer localement les changements d'illumination et ainsi obtenir une mesure du flot optique très robuste vis-à-vis de ces changements.

### 1.1.3 Plan de la première partie

Dans le chapitre 2, nous introduisons quelques notions sur les ondelettes qui nous serviront dans la suite de la thèse. Dans le chapitre 3, nous détaillons les spécificités du problème de la mesure du flot optique. Nous décrivons dans le chapitre 4 notre méthode en la comparant aux méthodes existantes. Nous décrivons notamment plus en détail les diverses approches possibles auxquelles nous pouvons recourir pour combiner les mesures obtenues aux différentes échelles. Quelle que soit l'approche choisie, notre algorithme complet ne requiert qu'un nombre d'opérations de l'ordre du nombre de pixels de l'image. Il est de ce point de vue plus rapide que celui de WEBER et MALIK. Cette méthode de calcul a des points communs avec deux autres méthodes : une première développée par SIMONCELLI, et une deuxième par MAGAREY et KINGSBURY. Nous détaillerons les différences entre notre méthode et ces deux autres méthodes dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 5, nous prouvons la convergence de notre schéma d'estimation. Plus précisément :

- si le conditionnement des matrices de mesure construites est suffisant (ce qui revient à dire que l'image contient suffisamment de détails pour extraire un déplacement visuel)
- si le champ de déplacement est suffisamment régulier
- si l'image est d'un degré de régularité exact fixé (LIPSCHITZ- $\alpha$ ) en  $\mathbf{x}_0$

alors l'erreur d'estimation du mouvement tend asymptotiquement vers 0 quand

- l'échelle de mesure  $2^{-j}$  tend vers 0
- l'intervalle de temps entre deux images successives tend vers 0 en étant asymptotiquement négligeable devant l'échelle de mesure (dominé par un certain  $2^{-(1+\theta)j}$ ).

Ce résultat est important car il montre que dans certains cas, on peut estimer asymptotiquement sans erreur le déplacement qui a permis d'obtenir une image en fonction de la précédente, alors qu'a priori ce problème était mal posé. « Dans certains cas » signifie que l'image déplacée doit être suffisamment riche en détails pour que le déplacement soit mesurable. Cette condition se conçoit bien dans la mesure où il n'est clairement pas possible d'estimer localement le déplacement d'un motif qui est par exemple uniforme ou invariant par translation.

Le chapitre 6 contient des expérimentations numériques qui montrent que notre méthode soutient la comparaison avec les méthodes concurrentes, et permet de mesurer les changements locaux d'illumination tout en étant plus robuste vis-à-vis de ces changements et plus rapide. Ce chapitre aborde aussi l'application de la mesure du mouvement à la compression vidéo (par le biais de projets d'élèves encadrés au cours de cette thèse), et propose des extensions et d'autres applications de cette méthode.

## 1.2 Interpolation multidimensionnelle irrégulière

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons au problème de l'interpolation de fonctions sur la base de points placés irrégulièrement, parfois aussi appelé problème d'apprentissage. Nous cherchons une fonction  $f$  définie de  $E$  vers  $F$  qui passe par un nombre donné  $N$  de points de mesure  $(x_n, y_n)_{n=1\dots N}$  où  $x_n \in E$  et  $y_n \in F$  :

$$f(x_n) = y_n \quad \text{pour tout } n = 1 \dots N$$

Quand l'espace fonctionnel  $\mathcal{H} \subset F^E$  dans lequel nous cherchons l'interpolant est de dimension infinie, ce problème est mal posé, car la donnée d'un nombre fini de points de mesure d'une fonction ne permet en aucun cas de la déterminer entièrement.

De telles méthodes de représentation de fonctions sur la base de mesures ponctuelles ont des applications très diverses. Nous n'en citerons que quelques unes, comme la simulation de systèmes dynamiques complexes, la reconstruction de surfaces en synthèse d'images et plus particulièrement en imagerie médicale, la résolution d'équations aux dérivées partielles, etc.

Ces problèmes sont très différents suivant la dimension de l'espace de départ  $E$  dans lequel évoluent les points  $x_n$ . Quand cette dimension est petite (de l'ordre de quelques unités) il s'agit d'approximation de fonction ou d'interpolation. Quand à l'inverse la dimension de l'espace est très élevée, il s'agit de problèmes d'apprentissage, pour lesquels les approches les plus répandues sont les réseaux de neurones et les réseaux de fonctions radiales. Nous passons en revue ces quelques méthodes dans le chapitre 7.

### La régularisation

Une approche de régularisation consiste à prendre comme solution de ce problème la fonction  $f$  dans un espace de HILBERT  $\mathcal{H}$  qui satisfait les contraintes interpolatrices et qui est de norme  $\|f\|_{\mathcal{H}}$  minimale. La solution s'écrit alors sous la forme d'une combinaison linéaire de noyaux d'interpolation

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n K(x_n, x)$$

Quand la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est invariante par translation et isotrope, les noyaux  $K(x_n, x)$  s'écrivent sous la forme

$$K(x_n, x) = g(\|x_n - x\|)$$

et nous obtenons des réseaux de fonctions radiales.

Cette méthode a un grand nombre d'avantages

- le problème qui définit  $f$  est bien posé, et la solution dépend de manière continue des mesures  $y_n$  ;
- la complexité de la solution  $f$  est bornée (par le nombre de mesures) ;
- ce cadre de calcul s'applique quelle que soit la dimension de l'espace de départ  $E$ , grâce aux théorèmes de SCHOENBERG et MICCHELLI.

- ce modèle a une justification bayésienne : la solution  $f$  régularisée est un maximum de densité a posteriori, si on fait l'hypothèse statistique a priori sur  $f$  suivante :  $f$  est une réalisation d'un processus aléatoire gaussien centré de covariance  $E(f(x)f(x')) = K(x, x')$ , et les mesures sont perturbées par des réalisations indépendantes d'un bruit gaussien centré de variance fixée.

Cette méthode a aussi quelques inconvénients :

- En l'état, la solution  $f$  n'est pas représentée sous une forme très compacte. Si les points sont placés avec une densité uniforme, les coefficients  $c_n$  ont des ordres de grandeur comparables. La complexité de la représentation de la solution  $f$  croît en pratique exactement comme le nombre de points de mesure. De plus, quand le nombre de fonctions de base croît, le coût de calcul pour évaluer la valeur de la fonction apprise en un point augmente presque proportionnellement (parce que le vecteur  $[K(x, x_n)]_{n=1\dots N}$  est plein).
- le modèle de régularisation et l'hypothèse statistique sous-jacente sur  $f$  ont une influence déterminante sur la forme de la solution. Cette hypothèse détermine également la vitesse de convergence de la méthode. Si  $\mathcal{H}$  est par exemple un espace de SOBOLEV  $H^s$ , l'ordre de convergence de l'approximation par des fonctions radiales sera  $s$  si la fonction  $f$  est plus régulière, et la méthode sera instable si la fonction à apprendre est d'un ordre de régularité inférieur. On a donc intérêt à prédire au mieux la régularité de la fonction inconnue. Ce cadre d'approximation ne permet pas de faire une interpolation où l'ordre d'approximation dépend localement de la régularité de la fonction à apprendre.

Récemment, les travaux de VAPNIK sur les machines à vecteurs support ont permis une amélioration considérable des réseaux de fonctions radiales. Elles permettent de sélectionner parmi les fonctions de base le sous-ensemble de celles qui sont les plus pertinentes pour représenter une fonction. Ces méthodes s'appuient sur des résultats théoriques de VAPNIK et CHERVONENKIS qui ont proposé une mesure explicite de la capacité de généralisation d'une famille de fonctions approchantes.

Par ailleurs, des travaux de BEATSON et NEWSAM, inspirés de travaux de GREENGARD et ROKHLIN permettent d'effectuer rapidement certains calculs sur des développements en réseaux de fonctions radiales (méthodes multipolaires).

Néanmoins, les décompositions en fonctions radiales souffrent de quelques défauts intrinsèques que ces derniers raffinements n'effacent pas, comme leur manque d'adaptativité dû à une hypothèse a priori sur la fonction inconnue qui est très forte.

### Méthodes de maillage irrégulier

Les méthodes de triangulation sont utilisées pour construire des interpolations linéaires par morceaux de fonctions sur la base d'échantillons ponctuels. NIRA DYN *et coll.* ont étudié des méthodes de triangulation dans lesquelles le maillage s'adapte en fonction des valeurs de la fonction à estimer. La triangulation est modifiée pour réduire la taille de la représentation sans réduire significativement la précision d'approximation.

DAUBECHIES, GUSKOV et SWELDENS ont proposé des méthode d'interpolation sur grille irrégulière d'ordre supérieur à 2.

La difficulté de ces approches de maillage réside dans la triangulation qui devient formellement complexe quand la dimension croît, et dans les contraintes sur la géométrie des triangles qui deviennent difficiles à gérer quand l'ordre d'approximation augmente.

### Les réseaux de neurones

Un réseau de neurones est le suivant : on choisit une classe de fonctions paramétrée  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  qui se construisent par combinaison de fonction élémentaires (les neurones) et qui sont en général assez riches. Les paramètres  $\alpha$  sont les coefficients synaptiques à ajuster. Le réglage de ces coefficients se fait par une méthode de gradient

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (y_n - f(x_n)) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_n)$$

La dépendance de la sortie  $f_\alpha(x)$  en fonction des paramètres  $\alpha$  étant complexe et non linéaire, rien ne garantit qu'on peut atteindre un minimum absolu d'erreur d'estimation.

Les réseaux de neurones à une couche ont été largement étudiés. Des auteurs ont donné des résultats de densité (CYBENKO) ou des ordres d'approximation (BARRON). Des variantes avec des fonctions de transfert en ondelettes ont également été proposées (PATI et KRISHNAPRASAD, ZHANG et BENVENISTE, CANDÈS et DONOHO) et sont décrits plus en détail dans le chapitre 7.

### 1.2.1 Choix d'une représentation. Approximation linéaire et non-linéaire

Notre démarche, que nous décrivons en détail dans le chapitre 8, est basée sur le choix d'un mode de représentation des fonctions à estimer. Les fonctions que nous utilisons pour estimer la fonction inconnue sont des combinaisons linéaires finies de fonctions de base d'une base  $\mathcal{G}$ . Par ce premier choix, nous prenons une voie analogue aux méthodes de régularisation et aux méthodes de maillage, mais différente des réseaux de neurones multi-couches.

Le choix de la famille de fonctions de base  $\mathcal{G}$  est un point crucial et est lié à l'hypothèse faite a priori sur la régularité de la fonction à estimer : les fonctions parmi lesquelles la fonction à apprendre est susceptible de se trouver doivent être approchées avec une erreur faible sur une sous famille de  $\mathcal{G}$  de cardinal fixé.

L'approximation avec des sous-familles d'une base peut se faire de deux manières différentes : par approximation linéaire ou non linéaire.

**Approximation linéaire** Les méthodes de régularisation sont basées sur l'hypothèse que les fonctions à estimer sont dans un espace de SOBOLEV. Des fonctions d'un espace de SOBOLEV  $W^s([0, 2\pi])$  sont par exemple représentées de manière économique par un développement en série de FOURIER tronqué. Si on définit la base de FOURIER

$$g_m(x) = e^{imx}$$

une bonne approximation d'une fonction de  $W^s$  à  $2N + 1$  coefficients est

$$f_{2N+1} = \sum_{m=-N}^N \langle f, g_m \rangle g_m$$

Si les coefficients ont une décroissance en  $|m|^{-s}$ , i.e.

$$|\langle f, g_m \rangle| \leq A|m|^{-s}$$

ce qui est par exemple le cas si  $f \in W^s$ , alors l'erreur d'approximation a la décroissance suivante

$$\|f_N - f\|_{L_2} = \mathcal{O}(N^{1/2-s})$$

Les fonctions de FOURIER sont donc de bonnes fonctions de base pour représenter des fonctions de régularité uniforme (SOBOLEV). Ce choix de fonction ne dépend pas de l'indice de régularité  $s$  choisi.

Cette approximation à  $2N + 1$  termes est une approximation linéaire, car on choisit systématiquement les mêmes  $2N + 1$  coefficients pour un nombre  $N$  fixé, et que l'approximation de la fonction  $f$  n'est rien d'autre qu'une projection de cette fonction sur un sous-espace.

**Approximation non linéaire** Une autre approche consiste à effectuer un choix des  $N$  coefficients qui dépend de la fonction  $f$  à représenter. L'approximation  $f_N$  ne dépend plus linéairement de la fonction  $f$ , puisqu'elle est obtenue par projection de  $f$  sur un sous-espace qui dépend de  $f$ . C'est ce qu'on appelle de l'approximation non linéaire. Si la famille  $\mathcal{G}$  est une base orthogonale, la meilleure approximation en norme  $L_2$  dans  $\mathcal{G}$  est celle obtenue en sélectionnant les  $N$  plus grands coefficients de la décomposition de  $f$  dans  $\mathcal{G}$ .

Supposons que  $\mathcal{G}$  soit une base hilbertienne. Les fonctions qui sont bien approchées de cette manière sont celles dont la décomposition sur la base  $\mathcal{G}$  est creuse, c'est à dire que la décomposition contient peu de coefficients importants et beaucoup de coefficients négligeables. En termes mathématiques, il faut que si les fonctions de base  $g_m$  sont réordonnées en  $(g_{m_k})$  de telle manière que la suite des modules de coefficients  $|\langle f, g_{m_k} \rangle|$  soit décroissante, alors la décroissance des termes réordonnés est de la nature suivante :

$$|\langle f, g_{m_k} \rangle| \leq Ak^{-s} \tag{1.1}$$

Dans ce cas, la décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire sur  $N$  termes est

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \langle f, g_{m_k} \rangle g_{m_k} \right\|_{L_2} = \mathcal{O}(N^{1/2-s})$$

On peut montrer que si pour une fonction donnée  $f$ , l'erreur d'approximation non-linéaire est de cet ordre, alors ses coefficients réordonnés vérifient également (1.1).

L'approximation non-linéaire permet d'approcher efficacement des classes de fonctions plus larges que l'approximation linéaire. Si nous prenons une base d'ondelettes orthogonale

$$\psi_{j\mathbf{k}}^n = 2^{dj/2} \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

les classes de fonctions bien approchées par approximation non-linéaire sont les classes de BESOV. Ces classes sont plus riches que les classes de SOBOLEV, parce qu'elles contiennent également des fonctions qui peuvent avoir des singularités.

**Structure d'arbre** Une approximation non-linéaire ne peut pas en pratique être réalisée sous sa forme la plus générale, car il n'est pas possible de parcourir tous les vecteurs de base, et un codage d'une approximation non linéaire inclut également le codage des indices des vecteurs de base retenus. Si aucune structure n'est imposée, les codes correspondants peuvent être arbitrairement grands.

Pour cette raison, l'approximation non linéaire sur des bases d'ondelettes utilise parfois une structure d'arbre. Une ondelette à une échelle  $j$  a  $2^d$  fils (pour des ondelettes à  $d$  variables) qui sont d'échelle  $j + 1$  et qui sont placées en des positions proches.

Cette construction est motivée par les considérations suivantes

- pour des fonctions  $f$  régulières par morceaux, un coefficient d'ondelette est en généralement grand seulement si le coefficient de l'ondelette parente l'est aussi.
- selon un théorème prouvé par COHEN, DEVORE *et coll.*, restreindre le choix de  $N$  coefficients à des jeux de coefficients qui constituent des sous-arbres de l'arbre des coefficients d'ondelettes n'est pas très coûteux : la nouvelle classe d'approximation ainsi obtenue est incluse dans un espace de BESOV aux indices arbitrairement proches de l'espace de BESOV original.

## 1.2.2 Méthode proposée pour construire un interpolant

La méthode de construction d'un interpolant que nous proposons est la suivante. Nous recherchons l'interpolant  $f_{\mathcal{X}}$  d'une fonction  $f$  sur la base de mesures  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$  comme combinaison linéaire d'une sous-famille d'ondelettes de la base qui constitue un sous-arbre (ou presque) de l'arbre des coefficients d'ondelettes :

$$f_{\mathcal{X}} = \sum_{(j, \mathbf{k}, s) \in T} c_{j\mathbf{k}}^s \psi_{j\mathbf{k}}^s$$

Les coefficients d'ondelettes sont calculés par inversion d'un système de contraintes interpolatrices :

$$\sum_{(j, \mathbf{k}, n) \in T} c_{j\mathbf{k}}^n \psi_{j\mathbf{k}}^n(x_m) = y_m \quad m = 1 \dots$$

Nous décrivons plusieurs méthodes toutes composées de trois étapes.

**Allocation** La première étape consiste à choisir une sous-famille d'une base d'ondelettes en construisant une correspondance entre les points de mesure et les ondelettes. La méthode utilisée pour cela est appelée *allocation*. Elle fournit pour un jeu de  $n$  mesures un choix d'un sous-ensemble de  $n$  ondelettes de la base.

**Contrôle de stabilité** La deuxième étape a pour objet de modifier ce choix initial pour obtenir un système linéaire de contraintes d'interpolation *stable*. Elle peut être menée de plusieurs manières différentes. Dans le chapitre 8, nous décrivons une règle de sélection

des paires ondelette/mesure obtenues par un critère géométrique dit de *bon placement relatif* (BPR). Dans le chapitre suivant, nous décrivons deux autres approches dites de *contrôle de stabilité a posteriori* et de *régularisation locale*.

**Inversion du système** La troisième étape consiste simplement à résoudre le système linéaire des contraintes d'interpolation.

La première étape du choix des coefficients d'ondelettes que nous décrivons dans la suite repose exclusivement sur des critères géométriques (de positions relatives des points de mesure  $\mathbf{x}$  et des centres des ondelettes  $2^{-j}\mathbf{k}$ ). Nous l'appelons « méthode d'allocation » parce qu'elle repose sur la construction d'une correspondance biunivoque entre les mesures et les ondelettes choisies.

### La méthode d'allocation

La méthode d'allocation a pour fonction de sélectionner un sous-famille de  $N$  d'une base d'ondelettes pour un jeu de  $N$  points de mesure. Elle consiste à placer des mesures dans l'arbre des ondelettes par une descente d'arbre guidée par les position relatives des ondelettes et de la mesure à placer.

Ce choix se justifie de diverses manières. Tout d'abord, on privilégie ainsi un placement de chaque mesure le plus près possible du centre de l'ondelette à laquelle elle est allouée. Par ailleurs, des ondelettes de haute résolution ne seront sélectionnées qu'aux endroits où la densité de points de mesure est suffisante, ce qui paraît naturel.

La définition exacte de ce schéma et ses propriétés (existence d'un critère d'optimalité pour définir une meilleure allocation qui est presque unique, etc.) sont données dans la section 8.3.

### Le contrôle de stabilité par bon placement relatif (BPR) : propriétés de convergence

Avec un schéma d'allocation, on peut construire un système de contraintes linéaires sur un jeu de coefficients choisis qui a autant d'inconnues que de contraintes. Cependant, ce procédé ne garantit pas à lui seul que le problème d'interpolation (c'est à dire le système linéaire des contraintes) a une solution unique.

Nous proposons alors un critère purement géométrique qui sélectionne un sous-ensemble de paires ondelette/mesure : le critère de bon placement relatif. Ce critère est facile à vérifier en pratique, et cette opération de sélection prend au plus  $\mathcal{O}(N)$  opérations.

L'algorithme composé des trois étapes ci-dessus est alors convergent, et nous sommes de plus en mesure de fournir des estimations relativement fines de la vitesse de convergence. On définit la maille maximale  $h$  de l'ensemble  $\mathcal{X}$  des points de mesure dans un domaine borné  $D$  par

$$h = \max_{x \in D} \min_{n=1 \dots N} |x_n - x|$$

on est alors en mesure de prouver les résultats suivants.

**Stabilité** L'interpolant  $f_{\mathcal{X}}$  obtenu par interpolation sur des échantillons  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$  vérifie l'inégalité de stabilité suivante :

$$\|f_{\mathcal{X}}\|_{\infty} \leq M \|f\|_{\infty}$$

Ce résultat de stabilité est le résultat central de cette analyse. Les estimations de vitesses de convergence en sont une conséquence relativement immédiate.

**Vitesse de convergence** Si une fonction  $f$  est uniformément LIPSCHITZ- $\alpha$  et que les ondelettes utilisées ont  $\beta$  moments nuls, on a la borne d'erreur suivante :

$$\|f_{\mathcal{X}} - f\|_{\infty} \leq Mh^{\min(\alpha, \beta)}$$

On peut même montrer que si  $f$  est seulement continue, alors on a

$$\|f_{\mathcal{X}} - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

Cette méthode d'approximation n'échoue pas quand la fonction  $f$  est trop peu régulière, ce en quoi cette approche diffère donc de la régularisation. Pour la régularisation, si  $\beta$  est l'ordre d'approximation du schéma, la convergence n'a lieu que si  $\beta < \alpha$ .

**Bon conditionnement** On peut définir la distance de séparation de l'ensemble des points de mesure

$$q = \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

Alors, la norme de la matrice inverse du système est majorée par un multiple de  $|\log q|$ . Dans le cas de la régularisation, la majoration est de la forme  $q^{-\beta}$ , c'est à dire que la matrice obtenue est sensiblement plus mal conditionnée. Il faut aussi noter que dans notre cas, la matrice du système est creuse.

**Approximation adaptative** Si la fonction  $f$  a un degré de régularité non uniforme, et qu'elle est par exemple uniformément LIPSCHITZ- $\alpha$ , sauf sur le support  $S$  d'une singularité dans un voisinage de laquelle est LIPSCHITZ- $\beta$ , avec  $\beta < \alpha$ , on a alors la majoration locale d'erreur

$$|f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq Mh^{\alpha} + M'h^{\beta} e^{-M''d(\mathbf{x}, S)/h}$$

où  $d(\mathbf{x}, S)$  désigne la distance du point  $\mathbf{x}$  à l'ensemble  $S$ . Ceci signifie que l'influence néfaste d'une singularité sur le taux de convergence est locale (décroissante exponentiellement, et d'autant plus vite que la maille maximale est petite).

### Approches incrémentales

Dans certaines situations, on peut vouloir tout à la fois demander au réseau construit d'affiner sa représentation de la fonction estimée, sur la base de nouvelles mesures, tout en l'utilisant pour faire de la prédiction. Ce genre d'utilisation trouve son intérêt dans des applications de temps réel, comme le contrôle.

L'algorithme d'allocation est incrémental, et les matrices des systèmes mis en jeu étant creuses, on peut réaliser un schéma d'interpolation incrémental dont chaque itération aura un temps d'exécution court. Le coût de calcul à chaque étape est de l'ordre de  $(\log N)^2$  où  $N$  est le nombre de mesures.

### 1.2.3 Contrôle a posteriori de la stabilité et régularisation locale

L'inconvénient de l'approche basée sur le critère de sélection BPR est que certaines mesures sont conservées et d'autres sont rejetées par l'algorithme. Le taux de mesures rejetées augmente avec la dimensionalité de l'espace. De plus, si les points de mesure sont placés dans une sous-variété d'intérieur vide du domaine de prédiction, cette approche échoue, et aucune convergence ne peut être prouvée. Pour cette raison, nous avons ébauché deux autres approches où le critère de contrôle de stabilité n'est plus le critère BPR. La première consiste à effectuer un *contrôle a posteriori* de la stabilité du système, et la deuxième consiste à faire de la *régularisation locale*.

Avec la description d'une version incrémentale de la méthode d'interpolation basée sur la sélection BPR, la description de ces deux autres approches est faite dans le chapitre un peu prospectif 9.1. Des exemples d'expérimentations numériques sont donnés. Leur stabilité est en l'état insuffisante mais nous indiquons comment nous pensons remédier à leur défauts de jeunesse.

