Traitement Numérique des Signaux Bidimensionnels

Joël Le Roux

19 décembre 2000

Table des matières

1 Introduction

1.1 Objectifs du cours

Les méthodes présentées dans ces notes cours s'utiliseront surtout dans les aspects des problèmes de traitement des signaux multidimensionnels et des images où l'interprétation fréquentielle est importante : filtrage et prétraitement des images préalable à leur interprétation, problèmes de propagation d'ondes, . . . par opposition aux problèmes de reconnaissance et d'interprétation d'images. Elles ne sont que des extensions des techniques monodimensionnelles comme l'analyse de Fourier et le filtrage linéaire que nous supposerons connues. Les extensions des notions fondamentales sont détaillées dans les premiers chapitres (1,2,3 et 4). Je n'insiste pas beaucoup sur les signaux aléatoires 2D dont le traitement est une transcription directe des traitements des signaux aléatoires monidimensionnels fondée sur les outils vus dans les quatre premiers chapitres. Les derniers chapitres décrivent des applications pour lesquelles les méthodes expliquées dans ce document (essentiellement filtrage linéaire et transformée de Fourier) sont les outils fondamentaux. Le cours ne prétend pas à la rigueur mathématique. Son objectif est surtout de donner à l'étudiant les moyens de comprendre et de mettre en oeuvre les techniques élémentaires de traitement numérique des images ou plus généralement de signaux bidimensionnels ou multidimensionnels.

Le document de référence principal utilisé pour rédiger ces notes de cours est l'ouvrage de D. E. Dudgeon and R. M. Mersereau, “Multidimensional digital signal processing”, édité par Prentice Hall en 1984. D'autres ouvrages utiles sont ceux de R. C. Gonzales et R. E. Woods, “Digital image processing” publié chez Addison & Westley en 1992, A. K. Jain, “Fundamentals of digital image processing” édité par Prentice Hall en 1989 et de J. C. Russ, “The image processing handbook”, édité par CRC en 1992.

1.2 Description succinte des chapitres

Le deuxième chapitre donne la formulation dans le cas bidimensionnel de la transformée de Fourier. Il donne aussi quelques éléments pour interpréter cette transformée de Fourier ainsi que quelques unes de ses propriétés. Le troisième chapitre donne la formulation de l'échantillonnnage et souligne quelques phénomènes qui apparaissent dans le cas de l'échantillonnage des signaux bidimensionnels. Le quatrième chapitre décrit l'outil fondamental pour formuler les problèmes de filtrages et de représentation dans le domaine des fréquences, la transformée en z, sa formulation particulière correspondant à la transformée de Fourier des signaux échantillonnés. Il donne aussi les formules correspondantes dans le cas de la transformée de Fourier discrète, ainsi que quelques résultats importants : transformée de Fourier rapide, transformée en cosinus. Le cinquième chapitre donne les résultats principaux concernant le filtrage des signaux bidimensionnel. J'y donne quelques résutats peu utilisés et donc peu connus sur les filtres récursifs bidimensionnels. Le sixième chapitre se contente de donner les formules élémentaires sur l'analyse des signaux aléatoires bidimensionnels. Dans le chapitre sept, nous étudions quelques problèmes, propagation d'ondes, reconstruction d'images à partir de projections ou en interférométrie.

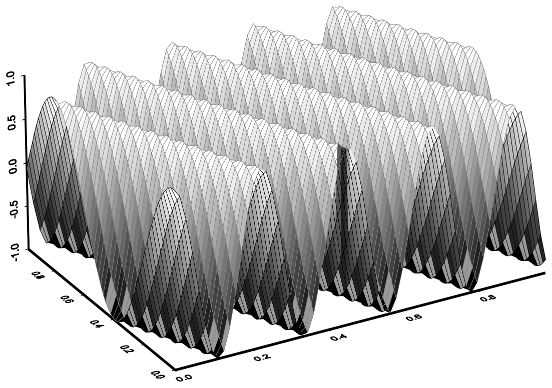


FIG. 1: Signal sinusoïdal bidimensionnel

2 Représentation fréquentielle des signaux bidimensionnels continus

Avant d'envisager l'échantillonnage et le traitement numérique des signaux il est nécessaire de donner l'interprétation des signaux bidimensionnels dans le domaine des fréquences

2.1 La transformée de Fourier 2D

La représentation fréquentielle des signaux 2D est l'extension directe de celle des signaux monodimensionnels. La transformée de Fourier $F(u,v)$ d'un signal $f(x,y)$ est

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j(ux+vy)}dxdy \tag{1}$$

(Dans certaines présentations la quantité scalaire $ux + vy$ est donnée sous la forme d'un produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$; on obtient alors une écriture similaire dans les cas mono et multidimensionnels). Cette formule permet de calculer l'amplitude de la composante du signal $f(x,y)$ à la fréquence spatiale (u,v).

2.2 La transformée inverse

La reconstitution de signal spatial se fait par addition des différentes fréquences spatiales pondérées par les amplitudes complexes ainsi calculées.

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j(ux+vy)}dudv \tag{2}$$

2.3 Interprétation de la transformée de Fourier 2D

2.3.1 Interprétation d'une sinusoïde

Le signal sinusodïdal temporel $e^{j\omega t}$ est caractérisé par la fréquence $\omega/2\pi$ donnant (en Herz) le nombre de vibrations du signal par unité de temps (en secondes) ; dans le domaine des fréquences il est représenté par une impulsion de Dirac située à cette fréquence.

La fréquence spatiale (u,v) caractérisant $e^{j(ux+vy)}$ est une impulsion de Dirac de coordonnées (u,v) ; c'est un couple de paramètres qui peut être interprété comme une fréquence du signal donnée par $\sqrt{u^2+v^2}$ et un angle "d'arrivée" dont la tangente est v/u : en effet les points de même phase φ de la sinusoïde sont situés sur des droites parallèles entre elles

$$ux + vy = \varphi + 2k\pi \tag{3}$$

et perpendiculaires au vecteur (u,v). Un signal sinusoïdal réel a pour transformée un couple d'impulsions de Dirac situées en (u,v) et $(-u,-v)$. Si la phase à l'origine est nulle, les deux impulsions de Dirac sont réelles et ont la même amplitude. Si la phase est $\pi/2$, leurs amplitudes sont imaginaires pures et opposées.

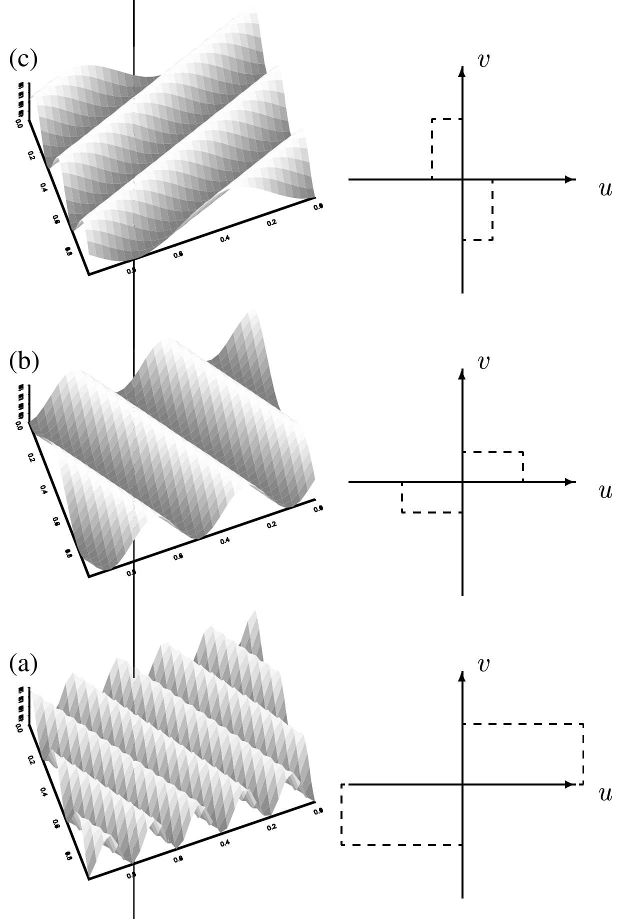


FIG. 2: Modification des paramètres d'une sinusoïde bidimensionnelle : (a) $u = 2, v = 4$;(b) $u = 1, v = 2$;(c) $u = 2, v = -1$.

La partie réelle et la partie imaginaire de la sinusoïde spatiale apparaissent donc comme des "tôles ondulées" orientées dans la direction $y = -ux/v$. Si on se déplace dans la direction $y = -ux/v$ le signal est constant. Si on se déplace perpendiculairement à cette direction, on "voit" un signal monodimensionnel dont la pulsation est $\sqrt{u^2 + v^2}$. C'est dans cette direction (θ) que la fréquence parait la plus élevée. Dans une autre direction ψ, la fréquence apparente est $\sqrt{u^2 + v^2} \cos(\psi - \theta)$. En particulier un signal tel que $v = 0$ ne dépend pas de y : les points de phase constante de la "tôle ondulée" sont situés sur des parallèles à l'axe des ordonnées. L'impulsion de Dirac est alors située au point $(u, 0)$ du domaine des fréquences c'est à dire sur l'axe des abscisses dans ce domaine.

2.3.2 Interprétation globale de l'image

Exactement comme dans le cas des signaux temporels le module de la transformée de Fourier donne la répartition énergétique en fonction de la fréquence. Cette répartition énergétique se voit mieux en considérant la représentation en coordonnées polaires du plan des fréquences spatiales

$$(u, v) \rightarrow (\omega, \theta) \tag{4}$$

la valeur de $F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ pour un couple (ω, θ) donne l'amplitude d'une sinusoïde complexe de pulsation ω dans la direction θ. Pour de nombreuses images, la moyenne (au sens des probabilités) de l'amplitude est indépendante de la direction θ et décroit régulièrement en fonction de ω. Si on diminue

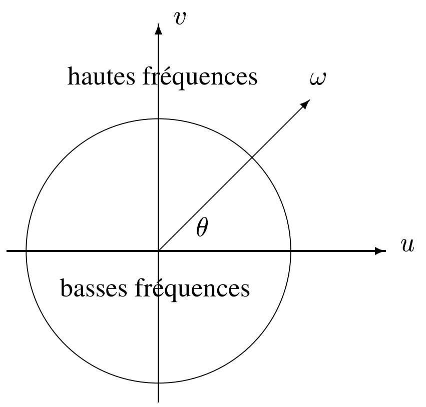


FIG. 3: Les basses fréquences (ω petit) et les hautes fréquences (ω grand) dans une image

l'amplitude des hautes fréquences (filtrage passe bas en fonction de ω pour toutes les valeurs de θ) l'image apparait floue, les contours sont moins nets. Si au contraire on augmente l'amplitude aux hautes fréquences on rehausse les contours mais l'image parait plus bruitée (il y a un grain plus important). La figure 4 illustre cette répartition dans le cas d'une image très simple : un disque de niveau constant auquel on a ajouté une fonction aléatoire.

2.3.3 Sur l'information contenue dans une image

La transformée de Fourier est une fonction complexe, qui a pour chaque composante un module et une phase. Pour la plupart des images, le module est une fonction décroissante de ω, en général de la forme $1/\omega$ parce qu'une image est souvent une fonction continue dans des domaines séparés par des frontières où elle présente des discontinuités. Le module de la transformée de Fourier ne contient que peu d'information. L'information utile est dans les contours. On remarque que cette information se retrouve essentiellement dans la phase de la transformée de Fourier : par exemple dans la figure 5

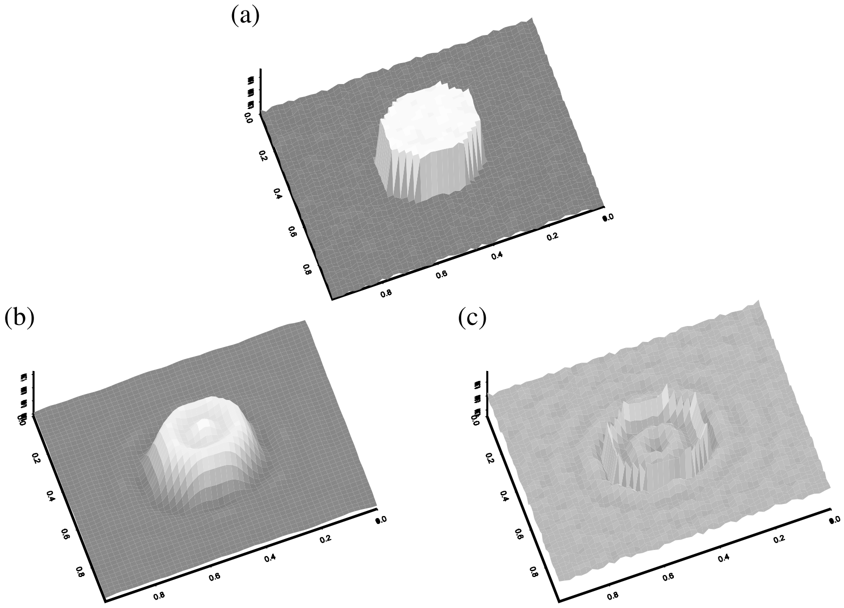


FIG. 4: Les basses fréquences et les hautes fréquences dans une image : (a) image originale ; (b)la composante “basses fréquences” ; (c) la composante “hautes fréquences” (ici les fonctions bidimensionnelles sont montrées en perspectives, l’image serait vue en intensité “à la verticale”

FIG. 5: Effet du remplacement du module de la transformée de Fourier par une constante, la phase étant préservée. On reconnait bien les contours et les régions de l'image originale

2.4 Transformée de Fourier et propagation d'ondes en optique cohérente ou en électromagnétisme

2.4.1 Franges d'interférence

Une source lumineuse ponctuelle monochromatique notée k d'amplitude complexe s_k et de fréquence ω située au point de coordonnées (x_k, y_k, z_k) émet un rayonnement se propageant à la vitesse c. Ce rayonnement mesuré en un point de coordonnées (x, y, z) a pour amplitude complexe

$$f_k(u,v,z,t) = s_k \exp\left(-j\omega[t - \frac{1}{c}\sqrt{(u-x_k)^2 + (v-y_k)^2 + (z-z_k^2)}]\right) \tag{5}$$

Nous avons négligé les facteurs traduisant la diminution de l'intensité en fonction de la distance qui ont un effet secondaire dans le phénomène étudié ici. Nous supposerons que le signal est observé sur un plan $z = 0$ très éloigné de la source k, et que la source k est située sur une sphère $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = R$.

Si u et v sont beaucoup plus petits que R, on peut remplacer $f_k(u, v, z, t)$ par l'approximation

$$f_k(u,v,0,t) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j\frac{\omega}{c}[R\sqrt{1 + \frac{2ux_k) + (2vy_k}{R^2}}] \tag{6}$$

où on a aussi supposé que les termes en $u^2 + v^2$ sont négligeables par rapport à $(ux_k + vy_k)$

$$f_k(u,v,0) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j\frac{\omega}{c}[R(1 + \frac{2ux_k) + (2vy_k}{2R^2})] \tag{7}$$

$$f_k(u,v,0) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j\frac{\omega R}{c} \exp j\frac{\omega}{c}[\frac{ux_k + vy_k}{R}] \tag{8}$$

L''enveloppe" (le facteur de $\exp -j\omega t$) est proportionnelle à

$$g_k(u,v,0) = s_k \exp j\frac{\omega}{c}[\frac{ux_k + vy_k}{R}] \tag{9}$$

On reconnait dans cette formule la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une impulsion de Dirac située au point de coordonnées x_k et y_k. Si on additionne plusieurs sources ponctuelles, le signal observé sera

$$h(u,v) = \sum_k s_k \exp j\frac{\omega}{c}[\frac{ux_k + vy_k}{R}] \tag{10}$$

Si on a deux sources de même amplitude situées aux points (x_k, y_k, z_k) et $(-x_k, -y_k, z_k)$

$$h(u,v) = 2\cos[\frac{\omega(ux_k + vy_k)}{cR}] \tag{11}$$

on observera des franges d'interférence sinusoïdales (transformée de Fourier de deux impulsions de Dirac de même amplitude). Si les sources ne sont plus ponctuelles mais si leur intensité est une fonction continue de x et de y, on obtiendra

$$h(u,v) = \int\int s(x,y) \exp j\frac{\omega}{c}[\frac{ux + vy}{R}]dxdy \tag{12}$$

Dans le plan (u, v) on observe donc la transformée de Fourier de l'image (en pratique on observe plus exactement le carré du module de cette transformée de Fourier).

2.4.2 Relations avec l'holographie

• L'hypothèse de la nature ondulatoire de la lumière a été proposée par Christian Hyugens en 1678. Elle fut affinée dans la théorie de la diffraction d'Augustin Fresnel en 1818, et formalisée de manière plus rigoureuse par Gustav Kirchhoff (1882) puis par Rayleigh et Sommerfeld (1896). Le principe de Hyugens Fresnel peut être énoncé de la manière suivante : chaque point de l'onde lumineuse est considéré comme une source émettrice d'une onde sphérique et l'amplitude de l'onde à un instant ultérieur peut être calculée comme la somme de toutes les ondes sphériques réémises. Fondée sur les propriétés des fonctions de Green, la formule de la diffraction de Raylegh-Sommerfeld s'exprime de la manière suivante :

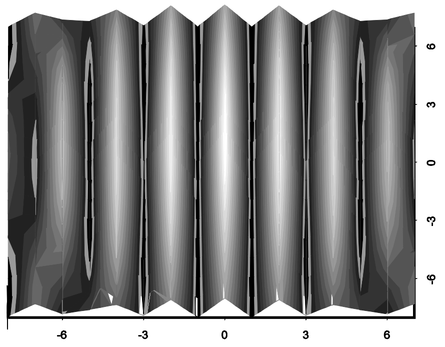


FIG. 6: Les franges d'interférences obtenues à partir de deux sources ponctuelles cohérente apparait comme un signal sinusoïdal dont la fréquence est proportionnelle à la distance séparant les deux sources. Si la distance d'observation est grande, on obtient ainsi la transformée de Fourier de l'image source

Si l'amplitude complexe de l'onde $f(u, v, 0)$ est connue dans un plan $z = 0$, on peut en déduire l'amplitude en un point de coordonnées (x, y, z) en calculant

$$f(x,y,z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v,0) \frac{z \exp\left[j\frac{\omega}{\lambda}\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+z^2}\right]}{(x-u)^2+(y-v)^2+z^2} du dv \tag{13}$$

• Si une lumière cohérente monochromatique éclaire un objet qui la réfléchit, cette lumière réfléchie interfèrera avec la lumière incidente. On peut alors enregistrer sur une plaque photographique sensible ces interférences entre lumière incidente et lumière réfléchie. Si par la suite on éclaire la plaque photographique avec la lumière cohérente, en la regardant, on observera l'image de l'objet qui a engendré les interférences. Si la personne qui regarde la plaque se déplace, elle verra l'objet sous un angle différent, ce qui donne une impression de relief remarquable des hologrammes. L'holographie permet en particulier de calculer et de visualiser la transformée de Fourier bidimensionnelle (si la plaque d'enregistrement est située à une grande distance de l'objet et dans une direction donnée) ; toutefois la nature tridimensionnelle n'apparait plus dans ce cas. Une présentation complète est donnée dans l'ouvrage de J. W. Goodman, “Introduction to Fourier optics”, publié par McGraw Hill en 1968.

2.5 Propriétés de la transformée de Fourier 2D

• On retrouve toutes les propriétés de la transformée de Fourier monodimensionnelle, en particulier les symétries : Si $f(x, y)$ est une fonction réelle, sa transformée de Fourier vérifie

$$F(u,v) = \overline{F(-u,-v)} \tag{14}$$

Si $f(x, y)$ est réelle et $f(x, y) = f(-x, -y)$, alors $F(u, v)$ est aussi réelle et $F(u, v) = F(-u, -v)$.
Si $f(x, y)$ est réelle et $f(x, y) = -f(-x, -y)$, alors $F(u, v)$ est imaginaire et $F(u, v) = -F(-u, -v)$.
• La translation d'un signal se traduit par un déphasage linéaire : si $f(x, y)$ a pour transformée $F(u, v)$, alors $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ a pour transformée

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-j(ux_0+vy_0)} \tag{15}$$

• Homothétie dans une direction : Si on dilate $f(x, y)$ dans la direction $0x$

$$g(x,y) = f(kx,y) \tag{16}$$

la transformée $G(u, v)$ de $g(x, y)$ est

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(kx,y)e^{-j(ux+vy)} dx dy \tag{17}$$

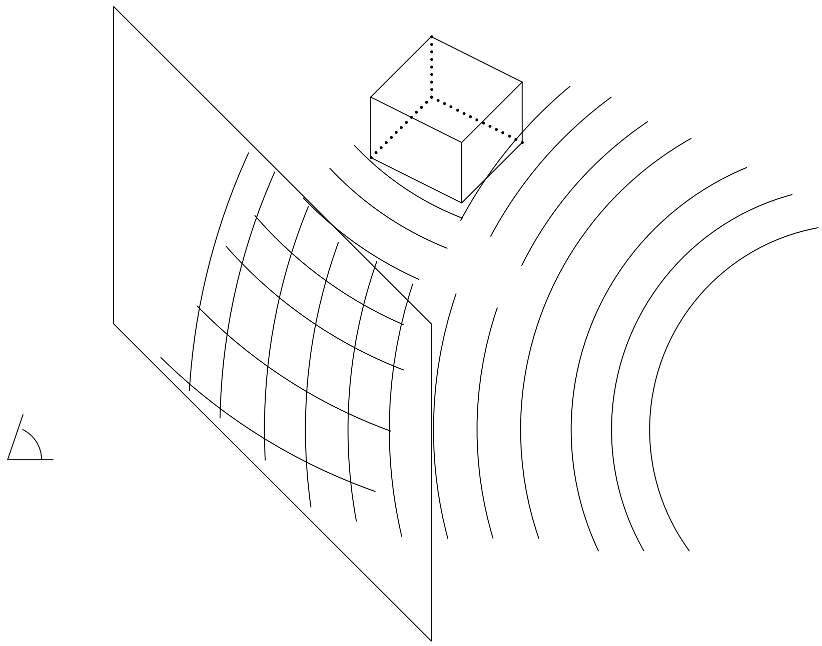


FIG. 7: Schéma de l’enregistrement et de la visualisation d’un objet par hologramme : Les ondes émises par la source lumineuse cohérente interfèrent avec les ondes réfléchies. Ces interférences sont enregistrées sur une plaque. Lorsqu’on illumine cette plaque par la source cohérente, l’observateur qui la regarde voit l’image de l’objet éclairé.

En effectuant le changement de variable$z = kx$

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z,y)e^{-j(\frac{uz}{k}+vy)}\frac{1}{k}dzdy \tag{18}$$

soit

$$G(u,v) = \frac{1}{k}F(\frac{u}{k},v) \tag{19}$$

La dilatation d'une image se traduit par une homothétie inverse de la variable correspondante (une réduction) dans le plan des fréquence. Si on effectue la même dilatation d'un facteur k dans les deux directions $g(x,y) = f(kx,ky)$ (dilatation sans déformation de l'image), il y a contraction $1/k$ de la transformée de Fourier

$$G(u,v) = F(\frac{u}{k},\frac{v}{k}) \tag{20}$$

• Rotation d'une image

$$g_\theta(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta). \tag{21}$$

Par transformée de Fourier on obtient

$$G_\theta(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)e^{-j(ux+vy)}dxdy. \tag{22}$$

En faisant le changement de variable

$$\begin{aligned} s &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ t &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} x &= s\cos\theta - t\sin\theta, \\ y &= s\sin\theta + t\cos\theta \end{aligned} \tag{24}$$

On obtient

$$G_\theta(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(us\cos\theta - ut\sin\theta + vs\sin\theta + vt\cos\theta)}f(s,t)dsdt. \tag{25}$$

soit

$$G_\theta(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[(u\cos\theta + v\sin\theta)s + (-u\sin\theta + v\cos\theta)t]}f(s,t)dsdt. \tag{26}$$

La rotation se traduit donc par une rotation identique dans le plan des fréquences.
• Inclinaison d'un signal : soit une image inclinée

$$g(x,y) = f(x - my, y) \tag{27}$$

Sa transformée de Fourier est

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-my,y)e^{-j(ux+vy)}dxdy \tag{28}$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à x

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvy}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-my,y)e^{-jux}dx\right]dy \tag{29}$$

On peut faire le changement de variable $x - my = z$

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvy}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z,y)e^{-juz+jumy}dz\right]dy \tag{30}$$

L'intégrale en fonction de la variable z est la transformée de Fourier d'une ligne horizontale de l'image $f(z,y)$. On lui fait subir un déphasage e^{jumy} correspondant à une translation de longueur m.

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvy+jumy}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z,y)e^{-juz}dz\right]dy \tag{31}$$

$G(u, v)$ est la transformée de Fourier de $f(z, y)$ calculée pour u et $(v - um)$

$$G(u, v) = F(u, v - um) \tag{32}$$

La transformée d'un signal incliné est par rapport à l'axe vertical subit une inclinaison identique mais par rapport à l'axe horizontal. Si la fonction est inclinée suivant une pente m, sa transformée de Fourier est inclinée suivant une pente $-1/m$

2.6 Transformée de Fourier d'une convolution 2D

Ce résultat est sans doute le plus important concernant les transformées de Fourier bidimensionnelles. C'est l'extension directe du résultat obtenu dans le cas monodimensionnel. L'importance fondamentale de ce résultat est dûe au fait que dans de nombreuses applications, l'opération effectuée sur un signal bidimensionnel est une application linéaire invariante spatialement. Elle se traduit alors par une convolution. On retrouve ce type d'opération en traitement d'images, en optique, dans les études portants sur la propagation d'ondes en électromagnétisme et en mécanique quantique où on peut aussi exprimer une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants sous la forme d'une convolution.

Dans ce type d'application (convolution, filtrage par un système linéaire invariant spatialement, équation différentielle linéaire à coefficients constants) on voir que si on applique l'opérateur à un signal sinusoïdal de fréquence (u, v), le signal obtenu sera un signal sinusoïdal de même fréquence (u, v) exactement comme dans le cas monodimensionnel. L'amplitude et la phase pourront être modifiées, mais la forme du signal sinusoïdal ne le sera pas.

2.6.1 Convolution bidimensionnelle

Une convolution 2D s'écrit

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) h(x - s, y - t) ds dt \tag{33}$$

On remarquera que le résultat de la convolution d'une fonction $f(x, y)$ avec une impulsion de Dirac à l'origine $\delta(x)\delta(y)$ est la fonction elle même.

La convolution de par une impulsion de Dirac décalée $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ produit une fonction translatée $f(x - x_0, y - y_0)$

2.6.2 Expression dans le domaine des fréquences

La transformée de Fourier de la convolution est

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(ux+vy)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) h(x - s, y - t) ds dt \right] dx dy \tag{34}$$

Nous admettrons que les conditions autorisant la modification de l'ordre de calculs des intégrales sont vérifiées. En effectuant le changement de variable

$$x' = x - s \tag{35}$$
$$y' = y - t, \tag{36}$$

on obtient

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[u(x'+s)+v(y'+t)]} f(s, t) h(x', y') ds dt \right] dx' dy' \tag{37}$$

ce qui peut s'écrire

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[us+vt]} f(s, t) ds dt \right] h(x', y') e^{-j[ux'+vy']} dx' dy' \tag{38}$$

ou encore

$$G(u, v) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[us+vt]} f(s, t) ds dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x', y') e^{-j[ux'+vy']} dx' dy' \right] \tag{39}$$

soit, en fonction des transformées $F(u,v)$ et $G(u,v)$ de $f(x,y)$ et $h(x,y)$

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v) \tag{40}$$

La transformée de Fourier d'une convolution est le produit des transformées de Fourier des fonctions convoluées.

Comme la transformée de Fourier inverse a une forme identique à la transformée, la transformée de Fourier d'un produit $f(x,y).h(x,y)$ est le produit de convolution des transformées des deux facteurs.

2.7 Transformée de Fourier de fonctions séparables

Si une fonction $g(x,y)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x,y) = g(x)h(y) \tag{41}$$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(y)e^{-j[ux+vy]}dxdy \tag{42}$$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jux}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-jvy}dy\right]dx \tag{43}$$

Elle est donc égale au produit des transformées $G(u)$ et $H(v)$ de $g(x)$ et $h(y)$:

$$F(u,v) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jux}dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-jvy}dy\right] \tag{44}$$

$$F(u,v) = G(u)H(v) \tag{45}$$

2.7.1 Cas d'une fonction d'une seule variable

Si $f(x,y)$ est fonction uniquement de la variable x

$$f(x,y) = g(x) \tag{46}$$

$$F(u,v) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jux}dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvy}dy\right] \tag{47}$$

La seconde intégrale est la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac

$$F(u,v) = G(u)\delta(v) \tag{48}$$

$F(u,v)$ est nulle partout sauf lorsque $v = 0$ où elle est donnée (à un facteur multiplicatif près) par la transformée de Fourier de $g(x)$.

2.8 Le théorème de projection de Radon

Un résultat parfois utile (et essentiel pour la reconstitution d'images en tomographie) est le théorème de projection suivant (qui n'a rien à voir avec le théorème de projection donnant la distance minimale entre deux sous espaces).

On construit à partir d'une fonction $f(x,y)$ la fonction

$$g(t) = m\int_{-\infty}^{\infty} f[x, m(t-x)]dx \tag{49}$$

ce qui correspond à une intégration de la fonction $f(x,y)$ le long d'une oblique de pente $-m$ passant par le point de coordonnées $(t,0)$. Sa transformée de Fourier monodimensionnelle est

$$G_m(\omega) = m\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f[x, m(t-x)]e^{-j\omega t}dxdt \tag{50}$$

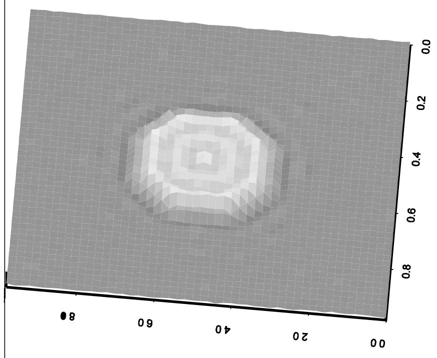


FIG. 8: Oscillations apparaissant lors du filtrage passe-bas d'une image

En faisant le changement de variable $y = m(t - x)$

$$G_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x, y] e^{-j\omega(x + \frac{y}{m})} dx dy \tag{51}$$

En posant $u = w$, $v = \omega/m$, on reconnait dans $G(\omega)$ la valeur de la transformée de Fourier bidimensionnelle $F(u, v)$ de $f(x, y)$ le long d'une droite passant par l'origine et de pente $1/m$.

La transformée de Fourier d'une projection parallèlement à un axe de pente $-m$ est égale à la valeur de la transformée de Fourier bidimensionnelle du signal projeté le long d'un axe de pente $1/m$.

On peut comprendre simplement ce resultat en considérant en particulier le cas où la pente m est nulle. Dans ce cas la valeur de la transformée $F(0, v)$ est

$$F(0, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(0.x + vy)} dx dy \tag{52}$$

$$F(0, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] e^{-jvy} dy \tag{53}$$

La transformée de Fourier $G_0(\omega)$ de la projection de Radon

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \tag{54}$$

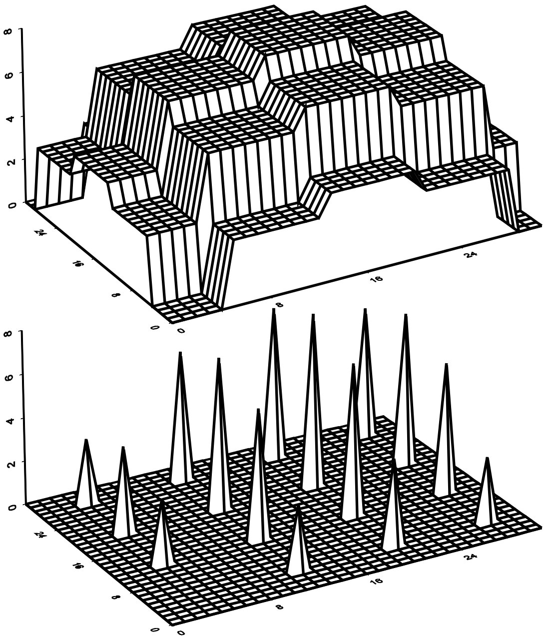
est

$$G_0(\omega) = F(0, \omega) \tag{55}$$

C'est la composante basses fréquences le long de l'axe des ordonnées dans le plan des fréquences. On retrouve le résultat pour une projection d'angle quelconque en appliquant le théorème sur l'effet d'une rotation sur la transformée de Fourier.

2.9 Effet de halo :Phénomène de Gibbs, tâche d'Airy, diffraction de Fraunhofer

Le filtrage passe-bas se traduit dans le domaine spatial par une convolution de la fonction étudiée par une fonction du type $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$. Ce phénomène d'oscillations se retrouve en optique. En effet, un appareillage optique peut être interprété comme un système qui sélectionne uniquement les basses fréquences et élimine les composantes fréquentielles pour les fréquences extérieures à un disque de rayon donné. L'appareil optique agit ainsi comme un filtre passe-bas. Dans le domaine spatial, il a un effet de convolution sur l'objet étudié. L'opérateur de convolution est la transformée de Fourier inverse de la fenêtre sélectionnant les composantes dans le domaine des fréquences. C'est souvent la transformée inverse d'un disque. Cette transformée inverse présente les mêmes caractéristiques que la transformée monodimensionnelle d'une fonction créneau : elle présente des oscillations (phénomène de Gibbs pour les signaux monodimensionnels) qui se traduisent sous la forme de "halos" entourant les images des objets étudiés.



(b)

(a)

FIG. 9: Les représentations spatiales d'une image échantillonnée : (a) représentation sous forme d'impulsions en cohérence avec l'interprétation du théorème d'échantillonnage ; (b)représentation habituelle sous forme de "pixels" de niveau constant

3 Echantillonnage des signaux 2D

Les problèmes posés par l'échantillonnage des signaux bidimensionnels sont similaires à ceux des signaux monodimensionnels. La théorie de Shannon s'applique de la même manière. Toutefois, une interprétation dans un espace à deux dimensions est nécessaire pour mieux comprendre les phénomènes liés à l'échantillonnage, comme les effets de la géométrie du motif d'échantillonnage. Nous mentionnerons aussi les compromis qu'il faut faire entre la nécessité d'une rigueur théorique et les spécificités de certaines applications en traitement numérique des images.

3.1 Une remarque préliminaire importante

Les spécialistes du traitement numérique des images ont l'habitude de représenter une image échantillonnée sous la forme de "pixels", des carrés où l'intensité de l'image est constante. Ce n'est pas l'interprétation compatible avec la théorie de l'échantillonnage. Il faut considérer l'image comme un ensemble d'impulsions de Dirac où chaque impulsion est au centre d'un pixel et a pour amplitude l'intensité de ce pixel. Tout le reste du pixel a une intensité nulle. La représentation habituelle sous forme de pixels correspond au filtrage de l'image composée d'impulsions d'amplitude variable par un filtre dont la réponse impulsionnelle est une fonction égale à un à l'intérieur du carré support d'un pixel centré à l'origine et nulle partout ailleurs (équivalent bidimensionnel du bloqueur d'ordre zéro pour les signaux temporels)

3.2 Echantillonnage rectangulaire ou carré

Parmi tous les échantillonnages réguliers possibles, l'échantillonnage carré est le plus courant. Nous étudierons plus spécialement ce cas et nous verrons ensuite comment on peut étendre les résultats obtenus dans ce cas au cas de l'échantillonnage en quinconce

3.2.1 “Brosse” d’impulsions de Diracs

Une impulsion de Dirac dans le plan est telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x,y)dxdy = f(0,0) \tag{56}$$

ce qui correspond à

$$\delta(x,y) = \delta(x)\delta(y) \tag{57}$$

On peut considérer que l’échantillonnage est obtenu en faisant le produit du signal par une “brosse” $b(x,y)$ d’impulsions de Dirac.

$$g(x,y) = f(x,y)b(x,y) = f(x,y)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x)\delta(y-n\Delta y) \tag{58}$$

Cette brosse $b(x,y)$ peut être considérée comme le produit de deux peignes étendus l’un dans la direction Ox soit $p_x(x,y)$ de période Δx et l’autre dans la direction Oy soit $p_y(x,y)$ de période Δy.

$$p_x(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x) \tag{59}$$

$$p_y(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-n\Delta y) \tag{60}$$

$$b(x,y) = p_x(x,y).p_y(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-m\Delta y) \tag{61}$$

3.2.2 Interprétation fréquentielle de l’échantillonnage

Le peigne étendu $p_x(x,y)$ de période Δx a pour transformée de Fourier un peigne d’impulsions de Dirac $P_x(u,v)$ (ce n’est pas un peigne étendu) situés sur l’axe Ou et de période $2\pi/\Delta x$ soit

$$P_x(u,v) = \delta(v)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(u-k/\Delta x) \tag{62}$$

La Transformée de Fourier $P_y(u,v)$ de $p_y(x,y)$ est un peigne de période $2\pi/\Delta y$ situé sur l’axe Ov

$$P_y(u,v) = \delta(u)\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta(v-\ell/\Delta y) \tag{63}$$

La Transformée du produit des deux peignes étendus (la brosse) est donc une convolution de deux peignes perpendiculaires, c’est-à-dire une brosse : La transformée de Fourier de $p(x,y)$ est la convolution de ces deux fonctions

En effet, la convolution d’une fonction et d’une impulsion de Dirac située au point (u,v) est égale à la translation de cette fonction de l’origine au point (u,v). La convolution d’une fonction définie uniquement sur l’axe $0u$ et d’un peigne défini sur l’axe $0v$ est donc la répétition de cette fonction par une suite de translations suivant $0v$. Si la fonction convoluée est un peigne suivant l’axe Ou, le résultat de la convolution sera une suite de reproductions de ce peigne horizontal le long de l’axe vertical

3.2.3 Le repliement spectral dans le cas bidimensionnel

La transformée de Fourier $G(u,v)$ de la fonction échantillonnée $g(x,y)$ est la convolution de la brosse (Transformée de la fonction d’échantillonnage) dans le domaine des fréquences et de $F(u,v)$ transformée de l’image avant échantillonnage. C’est donc la somme des reproductions de $F(u,v)$ déduites de $F(u,v)$ par translation aux points de coordonnées $(2k\pi/\Delta x, 2k\pi/\Delta y)$. Il y a périodisation bidimensionnelle de la transformée de Fourier de l’image initiale

$$G(u,v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} F(u-k/\Delta x, v-\ell/\Delta y) \tag{64}$$

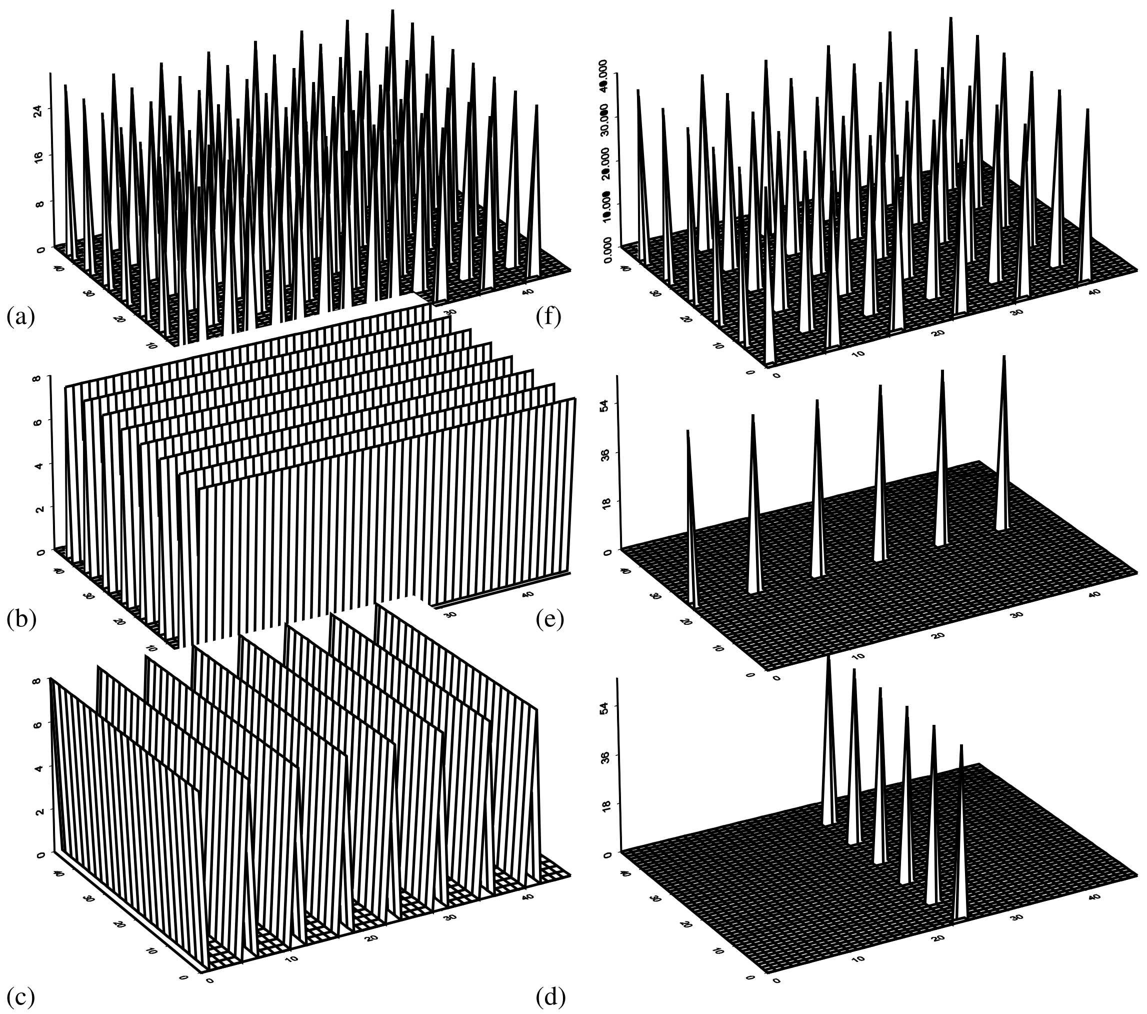


FIG. 10: Illustration de l'échantillonage dans le domaine des fréquences(a) brosse d'échantillonage dans le domaine spatial ; (b)peigne étendu suivant l'axe des abscisse ;(c)peigne étendu suivant l'axe des ordonnées ;(d)peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des ordonnées ;(e)peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des abscisses ;(f)transformée de la brosse : c'est aussi une brosse obtenue par convolution des deux peignes dans le domaine des fréquences

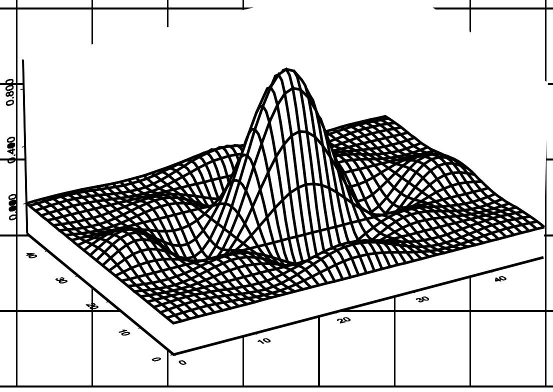


FIG. 11: Réponse impulsionnelle d'un filtre réalisant l'interpolation idéale

3.3 Reconstitution d'un signal continu à partir du signal échantillonné

3.3.1 Le théorème d'échantillonnage

Pour reconstituer le signal "analogique" (par analogique nous entendons le signal fonction des variables spatiales continues x et y), il faut reconstituer $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$ ou bien, ce qui est équivalent, $F(u, v)$ à partir de $G(u, v)$ dans le domaine des fréquences. Une façon simple de procéder est de faire en sorte qu'il y ait un seul terme non nul dans la sommme (64) et donc que $F(u, v)$ soit de support fini en principe dans le domaine des basses fréquences contenant l'origine). Ainsi, il n'y ait pas recouvrement des différentes reproductions décalées de $F(u, v)$. Avant d'échantillonner, il faut donc filtrer passe-bas l'image de sorte que

$$F(u, v) = 0 \text{ pour } |u| \geq \pi/\Delta x, |v| \geq \pi/\Delta y \tag{65}$$

Cette méthode correspond aux cas les plus simples. On peut l'affiner pour traiter certains cas un peu plus complexes.

Si cette hypothèse est vérifiée, pour retrouver $F(u, v)$ il faut sélectionner la composante de $G(u, v)$ intérieure au rectangle

$$-\pi/\Delta x < \quad u \quad < \pi/\Delta x \tag{66}$$
$$-\pi/\Delta y < \quad v \quad < \pi/\Delta y. \tag{67}$$

Il faut donc filtrer passe-bas le signal $g(x, y)$.

Dans le cas de l'échantillonnage à motif carré ou rectangulaire, nous supposerons que $\Delta x = \Delta y = 1$. Dans ce cas la réponse impulsionnelle $h(x, y)$ est la transformée de Fourier inverse du carré. C'est une intégrale séparable en un produit de deux sinus cardinaux

$$h(x, y) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \tag{68}$$

Le signal reconstitué sera alors

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m, n) \frac{\sin \pi(x - m)}{\pi(x - m)} \frac{\sin \pi(y - n)}{\pi(y - n)} \tag{69}$$

Notons que cette approche rigoureuse supposant un filtrage passe-bas avant l'échantillonnage n'est pas nécessairement utilisées dans toutes les applications en traitement numérique des images ; en particulier les études qui portent sur les détections de contours et de régions n'apprécient pas toujours les oscillations parasites de ce filtrage passe-bas. Toutefois, il n'est pas interdit de penser que cet échantillonage correct peut être envisagé même dans ce type d'applications.

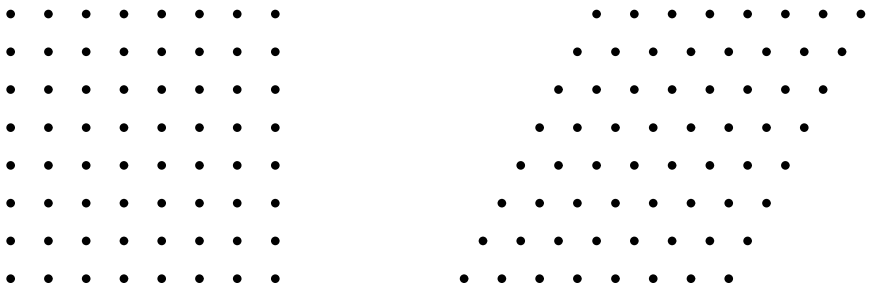


FIG. 12: Echantillonnage rectangulaire et échantillonnage parallélogramme

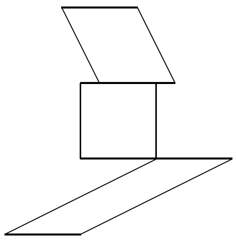


FIG. 13: Trois pavages réguliers du plan sous la forme de parallélogrammes

3.4 Echantillonnage parallélogramme

Dans certaines applications l'échantillonnage rectangulaire n'est pas possible ou n'est pas le plus judicieux. On peut être amené à effectuer un échantillonnage régulier mais en quinconce : les points relevés sont situés sur une grille $(m\vec{a}, n\vec{b})$ où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs respectivement inclinés sur l'axe Ox d'un angle θ et φ . La brosse d'échantillonnage est alors déformée, le rectangle devenant un parallélogramme. Cette brosse est ici encore le produit de deux peignes étendus mais perpendiculaires aux directions θ et φ . Sa transformée de Fourier sera la convolution de deux peignes de Dirac . L'un est situé sur l'axe de direction $\pi/2 + \theta$ et sa période est $2\pi/|a|$. L'autre est situé sur l'axe de direction $\pi/2 + \varphi$ et sa période est $2\pi/|b|$.

Il n'y aura pas recouvrement spectral si la transformée de Fourier du signal échantillonné est nulle en dehors du parallélogramme dont les quatre sommets sont les extrémités des vecteurs $\pm\pi j\vec{a}/|a|^2$ et $\pm j\pi\vec{b}/|b|^2$

Mais il existe plusieurs figures élémentaires permettant de paver le plan sans qu'il y ait de recouvrement, en particulier différents parallélogrammes La réponse impulsionnelle du filtre passe-bas dépend de la forme du support du filtre d'échantillonnage, elle restera en général un produit de fonctions du type $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$. On trouve la forme correcte du filtre en utilisant le résultat sur l'inclinaison des transformées de Fourier (paragraphe 2.5)

3.5 Echantillonnage hexagonal (en quinconce)

Une autre configuration utile de l'échantillonnage est celle où chaque point (on parle souvent de pixel dans le cas des images) est équidistant de ses deux voisins sur la même ligne, des deux points situés sur la ligne supérieure et des deux points situés sur la ligne inférieure. Les six plus proches voisins de chacun des points forment un hexagone régulier. Si l'écart entre deux points d'une même ligne est pris égal à 1, celui entre les lignes est $sqrt(3)/2$, le décalage des points d'une ligne à l'autre est 1/2.

Dans ce cas on peut redécouper le parallélogramme permettant un pavage du plan des fréquences pour le transformer en un hexagone régulier. Ce choix d'échantillonnage (souvent appelé hexagonal) peut être intéressant lorsque le support de la transformée de Fourier de l'image $F(u, v)$ est un disque. L'hexagone régulier circonscrit à ce disque est plus petit que le carré. Le rapport des surfaces est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (plus les dimensions du support spectral de la fonction à échantillonner sont petites, plus les dimensions du motif d'échantillonnage peuvent être grandes)

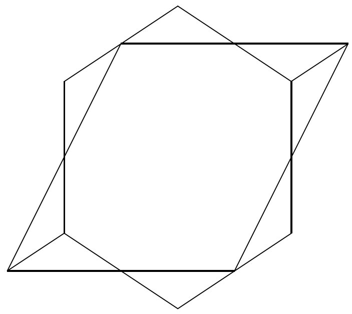


FIG. 14: Deux pavages réguliers du plan : l'un sous la forme d'un parallélogramme, l'autre sous la forme d'un hexagone

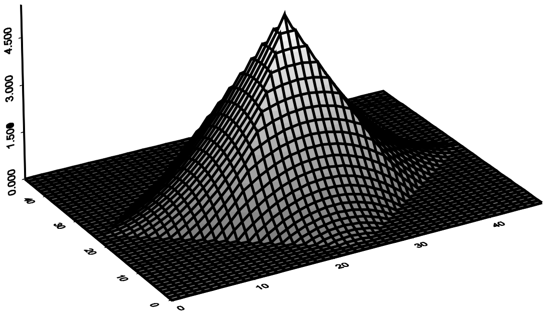


FIG. 15: Réponse impulsionnelle d'un filtre réalisant l'interpolation linéaire par morceaux

3.5.1 Quelques remarques sur le choix de la fonction d'échantillonnage

Pour ne pas suréchantillonner inutilement une image, on est amené à tenir compte de la répartition énergétique du signal dans le plan des fréquences.

Par souci de simplicité on peut être amené à choisir un échantillonnage carré ou rectangulaire, ce qui permet par exemple l'implantation d'un filtre sous la forme d'un filtrage en abscisse suivi d'un filtrage suivant les ordonnées (filtre séparable). Mais cet échantillonnage ne sera en général pas optimal.

Pour optimiser l'échantillonnage il faut considérer la densité spectrale moyenne de l'image. On peut envisager d'abord le cas où cette répartition spectrale de l'énergie est isotrope : $|F(u,v)|^2$ ne dépend que de $u^2 + v^2$. Alors le pavage réguier le plus compact du plan des fréquences par une surface est le pavage par un hexagone. On choisira donc un échantillonage hexagonal.

Dans d'autres applications, en particulier en transmission d'images, on peut considérer que la transformée de Fourier est négligeable pour $|u| + |v| < k$. Le pavage le plus compact du plan des fréquences est le pavage par un losange régulier (un carré tourné de 45 degrés). Par conséquent l'échantillonnage optimal sera un échantillonnage parallélogramme régulier (losange). Notons qu'en général il y a une symétrie des caractéristiques fréquentielles de l'image en u et en v si bien que les échantillonnages faisant apparaitre une dissymétrie en x et en y sont rares. Mais c'est cependant le cas lorsque l'échantillonage se fait par relevés (en géophysique par exemple) l'axe du support des capteurs ne peut pas toujours être perpendiculaire à la trajectoire du mobile entrainant ce support.

3.5.2 Reconstruction pratique des signaux bidimensionnels

Les reconstitutions idéales supposent la réalisation d'un filtre de support infini. En pratique il faut donc limiter ces réponses impulsionnelles. Souvent on se contente d'un simple filtrage passe-bas ligne par ligne (dans le cas des signaux de télévision par exemple). On peut affiner la reconstitution en faisant une interpolation linéaire. Le filtre d'interpollation linéaire est la généralisation du filtre monodimensionnel de réponse impulsionnelle triangulaire : c'est une pyramide dont la base dépend de la configuration de l'échantillonnage : carré, hexagone, losange.

Notons que dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ on ne peut pas faire une interpolation linéaire à l'intérieur d'un carré ayant quatre sommets (la valeur en trois points suffit à caractériser un plan). On peut contourner cette difficulté en faisant un premier calcul donnant la valeur de la fonction interpolée au centre du carré comme la moyenne des quatre valeurs aux sommets puis en effectuant une interpolation linéaire sur chacun des quatre triangles ayant pour sommets le centre du carré et deux sommets adjascents du carré. Dans le cas d'un échantillonnage hexagonal la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse d'une fonction constante à l'intérieur d'un hexagone Dans le cas d'un échantillonnage en losange, on obtient une formule analogue mais avec un support losange.

3.6 Traitement d'images et échantillonnage

En principe, l'échantillonnage nécessite le respect des conditions de Shannon (limitation de la bande de fréquence) et donc un filtrage passe-bas préalable des images. Or, la plupart du temps, les images présentent des discontinuités car elles sont souvent composées de régions d'intensité continue séparées par des frontières (les contours). Donc, si on applique un filtrage passe-bas pour respecter les conditions de Shannon, on atténue le contraste au niveau du contour et on introduit le phénomène de suroscillation de Gibbs (cf. le paragraphe 2.9). Ceci dégrade la qualité visuelle des images et peut diminuer les performances de certains algorithmes de détection de contour. Les spécialistes du traitement d'image préfèrent parfois admettre un certain degré de repliement spectral plutôt que de respecter la théorie de l'échantillonnage, ce qui peut avoir des effets néfastes pour certaines applications. La reconstruction d'un signal correct entre les points d'échantillonage peut alors se fonder sur le modèle théorique (continuité par régions, discontinuité aux contours, en supposant que les formes de contours ne sont pas trop complexes).

4 Représentation fréquentielle des signaux discrets bidimensionnels

4.1 La transformée en z bidimensionnelle dans le cas de l'échantillonnage carré

4.1.1 Définition

On définit deux opérateurs de translation élémentaires de Δx et Δy suivant les directions $0x$ et $0y$ du plan. On associe à chacun de ces opérateurs une variable z_x et z_y. La valeur de la transformée en z d'un échantillon d'amplitude $f(m, n)$ situé en un point de coordonnées m et n est alors, en prenant des pas d'échantillonnage Δx et Δy égaux à un dans les deux directions

$$F(z_x, z_y) = f(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n} \tag{70}$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par sommation

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n} \tag{71}$$

Elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général une couronne contenant le tore “produit” des deux cercles $z_x = z_y = 1$ de rayon un. Sur ce domaine, elle prend la forme d'une transformée de Fourier

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(m,n) e^{-j(ux+vy)} \tag{72}$$

4.1.2 Cas des fonctions séparables

Si la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit

$$f(x,y) = h(x) g(y) \tag{73}$$

la transformée $F(z_x, z_y)$ est séparable

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(x) z_x^{-m} \sum_{-\infty}^{\infty} g(y) z_y^{-n} = H(z_x) G(z_y) \tag{74}$$

où $H(z_x)$ et $G(z_y)$ sont les transformées de $h(x)$ et $g(y)$.

C'est le produit de deux transformées en z monodimensionnelles. Notons qu'il peut être pratique d'utiliser des fonctions séparables pour lesquelles le calcul des propriétés est facilité et dont l'implantation peut se faire beaucoup plus simplement dans le cas du filtrage par exemple.

4.1.3 Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle

Si on pose

$$z_x = \exp(ju) \tag{75}$$
$$z_y = \exp(jv) \tag{76}$$

la transformée en z s'écrit

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(m,n) \exp -j(mu + nv) \tag{77}$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonnné (de la “brosse” d'impulsions de Dirac dont les amplitudes sont $f(x, y)$).Elle est donc périodique et obtenue par addition des répétition de la transformée de Fourier du signal analogique. La périodicité est de 2π pour chacune des variables car on a choisi un pas d'échantillonnage entier dans les deux directions.

4.1.4 La transformée inverse

C'est la généralisation de la transformée de Fourier inverse.

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{C_x} \left[\oint_{C_y} F(z_x, z_y) z_y^y \frac{dz_y}{z_y} \right] z_x^x \frac{dz_x}{z_x} \tag{78}$$

Les intégrations se faisant sur un contour fermé autour de l'origine intérieur au domaine de définition de la transformée. On vérifie la validité de cette expression en la reportant dans la définition de la transformée en z (cf. le cas des fonctions monodimensionnelles).

Son utilisation pratique ne se fait que guère que dans le cas de la transformée de Fourier

$$z_x = e^{ju}, z_y = e^{jv}$$

soit

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{ju}, e^{jv}) e^{jux}, e^{jvy} du dv \tag{79}$$

4.2 Les propriétés essentielles

Les propriétés des transformées monodimensionnelles sont conservées.

4.2.1 Transformée d'une convolution

En particulier on montre que la transformée d'une convolution est le produit des transformées des deux fonctions convoluées : soit la convolution bidimensionnelle

$$f(x,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} g(s,t) h(x-s, y-t) \tag{80}$$

et sa transformée en z

$$F(z_x, z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(s,t) h(x-s, y-t) z_x^{-x} z_y^{-y} \tag{81}$$

En introduisant artificiellement

$$z_x^{-x} z_y^{-y} = z_x^{-x+s} z_y^{-y+t} z_x^{-s} z_y^{-t} \tag{82}$$

l'eq. (81) devient

$$F(z_x, z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(s,t) h(x-s, y-t) z_x^{-x+s} z_y^{-y+t} z_x^{-s} z_y^{-t} \tag{83}$$

le changement de variable

$$\begin{aligned} x' &= x - s \\ y' &= y - t \end{aligned} \tag{84}$$

appliqué à l'eq. (83) donne

$$F(z_x, z_y) = \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(s,t) h(x', y') z_x^{-x'} z_y^{-y'} z_x^{-s} z_y^{-t} \tag{85}$$

équation qui se sépare en un produit

$$F(z_x, z_y) = \left[\sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} h(x', y') z_x^{-x'} z_y^{-y'} \right] \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(s,t) z_x^{-s} z_y^{-t} \right] \tag{86}$$

$$F(z_x, z_y) = G(z_x, z_y) H(z_x, z_y) \tag{87}$$

où $G(z_x, z_y)$ et $H(z_x, z_y)$ sont les transformées en z de $g(x,y)$ et $h(x,y)$.

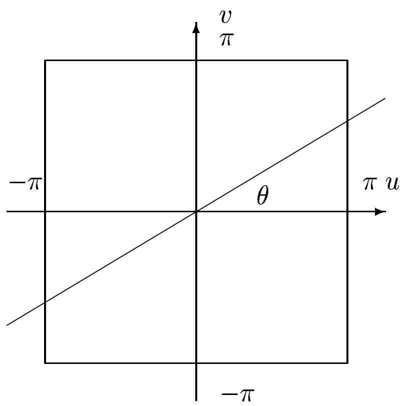


FIG. 16: Support de la transformée de Radon pour un signal à bande spectrale limitée à support carré

4.2.2 Transformée d'un produit

La transformée d'un produit est la généralisation d'une convolution circulaire

$$f(x,y) = g(x,y)h(x,y) \tag{88}$$

a pour transformée

$$F(z_x, z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y)h(x,y)z_x^{-x}z_y^{-y} \tag{89}$$

Dans cette expression on peut écrire $h(x,y)$ en fonction de sa transformée $H(z_x, z_y)$. Nous ne considérons que le cas particulier

$$z_x = e^{ju}, z_y = e^{jv}$$

ce qiu donne

$$h(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jr}e^{jw})e^{jrx}, e^{jwy} drdw \tag{90}$$

ou encore

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y) \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jr}e^{jw})e^{jrx}, e^{jwy} drdw\right] e^{-jux}, e^{-jvy} \tag{91}$$

En inversant l'ordre des sommations

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jr}, e^{jw} \left[) \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j(u-r)x}, e^{-j(v-w)y}\right] drdw \tag{92}$$

La somme double est la transformée en z de $g(x,y)$ calculée en $z_x = e^{j(u-r)}, z_y = e^{j(v-w)}$

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jr}, e^{jw})G(e^{j(u-r)}, e^{j(v-w)})drdw \tag{93}$$

$G(e^{ju}, e^{jv})$ et $H(e^{ju}, e^{jv})$ sont des fonctions périodiques de u et v. $F(e^{ju}, e^{jv})$ est la généralisation bidimensionnelle d'une convolution circulaire.

4.2.3 Remarque sur le théorème de projection de Radon dans le cas des signaux échantillonnés

L'application directe du théorème de projection n'a pas d'intérêt dans le cas des signaux échantillonnés. Elle ne peut être envisagée que dans le cas du signal filtré passe-bas (fonction continue de x et de y, avant échantillonnage). Si le domaine occupée par le signal dans le plan des fréquences est $(-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$, une projection suivant un angle θ (que nous supposerons inférieur à $\pi/4$) aura pour support dans le domaine des fréquences $-\frac{\pi}{\cos\theta}, \frac{\pi}{\cos\theta}$. Si la fonction bidimensionnelle $s(x,y)$ étudiée a pour transformée de Fourier

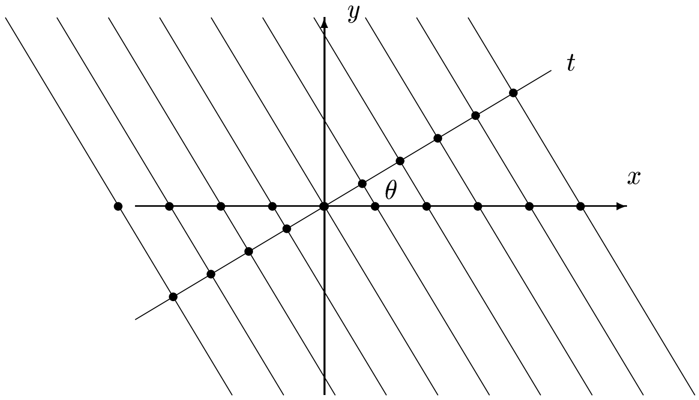


FIG. 17: Le pas maximum d'échantillonnage de la projection de Radon

une fonction constante dans $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ et nulle partout ailleurs, elle vaut

$$s(x, y) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \tag{94}$$

Sa projetée $h(t)$ aura pour transformée de Fourier, soit $H(e^{j\omega}$, une fonction constante dans $-\frac{\pi}{\cos\theta}, \frac{\pi}{\cos\theta}$ et nulle ailleurs. Ce sera donc

$$h(t) = \frac{\sin \pi t \cos\theta}{\pi t \cos\theta} \tag{95}$$

La fonction projetée de $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi y}{\pi y}$ sera donc $\frac{\sin \pi t \cos\theta}{\pi t \cos\theta}$. Plutôt que d'échantillonner la projection suivant l'axe $0t$ avec un pas d'échantillonnage $\cos\theta$, on peut la calculer sur l'axe Ox avec un pas d'échantillonnage égal à un. En effet la projection mesurée le long de l'axe $0t$ a un support dans le domaine spectral $-\frac{\pi}{\cos\theta}, \frac{\pi}{\cos\theta}$ et nécessite donc un échantillonnage suivant un pas égal à $\cos\theta$; Si on la représente sur l'axe $0x$, c'est à dire après une dilatation de $\frac{1}{\cos\theta}$, son support dans le domaine des fréquences sera $(-\pi, \pi)$ (théorème sur la transformée de Fourier d'une fonction dilatée), on pourra donc l'échantillonner suivant un pas de un. L'image "analogique" est la convolution de la séquence des échantillons $f(m, n)$ avec $s(x, y)$ et la fonction projetée s'écrit

$$g_\theta(x) = \sum_m \sum_n f(m, n) \frac{\sin \pi[(x - m)\cos\theta - n \sin\theta]}{(x - m)\cos\theta - n \sin\theta} \tag{96}$$

(il suffit d'appliquer l'opération de projection à $s(x, y)$).

• Rappelons que les propriétés des transformées en z monodimensionnelles sont conservées. En particulier, le théorème de Parseval s'écrit

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi})|G(e^{j(u)}, e^{j(v)})|^2 du dv \tag{97}$$

4.2.4 Extension des propriétés à d'autres motifs d'échantillonnage

Lorsque le motif d'échantillonnage est un parallélogramme, on peut appliquer le théorème sur la transformée de Fourier d'une image inclinée.

4.3 La transformée de Fourier discrète ou DFT

4.3.1 Périodisation du signal spatial

Si le signal est de support fini carré ($T \times T$ échantillons), et si ce signal est répété indéfiniment dans les deux directions, on peut calculer la représentation en série de Fourier de ce signal périodique bidimensionnel. Cette transformée est une double série d'harmoniques définies pour u et v multiples de $2\pi/T$ ($T \times T$ échantillons dans le domaine des fréquences). L'amplitude de chacune de ces harmoniques est égale à la valeur de la transformée du signal tronqué sur le support carré. La transformée de Fourier est une fonction discrète comportant elle aussi $T \times T$ échantillons. La transformée s'obtient par sommation sur une période

$$F(e^{\frac{2\pi ju}{T}} e^{\frac{2\pi jv}{T}}) = \sum_{x=0}^{T-1} \sum_{y=0}^{T-1} f(x,y) e^{-2\pi j \frac{ux+vy}{T}} \tag{98}$$

La transformée inverse s'écrit

$$f(x,y) = \frac{1}{T^2} \sum_{u=0}^{T-1} \sum_{v=0}^{T-1} F(e^{\frac{2\pi ju}{T}} e^{\frac{2\pi jv}{T}}) e^{2\pi j \frac{ux+vy}{T}} \tag{99}$$

Remarque : il ne faut pas oublier que cette transformée de Fourier discrète est la transformée d'une fonction périodique en x et en y dans le domaine spatial, ce qui implique son échantillonnage (sa discrétisation) dans le domaine des fréquences. Comme $f(x,y)$ est une fonction échantillonnée dans le domaine spatial, elle est périodique dans le domaine des fréquences. Les deux fonctions $f(x,y)$ et $F(e^{\frac{2\pi ju}{T}} e^{\frac{2\pi jv}{T}})$ sont toutes les deux des fonctions périodiques et échantillonnées.

4.3.2 La transformée de Fourier rapide bidimensionnelle

4.3.3 Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle

L'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT) peut s'appliquer de la manière suivante. La transformée discrète correspond à une double sommation qu'on peut effectuer en deux temps ; d'abord sur la variable x puis sur la variable y

$$F(e^{\frac{2\pi ju}{T}}, e^{\frac{2\pi jv}{T}}) = \sum_{y=0}^{T-1} \left[\sum_{x=0}^{T-1} f(x,y) e^{-2\pi j \frac{ux}{T}} \right] e^{-2\pi j \frac{vy}{T}} \tag{100}$$

Dans la sommation sur x, y est fixé : on peut y reconnaître une transformée discrète monodimensionnelle sur chacune des lignes du tableau des $T \times T$ valeurs de $f(x,y)$. Cette transformée monodimensionnelle peut se calculer grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle et transforme la ligne numéro y en une ligne de T éléments de la forme $G(e^{2\pi ju/T}, y)$ pour $u = 0, \ldots, T-1$.

$$G(e^{\frac{2\pi ju}{T}}, y) = \sum_{x=0}^{T-1} f(x,y) e^{-2\pi j \frac{ux}{T}} \tag{101}$$

On peut maintenant calculer la transformée de Fourier de chacune des colonnes de ce tableau en appliquant une nouvelle fois un algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle

$$F(e^{\frac{2\pi ju}{T}}, e^{\frac{2\pi jv}{T}}) = \sum_{y=0}^{T-1} G(e^{\frac{2\pi ju}{T}}, y) e^{-2\pi j \frac{vy}{T}} \tag{102}$$

On applique ainsi $2T$ fois l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Cet algorithme nécessite de l'ordre de $2T \log_2 T$ calculs élémentaires. Le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle bidimensionnelle se fait en effectuant de l'ordre de $2T^2 log_2 T^2$ calculs élémentaires. C'est la même quantité de calculs que dans le cas où les T^2 valeurs seraient rangées en une colonne pour permettre le calcul d'une transformée monodimensionnelle mais les calculs ne sont pas identiques.

• Remarque à l'attention des lecteurs connaissant les mécanismes de l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle

Il est possible de réduire de T à $0.75T$ le nombre de calculs élémentaires en combinant les calculs en colonne et en ligne : la transformée rapide monodimensionnelle est une succession de $\log_2 T$ étapes élémentaires ($\ell = 1, 2, 4, \ldots, T-1$). Dans la transformée bidimensionnelle, il est possible d'effectuer l'étape ℓ sur la variable v immédiatement après l'étape ℓ sur la variable u, avant l'étape $\ell + 1$ portant sur u. Nommons $F_\ell(u,v)$,$F_\ell(u+\ell,v)$,$F_\ell(u,v+\ell)$,$F_\ell(u+\ell,v+\ell)$ les quatre données utilisées dans une étape élémentaire $F_{2\ell}(u,v)$,$F_{2\ell}(u+\ell,v)$,$F_{2\ell}(u,v+\ell)$,$F_{2\ell}(u+\ell,v+\ell)$ les résultats de cette étape élémentaire. Si on effectue une étape de la transformée rapide sur les lignes, puis l'étape identique sur les colonnes, la séquence de ces 2 opérations élémentaires (papillon) de la transformée peut s'écrire sous forme matricielle

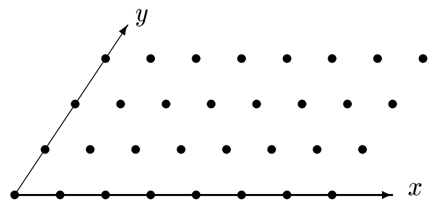


FIG. 18: Image échantillonnée suivant un motif parallélogramme

en posant $a = e^{2\pi j/T}$

$$\begin{bmatrix} F_{2\ell}(u,v) \\ F_{2\ell}(u+\ell,v) \\ F_{2\ell}(u,v+\ell) \\ F_{2\ell}(u+\ell,v+\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^v \\ 1 & 0 & -a^v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a^u & 0 & 0 \\ 1 & -a^u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^u \\ 0 & 0 & 1 & -a^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\ell}(u,v) \\ F_{\ell}(u+\ell,v) \\ F_{\ell}(u,v+\ell) \\ F_{\ell}(u+\ell,v+\ell) \end{bmatrix} \tag{103}$$

ce qui nécessite quatre multiplications élémentaires. Si on effectue le produit des deux matrices avant d'effectuer le produit du vecteur de droite par une matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} F_{2\ell}(u,v) \\ F_{2\ell}(u+\ell,v) \\ F_{2\ell}(u,v+\ell) \\ F_{2\ell}(u+\ell,v+\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a^u & a^v & a^{u+v} \\ 1 & -a^u & a^v & -a^{u+v} \\ 1 & a^u & -a^v & -a^{u+v} \\ 1 & -a^u & -a^v & a^{u+v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\ell}(u,v) \\ F_{\ell}(u+\ell,v) \\ F_{\ell}(u,v+\ell) \\ F_{\ell}(u+\ell,v+\ell) \end{bmatrix} \tag{104}$$

Il suffit, pour effectuer le même calcul, de trois opérations élémentaires, ce qui conduit à l'économie de calculs, si on suppose que les éléments des matrices de la forme a^u ont été préalablement mémorisés.

4.3.4 Transformée de Fourier discrète dans le cas d'un échantillonnage en quinconce et d'un support parallélogramme

Le support de la transformée de Fourier du signal filtré passe-bas avant échantillonnage est un parallélogramme (d'après le théorème sur la transformée de Fourier d'une image inclinée). Si dans le domaine spatial le signal est tronqué (à un support parallélogramme) et périodisé, la transformée de Fourier de ce nouveau signal est une double suite d'harmoniques bidimensionnelles.

Les échantillons dans le domaine spatial sont situés en des points dont les coordonnées sont de la forme $(m\Delta x + na\Delta y, n\Delta y)$, on suppose que le parallélogramme a un côté parallèle à l'axe Ox, et le second fait un angle de tangente a avec l'axe vertical : a donne la pente de ce deuxième coté. Dans le cas d'échantillonnage en quinconce, le signal temporel est le parallélogramme périodisé et dans le domaine des fréquences, les échantillons sont donc des harmoniques situées en des points du plan des fréquences dont les coordonnées sont de la forme

$(2p\pi/T\Delta x, 2q\pi/T\Delta y - 2pa\pi/T\Delta x)$

Alors, si le nombre d'échantillons par ligne et par colonne est une puissance de deux, on peut encore appliquer un algorithme de transformée de Fourier rapide :

On applique par exemple cet algorithme de TRF sur chacune des colonnes pour $p = 0, \ldots, T-1$; puis on multiplie chacune de ces colonnes par une exponentielle de la forme $\exp(-2pa\pi/T\Delta x)$ ce qui revient à effectuer un décalage sur les colonnes, décalage faisant passer d'un rectangle à un parallélogramme ; enfin on effectue le calcul de la TFR sur les lignes du résultat. On peut cependant se contenter d'un calcul sur les données du tableau (rectangulaire) et interpréter le résultat comme l'amplitude de composantes fréquentielles disposées suivant le motif de la figure 19.

4.4 La transformée en cosinus

Cette transformée est en fait une variante de la transformée de Fourier discrète qui transforme un signal réel en un signal réel (la notion de phase n'y apparait pas). Elle est couramment utilisée en codage d'images à débit réduit (formats JPEG, MPEG2) : en effet on a pu montrer qu'en général, pour les types d'images couramment transmises, la décroissance de l'énergie en fonction de la fréquence est rapide dans le cas de

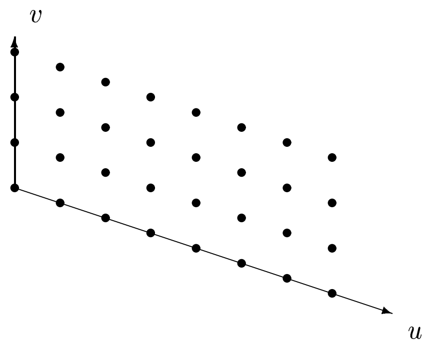


FIG. 19: Transformée discrète de l'image échantillonnée suivant un motif parallélogramme

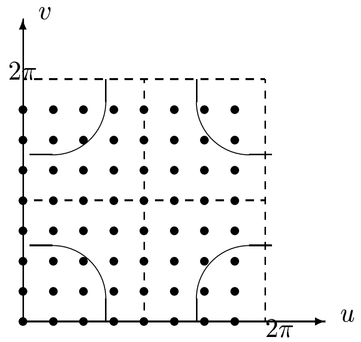


FIG. 20: Présentation habituelle des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle : les composantes "basses fréquences" sont éclatées aux quatre coins de l'image

cette transformée. Il est donc possible de coder correctement une image en effectuant la transformation en cosinus de cette image puis en codant judicieusement les hautes fréquences : par exemple le nombre de bits de codage de l'amplitude décroit linéairement de 6 à 0 en fonction de $u+v$, les amplitudes aux fréquences situées au delà d'une certaine valeur sont considérées comme nulles. La reconstitution de l'image se faisant par transformée de Fourier inverse.

4.4.1 Formules de la transformée en cosinus bidimensionnelle

La transformée est donnée par

$$F(u,v) = \frac{2}{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta(u)+\delta(v)} \sum_{x=0}^{T-1}\sum_{y=0}^{T-1} f(x,y)\cos\pi\frac{(2x+1)u}{T}\sin\pi\frac{(2y+1)v}{T} \tag{105}$$

où $\delta(u)$ vaut zéro pour $u \neq 0$ et $\delta(1) = 0$. La transformée inverse est donnée par

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{T-1}\sum_{v=0}^{T-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta(u)+\delta(v)} F(u,v)\cos\pi\frac{(2x+1)u}{T}\sin\pi\frac{(2y+1)v}{T} \tag{106}$$

4.5 Représentation visuelle de la transformée de Fourier discrète

Dans un calcul de transformée de Fourier, les fréquences sont en général comptées de 0 à 2π si bien que la fréquence $(0,0)$ se trouve représentée en bas et à gauche, et, du fait de la périodicité conséquente de l'échantillonnage, au quatre coins de la figure (cf figure 20) On préfère souvent une présentation où la fréquence $(0,0)$ se retrouve au centre de la figure (cf figure 21). Cette transformation correspond à l'échange des parties gauche et droite de l'image suivi de l'échange des parties haute et basse (on compte les fréquences dont une composante est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage ($\pm\pi$) comme une fréquence négative par analogie avec la représentation des nombres négatifs "en complément à deux".

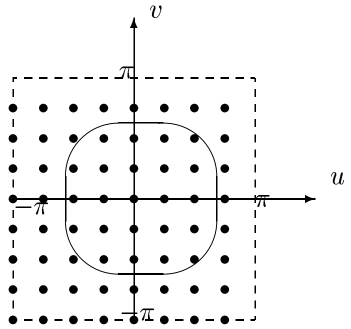


FIG. 21: Présentation des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle : les composantes “basses fréquences” sont regroupées au centre de l’image

4.5.1 Caractère périodique de la transformée de Fourier discrète et de son inverse

Un signal périodique a une transformée de Fourier composée d’harmoniques à des fréquences multiples de la fréquence fondamentale : c’est une fonction échantillonnée avec un pas d’échantillonnage constant. Cette propriété est à la base du théorème d’échantillonnage : comme le signal est échantillonné avec un pas constant, sa transformée de Fourier est périodique. On peut aussi utiliser ce résultat pour mettre en évidence une caractéristique importante de la transformée de Fourier discrète : comme il y a discrétisation de l’image dans le domaine des fréquences, il y a périodisation de l’image dans le domaine spatial. Dès qu’on effectuera des traitements fondés sur l’utilisation de la transformée de Fourier, il faudra tenir compte du caractère périodique des images ainsi traitées. Nous reprendrons ce point au paragraphe 5.2.1 sur l’application des filtres utilisant la transformée de Fourier.

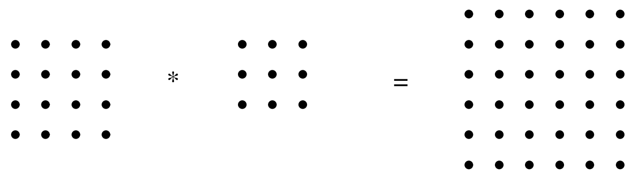


FIG. 22: Effet d'étalement spatial du fait de l'application d'une opération de convolution

5 Filtrage des signaux bidimensionnels

Une opération couramment utilisée en traitement des images et des signaux multidimensionnels est l'application d'un filtre linéaire invariant spatialement. On peut l'utiliser par exemple pour atténuer l'effet d'un bruit, pour rééchantillonner une image. Dans ces deux cas on réalise un filtre qui élimine les hautes fréquences. Dans d'autres applications on peut être amené à rehausser les contours. Dans ce cas on appliquera un filtre amplifiant les hautes fréquences. L'application de ces filtres correspond au calcul d'une convolution. Ce calcul peut se faire de différentes manières : filtres à réponse impulsionnelle finie, filtre récursif ; on peut aussi effectuer un produit dans le domaine des fréquences

5.1 Rappel sur la convolution bidimensionnelle

Nous avons vu au paragraphe 4.2.1 que la convolution bidimensionnelle

$$f(x,y) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} g(s,t)h(x-s,y-t) \tag{107}$$

a pour transformée en z un produit

$$F(z_x,z_y) = G(z_x,z_y)H(z_x,z_y) \tag{108}$$

5.1.1 Support de la convolution

Dans le cas d'une convolution de deux fonctions à support fini on notera que le support du résultat a un support fini dépendant des supports des deux fonctions. Par exemple si ces deux fonctions ont des supports rectangulaires dont les dimensions sont respectivement $A \times B$ et $C \times D$ le support de la convolution aura pour dimensions $(A+C-1) \times (B+D-1)$.

5.2 Filtres à réponse impulsionnelle finie

En traitement d'image ce sont les filtres les plus couramment utilisés : on cherche rarement à mettre en évidence certaines fréquences, donc les fonctions présentant des pôles ne sont pas d'une grande utilité dans de nombreuses applications. De plus nous verrons que l'implantation de filtres récursifs présente des difficultés. En général on se contente donc d'utiliser des filtres à réponse impulsionnelle finie pour réaliser des filtrages passe-bas, passe-bande ou passe-haut. On programme ainsi l'opération

$$f(x,y) = \sum_{s=a}^{b} \sum_{t=c}^{d} g(s,t)h(x-s,y-t) \tag{109}$$

où a et b sont les abscisses, et c et d les ordonnées minima et maxima de l'opérateur de convolution $g(x,y)$ qu'on applique à l'image à traiter $h(x,y)$.

5.2.1 Implantation des filtres à réponse impulsionnelle finie

On peut effectuer soit une implantation dans le domaine spatial sous la forme d'une convolution (109) ce qui est la solution la plus efficace lorsque les dimensions du filtre sont petites. Mais si la taille du filtre augmente, il peut être plus intéressant de prendre la transformée de Fourier discrète du signal à filtrer et de

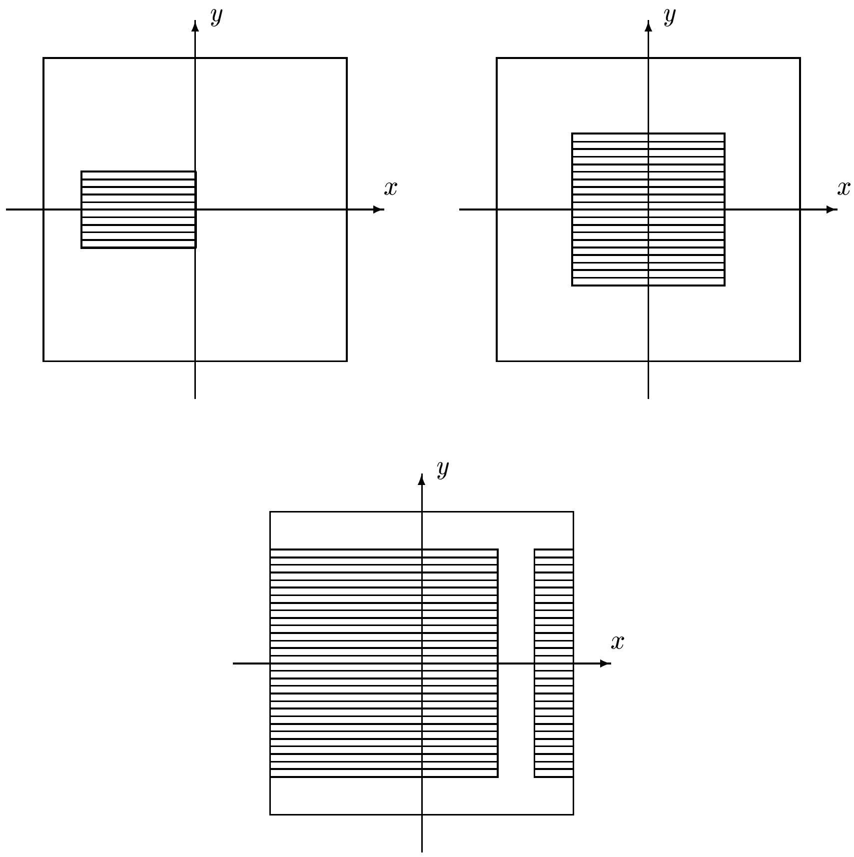


FIG. 23: Conséquence de l'effet d'étalement spatial combiné à la périodisation du fait de l'application d'une opération de convolution fondée sur l'utilisation de la transformée de Fourier discrète

la réponse impulsionnelle du filtre, d'effectuer le produit dans le domaine des fréquences et de faire une transformée de Fourier inverse.

Si on choisit de réaliser cette suite d'opérations, il faut se rappeler que le calcul de la transformée de Fourier discrète comporte une périodisation implicite du signal dans le domaine spatial et donc compléter les signaux à convoluer par des zéros avant d'en prendre la transformée de Fourier de telle sorte que le résultat de la convolution ne soit pas altéré par les recouvrements dûs à la périodisation implicite. Par exemple si les deux signaux à convoluer sont de dimension $T \times T$, le support de la convolution sera de dimension $(2T-1) \times (2T-1)$: Avant de prendre la transformée de Fourier des deux signaux il faudra les compléter par des zéros pour former des carrés de taille supérieure à $(2T-1) \times (2T-1)$ par exemple $2T \times 2T$ et prendre les transformées de Fourier sur ces carrés de surface quatre fois plus grande. Si on effectue la convolution de cette façon, on peut filtrer des signaux de très grande dimension en les découpant en rectangles de taille plus petite. Le résultat final correct est obtenu en décalant convenablement et en additionnant les résultats partiels.

5.3 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie

5.3.1 Synthèse par pondération

La manière la plus simple de synthétiser un filtre à réponse impulsionnelle finie est de prendre la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence idéale et de tronquer cette réponse impulsionnelle en la multipliant par une fenêtre de pondération bidimensionnelle. On vérifie *a posteriori* la validité de cette fenêtre (forme, taille) en comparant la transformée de Fourier de la fonction tronquée et pondérée à la réponse en fréquence idéale.

5.3.2 Formes de fenêtres de pondération

Les fenêtres de pondération se déduisent en général des fenêtres classiques utilisées dans le traitement du signal monodimensionnel. Par exemple pour une fenêtre de taille T définie pour $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ on partira des fonctions

$$-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \qquad f_1(t) = \cos \pi t \qquad (Papoulis) \tag{110}$$

$$-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \qquad f_1(t) = 0.5 + 0.5 \cos 2\pi t \qquad (Hann) \tag{111}$$

$$-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \qquad f_1(t) = 0.54 + 0.46 \cos 2\pi t \qquad (Hamming) \tag{112}$$

• Fenêtres séparables (carrées ou rectangulaires)

En général si les contraintes du problème le permettent, on se contente d'une fenêtre de pondération séparable par exemple de la forme

$$-\frac{T}{2} \leq x, y < \frac{T}{2} f(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \tag{113}$$

Cette fenêtre (Papoulis) de pondération présente l'avantage de minimiser la dispersion du signal dans le domaine fréquentiel.

• Fenêtres à symétrie circulaire (rondes)

Si il est absolument nécessaire de conserver un symétrie circulaire

$$-\frac{T}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{T}{2} f(x, y) = \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{114}$$

5.3.3 Synthèse par extension bidimensionnelle d'un filtre monodimensionnel

Dans de nombreux problèmes de filtrage, on ne cherche pas à privilégier une direction particulière, et on peut essayer d'approximer la réponse impulsionnelle à symétrie circulaire en définissant cette réponse par exemple sur l'axe des abscisses et en effectuant un changement de variable qui fait passer artificiellement de une à deux dimensions.

Prenons par exemple le cas où on cherche à réaliser un filtre passe-bas bidimensionnel en disposant d'un filtre monodimensionnel dont la réponse en fréquence est un polynôme de Tchébychef en $\cos \omega$. On peut alors remplacer la variable $\cos \omega$ par

$$-0.5 + 0.5[\cos u + \cos v] + 0.25[\cos(u + v) + \cos(u - v)]. \tag{115}$$

La valeur de la réponse en fréquence sera alors la même pour tous les points (u, v) situés sur des courbes "concentriques"

$$\cos u/2 \cos v/2 = constante \tag{116}$$

qui sont des carrés aux coins arrondis (se rapprochant de plus en plus d'un cercle lorsque leur diamètre se réduit.

La reconstitution de la réponse impulsionnelle du filtre bidimensionnel peut s'expliquer de la manière suivante

La réponse impulsionnelle du filtre monodimensionnel est $h(t)$. On suppose que cette réponse est symétrique en t

La réponse en fréquence s'écrit

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{t=1}^{T} h(t) \cos(\omega t) \tag{117}$$

La fonction $\cos \omega t$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de degré t en $\cos \omega$

$$\cos \omega t = P_t(\cos \omega) \tag{118}$$

On peut alors réécrire $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{t=1}^{T} h(t) P_t(\cos \omega) \tag{119}$$

Après application du changement de variable faisant passer de l'écriture en ω à l'écriture en fonction de u et de v, la réponse en fréquence du filtre bidimensionnel s'écrit

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = h(0) - \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{T} h(t)P_t(2 - 2[\cos u + \cos v] - [\cos(u+v) + \cos(u-v)]) \tag{120}$$

ou encore

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = h(0) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T/2} h(t)P_t(1 - \cos u - \cos v - \cos u \cos v) \tag{121}$$

Cette réponse en fréquence s'écrit ainsi sous la forme d'un polynôme de deux variables en fonction des T premières puissances de $\cos u$ et de $\cos v$. La transformée de Fourier inverse de cette réponse en fréquence est une fonction de de deux variables $f(x,y)$ dont les échantillons sont nuls en dehors du carré $(-T/2, \ldots, T/2) \times (-T/2, \ldots, T/2)$ et dont les échantillons de coordonnées (x,y) ont pour valeur la moitié de celle du coefficient de $\cos(ux + vy)$. Ce coefficient peut se calculer grâce à l'expression de la transformée de Fourier inverse.

• Synthèse par minimisation

Il est aussi possible de minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle qui est de la forme

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \sum_{x=-T/2}^{T/2} \sum_{yx=-T/2}^{T/2} f(x,y)e^{j(ux+vy)} \tag{122}$$

et la réponse en fréquence idéale $G(e^{ju}, e^{jv})$. Les coefficients de $f(x,y)$ correspondent donc à la minimisation de

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{ju}, e^{jv}) - G(e^{ju}, e^{jv})|^2 P(e^{ju}, e^{jv})dudv \tag{123}$$

en tenant éventuellement compte d'une fonction de pondération $P(e^{ju}, e^{jv})$.

Si cette fonction de pondération est constante, le minimum de l'écart est obtenu lorsque les échantillons de la réponse impulsionnelle finie du filtre ont pour valeur celle des échantillons de la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence idéale à l'intérieur du support où ils sont définis. (Ils sont bien entendus nuls en dehors de ce support).

Cette troncature brutale se traduit en général par l'apparition d'oscillations parasites qui peuvent introduire une déformation non négligeable de l'image filtrée.

5.4 Les systèmes linéaires récursifs bidimensionnels

Le filtrage des signaux bidimensionnels est en général un filtrage passe-bas ou passe-bande dont la réponse impulsionnelle présente des symétries spatiales (symétrie par rapport à l'origine ou symétrie circulaire). Ces réponses impulsionnelles doivent en général être définies sur un support relativement restreint pour que les calculs puissent s'effectuer en un temps raisonnable. La plupart du temps, ces filtrages sont réalisés grâce à des filtres à réponse impulsionnelle finie. Mais on peut être amené par exemple en détection d'onde à définir un filtre très sélectif dans le domaine des fréquences spatiales (détection d'un signal d'une fréquence donnée venant d'une direction donnée). On peut dans ce cas envisager l'utilisation de filtres à réponse impulsionne infinie (filtres récursifs). La généralisation de cette approche au cas des signaux bidimensionnels pose cependant un certain nombre de problèmes en ce qui concerne la causalité et la stabilité des filtres.

5.4.1 Le problème de la causalité

Pour parler de filtre récursif, il faut calculer les échantillons présent et futurs en fonction des échantillons passés. Il faut donc définir un domaine du futur et un domaine du passé dans une image (le présent étant par exemple l'origine dans le plan).

Un bon nombre de travaux où le futur incluant le présent est un quart de plan ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) (et où le passé est donc formé des trois quart restants $x < 0$ ou $y < 0$). Or cette définition de la causalité est trop restrictive : il y a par exemple des formes de filtres qui ne peuvent pas être synthésisés. La définition la plus

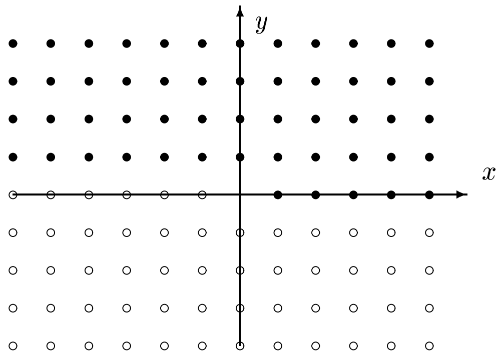


FIG. 24: Domaine du plan correspondant au “passé” (disques blancs) et au “futur” (disques noirs), le présent étant l’origine du plan

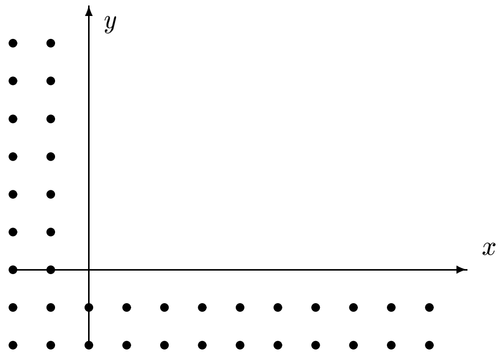


FIG. 25: Points du plan pour lesquels il faut connaitre les conditions initiales afin de pourvoir calculer la réponse d’un filtre récursif bidimensionnel

générale, (et, de mon point de vue, la seule correcte) de la causalité est donnée par la notion de “demi-plan asymétrique” : le présent est l’origine du plan ; le futur est l’ensemble des lignes dont l’ordonnée est positive complété par les échantillons d’ordonnée nulle et d’abscisse positive ; le passé est symétrique du futur par rapport à l’origine. Cette définition est compatible avec les applications vidéo où il y a balayage de l’image ligne par ligne au cours du temps.

5.4.2 Ecriture d’une convolution sous la forme d’équation récurrente

L’écriture de la sortie $g(x, y)$ d’un filtre récursif bidimensionnel en fonction de l’entrée $f(x, y)$ est alors la suivante

$$g(x,y) = -\sum_{m,n\in D} a(m,n)g(x-m,y-n) + b(0,0)f(x,y) + \sum_{m,n\in D} b(m,n)f(x-m,y-n) \quad (124)$$

Le support D est un support fini appartenant au passé strict (présent exclu) . Pour calculer la sortie du filtre, il faut donc connaitre les conditions initiales de la fonction $g(x, y)$. Supposons par exemple que le support D est un carré de côté T dont on a oté le coin à l’origine, pour calculer la sortie du filtre pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, il faudra connaitre la valeur de $g(x, y)$ sur une bande horizontale $-T < y < 0$ ainsi que sur une bande verticale $-T < x < 0$.

La transformée en z de la réponse impulsionnelle du filtre (ou encore la fonction de transfert) s’écrit

$$H(z_x, z_y) = \frac{b(0,0) + \sum_{m,n\in D} b(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n}}{1 + \sum_{m,n\in D} a(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n}} \quad (125)$$

5.5 Stabilité des filtres causaux

L'utilisation d'un filtre causal nécessite l'étude de la stabilité de ce filtre. Les résultats essentiels concernant cette stabilité sont présentés ici sans démonstration.

Le filtre est stable si la somme des modules des échantillons de sa réponse impulsionnelle est finie. Dans la plupart des cas (il y a des exceptions mais on ne les rencontre guère en pratique) l'étude de la stabilité ne nécessite que la connaissance du dénominateur de la fonction de transfert.

5.5.1 Le théorème de Rudin et ses corollaires

Nous supposerons que le support D est un carré de côté T dont on a exclu l'origine. Pour qu'un filtre récursif soit stable il est nécessaire et suffisant

- que son dénominateur ne s'annule pas sur le "tore" $|z_x| = |z_y| = 1$;
- que son dénominateur

$$A(z_x, z_y) = 1 + \sum_{m,n \in D} a(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n} \tag{126}$$

soit tel que $A(z_x, z_y)$ ne s'annule que dans le domaine

$$|z_x| > 1 \quad \text{et} \quad |z_y| > 1 \tag{127}$$

On peut déduire de cette condition une condition suffisante de stabilité : Nous supposerons que le domine D est un rectangle

$$y < 0 \quad : \quad T_1 \leq x \leq T_2 \tag{128}$$
$$y = 0 \quad : \quad T_1 \leq x < 0 \tag{129}$$

et que $A(e^{ju}, e^{jv})$ ne s'annule pas sur $|z_x| = |z_y| = 1$.

Alors pour que le filtre soit stable, il faut et il suffit qu'un seul polynôme (à une variable) de la forme

$$A'(z) = A(z^{-1}, z^{-k}) = 1 + \sum_{m,n \in D} a(m,n) z^{m+kn} \tag{130}$$

où $k \geq |T_1|$ de sorte que

$$m + kn > 0 \text{ si } |m| + |n| \neq 0 \tag{131}$$

ait toutes ses racines en dehors du disque |z| < 1

Tester la stabilité d'un filtre bidimensionnel nécessite deux étapes : La première revient à chercher si un polynôme s'annule ou non pour

$$z_x = e^{ju} \text{ et } z_y = e^{jv} \tag{132}$$

A ma connaissance, il n'y a pas de méthode systématique recommandée pour faire ce test. On peut dans la plupart des cas, s'assurer que la fonction $A(e^{ju}, e^{jv})$ n'est pas nulle sur les noeuds d'un maillage assez fin et vérifier ensuite par continuïté qu'à intérieur des mailles la fonction ne peut pas s'annuler ou qu'elle s'annule nécessairement. Toutefois cette approche ne permet pas de traiter les cas délicats. La seconde revient à tester si un filtre monodimensionnel est stable, ce qui peut se faire en utilisant l'algorithme de Schur Cohn.

5.5.2 Interprétation en termes de lieu des racines

Une manière de se représenter les caractéristiques d'un filtre en termes de stabilité est de considérer le lieu des racines du dénominateur :

On étudie l'évolution des racines de $A(z, e^{jv})$ polynôme en z en faisant varier v de 0 à 2π. Ce lieu des racine se présente sous la forme de une ou plusieurs boucles fermées ou non suivant que le coefficient du plus haut degré s'annule ou non pour certaines valeurs de v.

Si ce lieu coupe le cercle de rayon un (soit C), le filtre est nécessairement instable. Si ce lieu ne coupe pas le cercle C, le filtre sera stable si et seulement si toutes les boucles sont à l'extérieur du cercle C. Par exemple le filtre ayant pour dénominateur

$$A(z_x, z_y) = 1 + a z_x^{-1} + b z_y^{-1} \tag{133}$$

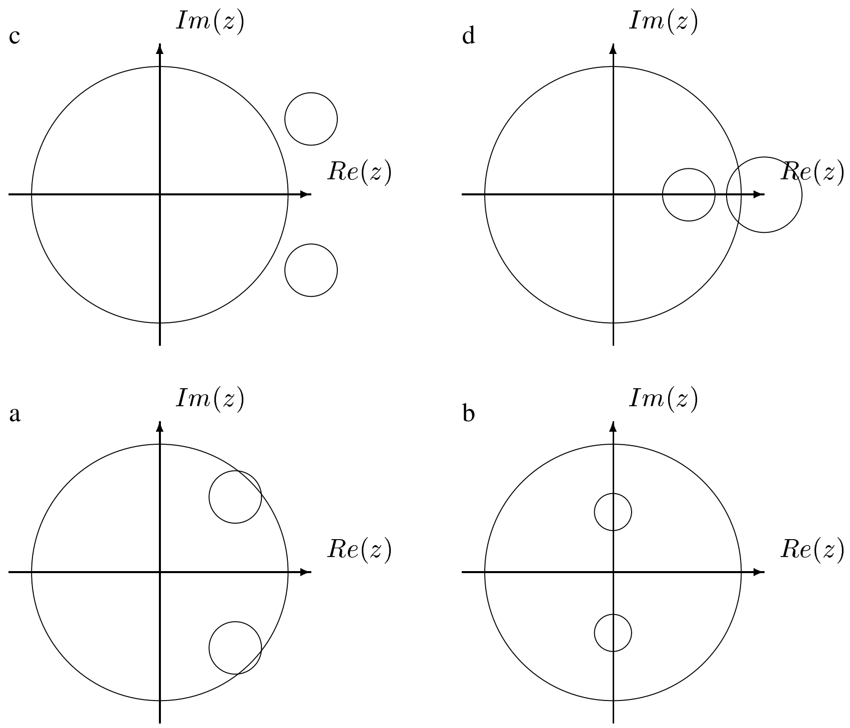


FIG. 26: Quatre configurations de lieux des racines : le filtre est stable dans le cas (c) et instable dans les cas (a), (b) et (d)

on étudie en fonction de v la racine

$$z = \frac{1 + be^{jv}}{-a} \tag{134}$$

Ce lieu sera strictement à l'extérieur du cercle C si

$$|1 + be^{jv}| > |a| \tag{135}$$

Comme le minimum du numérateur vaut $1 - |b|$, il faut que

$$|a| + |b| < 1 \tag{136}$$

pour que la stabilité soit assurée.

Stabilisation d'un filtre récursif instable Nous présentons cette méthode sans la démontrer. On peut développer sa preuve en utilisant les projections de Radon.

Soit le polynôme $A(z_x, z_y)$. On peut calculer les échantillons de sa fonction d'autocorrélation ce sont les coefficients de

$$R(z_x, z_y) = A(z_x, z_y)A(z_x^{-1}, z_y^{-1}) = \sum_x \sum_y r(x, y) z_x^{-x}, z_y^{-y} \tag{137}$$

qui est une fonction à support fini. Pour factoriser $R(z_x, z_y)$, on en construit une fonction monodimensionnelle en plaçant l'une après l'autre les lignes de $r(x, y)$ qu'on suppose de longueur $2L$ $(-L < y < L)$. Il peut être nécessaire de construire des lignes très longues (L grand) dans le cas où le lieu des racines de $A(z_x, z_y)$ coupe le cercle de rayon un.

On applique à cette autocorrélation monodimensionnelle l'algorithme de Schur de factorisation spectrale, qui garantit que le facteur spectral est à minimum de phase. A partir de ce facteur monodimensionnel on reconstruit le facteur bidimensionnel en rangeant les tronçons de longueur $2L$ les uns au dessous des autres.

5.6 Lien avec les équations aux dérivées partielles

Le filtrage récursif peut être utilisé pour simuler des propagations d'ondes à condition que les pas d'échantillonnage soit correctement choisis.

5.7 Filtrage et transformée en ondelettes

Le champ des applications actuelles de l'analyse par ondelettes est varié : compression, analyse du mouvement, découpage d'une image en régions, etc... Nous nous intéressons uniquement aux aspects du prétraitement du signal en vue de la compression. L'étape ultérieure, la compression proprement dite n'est pas du ressort de ce cours. Elle fait appel aux différentes techniques de classification. Dans les versions les plus simples, les filtres bidimensionnels appliqués aux images sont des filtres séparables, si bien qu'il suffit d'appliquer une analyse monodimensionnelle, ligne par ligne puis colonne par colonne pour effectuer le traitement bidimensionnel. Cette présentation succinte est fondée sur le chapitre 3 "Wavelet transform and image coding" par M. Antonini et *al.*, de l'ouvrage "Wavelets in image communication" (M. Barlaud, ed.) publié par Elsevier en 1994.

5.7.1 Filtres miroirs en quadrature bidimensionnel

Les filtres miroirs en quadrature (QMF) sont utilisés pour reconstruire des signaux à partir de composantes basses fréquences et hautes fréquences, bien que ces composantes ne respectent pas le théorème de Shannon : le sous-échantillonnage induit un repliement spectral ; toutefois la forme complémentaires des filtres passe-bas et passe-haut garantit une reconstruction exacte

On peut décomposer un signal en lui appliquant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle que nous supposerons symétrique $b(t) = b(-t)$ et un filtre passe-haut de réponse impulsionnelle

$$h(t) = (-1)^t b(t) \tag{138}$$

soit dans le domaine des fréquences

$$H(\omega) \quad = \quad B(\omega + \pi) \tag{139}$$

On analyse le signal $f(t)$ en lui appliquant $B(\omega)$ et en en prélevant un échantillon sur deux soit $f_B(2t)$; la synthèse de la composante passe-bas se fait en intercalant des valeurs à zéro entre les échantillons du signal soit

$$g_B(2t) = f_B(2t) g_B(2t+1) = 0 \tag{140}$$

Le fait d'intercaler des zéros implique un repliement spectral.

L'analyse de la composante hautes-fréquences se fait en appliquant à $f(t)$ le filtre $B(\omega)$ et en prélevant un échantillon sur deux soit $f_B(2t)$. La synthèse de la composante passe-haut se fait aussi un intercalant un échantillon à zéro entre ces échantillons, soit $g_H(t)$, ce qui implique ici aussi un repliement spectral. On filtre les deux composantes $g_B(t)$ et $g_H(t)$ par des filtres $B_R(\omega)$ et $H_R(\omega)$ avant de les additionner. Si les fonctions de reconstruction $B_R(\omega)$ et $H_R(\omega)$ sont judicieusement chosies, la reconstruction donne exactement le signal initial $f(t)$. Les conditions de reconstruction exacte doivent être telles que la somme des deux réponses en fréquences soit constante. L'effet du filtre d'analyse, du sous-échantillonage et de l'intercalage de zéros donne une réponse en fréquence

$$B_A(\omega) + B_A(\omega + \pi)$$

dans les basses fréquences et

$$H_A(\omega) + H_A(\omega + \pi)$$

dans les hautes fréquences. Il faut construire des filtres de reconstruction $B_R(\omega)$ et $H_R(\omega)$ tels que

$$\left[B_A(\omega) + B_A(\omega + \pi\right] B_R(\omega) + \left[H_A(\omega) + H_A(\omega + \pi)\right] H_R(\omega) = 1 \tag{141}$$

On peut prendre

$$B_R(\omega) = B_A(\omega)/2 \tag{142}$$

$$H_A(\omega) = B_A(\omega + \pi) \tag{143}$$

$$H_R(\omega) = -B_A(\omega + \pi)/2 \tag{144}$$

La condition sur $B_A(\omega)$ qui garantit une reconstruction sera alors

$$B_A^2(\omega) - B_A^2(\omega+\pi) = 1 \tag{145}$$

Une forme de filtres analogues (filtres en quadrature conjugués) correspond au choix

$$B_R(\omega) = -e^{-j\omega} B_A(-\omega)/2 \tag{146}$$
$$H_A(\omega) = -e^{-j\omega} B_A(-\omega-\pi) \tag{147}$$
$$H_R(\omega) = -B_A(\omega+\pi)/2 \tag{148}$$

La condition sur $B_A(\omega)$ qui garantit une reconstruction sera dans ce cas

$$|B_A(\omega)|^2 + |B_A(\omega+\pi)|^2 = 1 \tag{149}$$

Il peut être intéressant d'établir le lien entre cette approche et le deuxième théorème de Nyquist sur l'échantillonnage des signaux en transmission numérique : on peut retrouver directement les échantillons d'un signal malgré une déformation par un filtre linéaire si la réponse en fréquence $G(\omega)$ de ce filtre vérifie

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2\pi m) = 1 \tag{150}$$

condition que

5.7.2 Ondelettes

On se donne une fonction modèle symétrique $b_A(t)$ de transformée de Fourier réelle et paire $B_A(\omega)$. Le choix de cette fonction est arbitraire. Il faut toutefois que sa transformée de Fourier décroisse assez vite avec la fréquence. A partir de cette fonction qui est dans le cas du codage d'images un filtre passe-bas, on construit le filtre passe-haut associé $h_A(t)$ dont les coefficients seront précisés plus loin Ces deux filtres serviront à déduire de l'image initiale deux images, l'une filtrée passe-bas et l'autre filtrée passe-haut qui seront sous-échantillonnée. Toutefois deux filtres complémentaires de ce type ne peuvent pas être utilisés pour la reconstruction de l'image sans déformation des hautes fréquence due à un déphasage non linéaire. On calcule pour effectuer la reconstruction deux filtres $b_R(t)$ et $h_R(t)$ dont les transformées de Fourier sont respectivement $B_R(\omega)$ et $H_R(\omega)$ qui vérifient

$$B_A(\omega)B_R(\pi+\omega) + H_A(\omega)H_R(\pi+\omega) = cste \tag{151}$$

Les filtres passe haut sont reliés aux filtres passe-bas par une translation de π dans le domaine des fréquences soit par une modulation dans le domaine temporel

$$h_A(t) = (-1)^t b_R(t-1) \tag{152}$$

$$h_R(t) = (-1)^t b_A(t-1) \tag{153}$$

Dans le domaine des fréquences, ces relations deviennent

$$H_A(\omega) = e^{-j\omega} B_R(\omega+\pi) \tag{154}$$

$$H_R(\omega) = e^{-j\omega} B_A(\omega+\pi) \tag{155}$$

Remarque le filtre de synthèse passe-haut se déduit du filtre d'analyse passe-bas ; le filtre d'analyse passe-haut se déduit du filtre de synthèse passe-bas.

L'intérêt de l'analyse fondée sur les ondelettes “biorthogonales” de ce type est de garantir la symétrie des réponses impulsionnelles et des réponses en fréquences (réelles) des filtres. Ainsi, les composantes fréquencielles ne sont pas déphasées, et les images ne sont pas déformées. Un exemple de quadruplet des fonctions assez compactes proposées par Antonini *et al.* est donné dans la table 1

TAB. 1: Exemple de fonction d'analyse $b_A(t)$ et $h_A(t)$ et de reconstruction $b_R(t)$ et $h_R(t)$ utilisées pour l'analyse par ondelettes biorthogonales

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$b_A(t)$	0.038	-0.024	-0.111	0.377	0.853	0.377	-0.111	-0.024	0.038	0
$b_R(t)$	0	-0.065	-0.041	0.418	0.788	0.418	-0.041	-0.065	0	0
$h_A(t)$	0	0.038	+0.024	-0.111	-0.377	0.853	-0.377	-0.111	0.024	0.038
$h_R(t)$	0	0	+0.065	-0.041	-0.418	0.788	-0.418	-0.041	+0.065	0

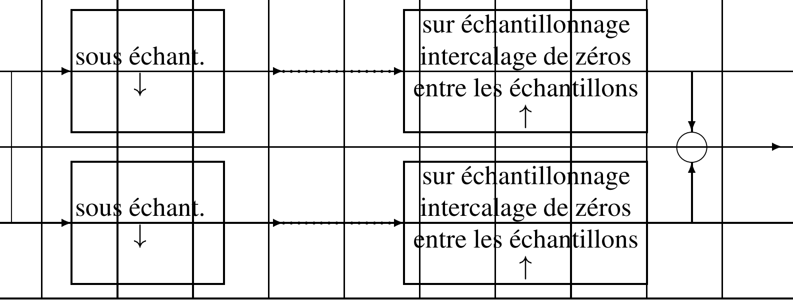


FIG. 27: Schéma d'une décomposition en ondelettes biorthogonales : filtrage passe-bas $b_A(t)$ et sous-échantillonnage et filtrage passe-haut $h_A(t)$ et sous échantillonage à l'analyse ; suréchantillonnage des deux composantes par intercalage de zéros, puis filtrage de ces composantes par les filtres $b_R(t)$ pour la composante basses-fréquences et $h_R(t)$ pour la composante hautes-fréquences de sorte que la somme des deux signaux ainsi reconstitués soit identique au signal initial

Enchaînement des opérations d'analyse • Le signal à analyser $f_0(x, y)$ est filtré passe-bas ligne par ligne par $b_A(x)$ puis rééchantillonné en y prélevant un échantillon sur deux

$$s_b(x, y) = \sum_k b_A(k) f_0(2x - k, y) \tag{156}$$

On effectue la même opération sur les colonnes, ce qui produit le signal comprimé

$$s_{bb}(x, y) = \sum_\ell b_A(k) s_b(x, 2y - \ell) \tag{157}$$

• On effectue les opérations similaires avec le filtre $b_A(x)$ et $h_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{bh}(x, y)$ filtré passe-bas sur les lignes et passe-haut sur les colonnes ;

• On effectue les opérations similaires avec le filtre $h_A(x)$ et $b_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{hb}(x, y)$ filtré passe-haut sur les lignes et passe-bas sur les colonnes ;

• On effectue les opérations similaires avec le filtre $h_A(x)$ et $h_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{bh}(x, y)$ filtré passe-haut sur les lignes et sur les colonnes.

Les mêmes opérations sont appliquées au signal basse-fréquence $f_1(x, y) = s_{bb}(x, y)$

Enchaînement des opérations de reconstruction On dispose des quatre composante

$$s_{bb}(x, y),\ s_{bh}(x, y),\ s_{hb}(x, y) \text{ et } s_{hh}(x, y)$$

dont on double le nombre de lignes et le nombre de colonnes en intercalant des valeurs à zéros, ce qui donne les quatre images

$$s'_{bb}(x, y),\ s'_{bh}(x, y),\ s'_{hb}(x, y) \text{ et } s'_{hh}(x, y)$$

. On applique sur ces images les filtres de reconstruction soit

$b_R(x)$ et $b_R(y)$ à $s'_{bb}(x, y)$
$b_R(x)$ et $h_R(y)$ à $s'_{bh}(x, y)$
$h_R(x)$ et $b_R(y)$ à $s'_{hb}(x, y)$
$h_R(x)$ et $h_R(y)$ à $s'_{hh}(x, y)$

et on ajoute ces quatre images, ce qui reconstitue l'image initiale.

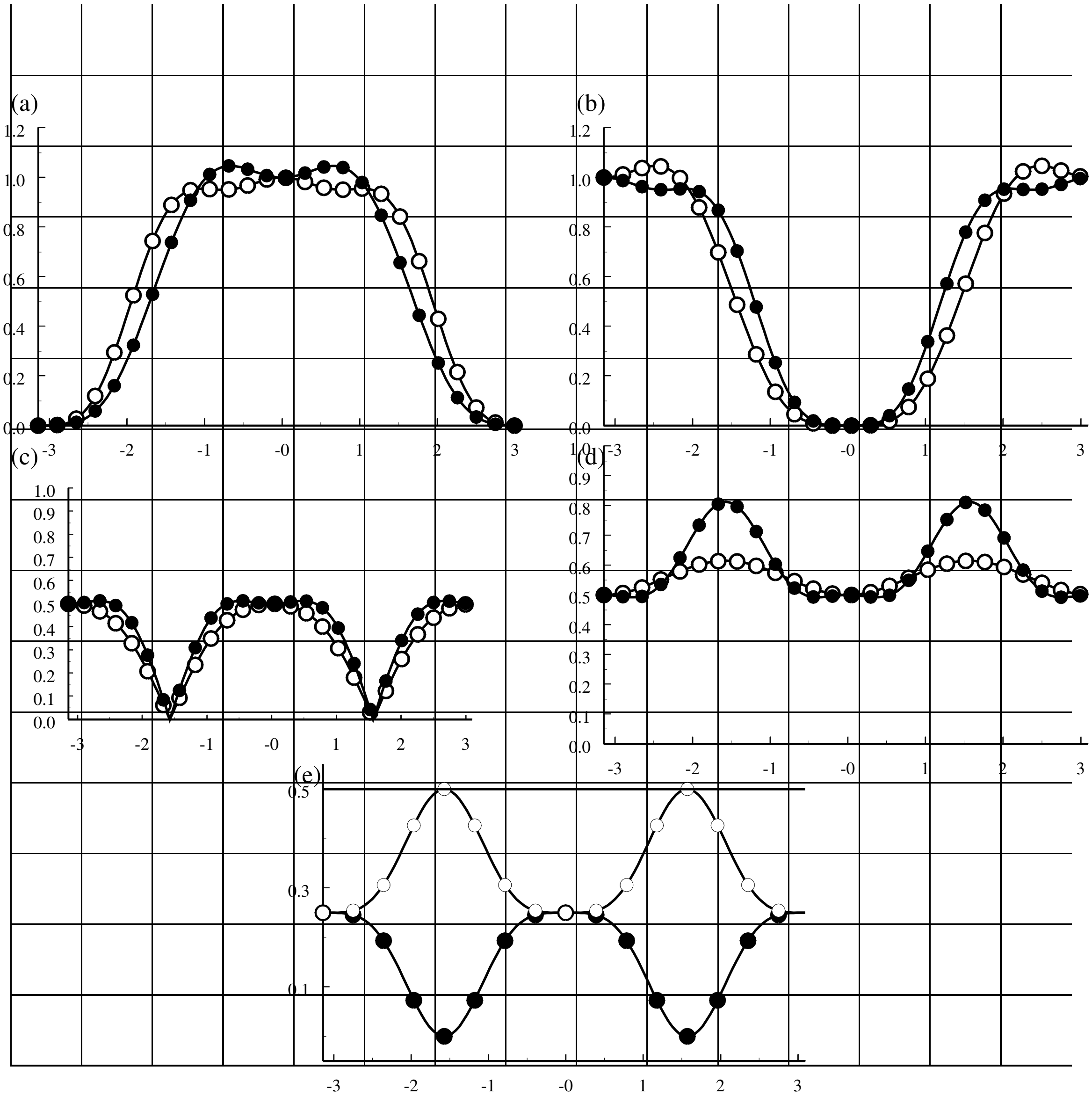


FIG. 28: Ondelettes : Représentation en module dans le domaine des fréquences des effets des filtres d'-analyse et de reconstruction et de l'échantillonage : (a) Filtres passe-bas d'analyse $B_A(\omega)$ (o) et de reconstruction $B_R(\omega)$ (•) ; (b) Filtres passe-haut d'analyse $H_A(\omega)$ (o) et de reconstruction $H_R(\omega)$ (•) ; (c) Filtres passe-bas d'analyse $B_A(\omega)$ (o) et de reconstruction $B_R(\omega)$ (•) après suréchantillonnage : il y a dédoublement de la transformée de Fourier ; (d) Filtres passe-haut d'analyse $H_A(\omega)$ (o) et de reconstruction $H_R(\omega)$ (•) ;après suréchantillonnage : il y a dédoublement de la transformée de Fourier ; (e) Effet combiné des filtres d'analyse (o) et de reconstruction (•) ; la réponse en fréquence de leur somme est constante : le signal reconstruit est identique au signal original

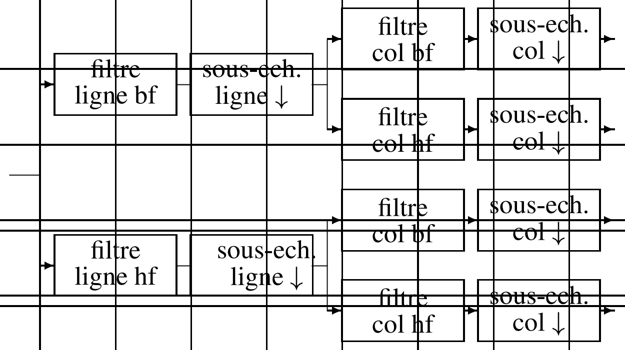


FIG. 29: Enchaînement des opérations d'analyse monodimensionnelles ligne par ligne et colonne par colonne pour réaliser les traitements bidimensionnels

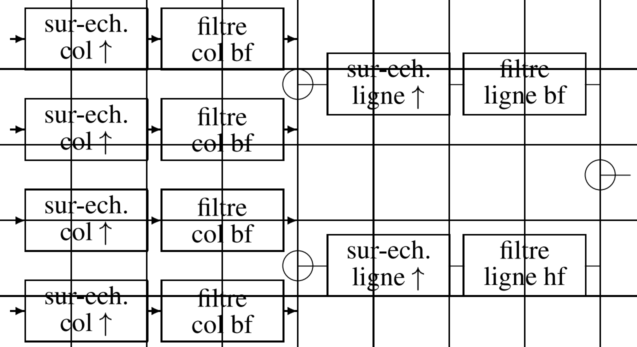


FIG. 30: Enchaînement des opérations de synthèse monodimensionnelles colonne par colonne et ligne par ligne pour reconstituer les signaux bidimensionnels

Relation entre les filtres en quadratures et les ondelettes Comme on le voit dans les objectifs (sous-échantillonnage) et les formes des fonctions, les ondelettes sont une extension directe des filtres en quadrature, dont l'intérêt réside dans le fait qu'elles n'induisent pas de modification de phase et donc pas de distorsion des images filtrées. Toutefois, la récursivité de l'analyse multirésoltion n'est pas nécessairement fondamentale en codage ; l'intérêt réside surtout dans l'analyse en sous-bandes de fréquences où les signaux se prètent apparamment mieux à une réduction de débit.

6 Estimation spectrale des signaux bidimensionnels

6.1 Signaux aléatoires bidimensionnels

L'analyse des signaux aléatoires bidimensionnels est une extension directe de l'analyse des signaux monodimensionnels. Cependant on voit apparaitre une différence essentielle liée à l'importance accordée au moments d'ordre supérieur. En effet de nombreuses études sur les signaux monodimensionnels ne nécessitent que l'étude des propriétés du deuxième ordre : fonction d'autocorrélation, densité spectrale, . . . où les notions de phase ont moins d'importance que la répartition énergétique du signal en fonction des fréquences. Mais la phase est un élément essentiel pour la reconstruction de la forme du signal. Donc dans les études portant sur la recherche de la forme d'un objet dans une image ou sa reconstitution, on fera de plus en plus intervenir les moments d'ordre supérieur qui, eux, prennent en compte cette notion de phase. C'est par exemple le cas en astronomie où on est amené à étudier le bispectre ou la triple corrélation d'un objet : si une fonction $f(x, y)$ a pour transformée de Fourier $F(u, v)$ son bispectre s'écrit dans le cas des signaux déterministes

$$B_3(u_1, u_2, v_1, v_2) = F(u_1, v_1)F(u_2, v_2)F(-u_1 - u_2, -v_1 - v_2) \tag{158}$$

Et la transformée de Fourier inverse de ce bispectre est la triple corrélation

$$r_3(m_1, m_2, n_1, n_2) = f(x, y)f(x + m_1, y + n_1)f(x + m_2, y + n_2) \tag{159}$$

qui est aussi la convolution de la fonction $f(x, y)$ avec sa propre autocorrélation. Dans le cas des signaux aléatoires, on calcule la corrélation d'ordre trois comme une moyenne

$$r_3(m_1, m_2, n_1, n_2) = E[f(x, y)f(x + m_1, y + n_1)f(x + m_2, y + n_2)] \tag{160}$$

et le bispectre est la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, qu'on peut estimer comme une moyenne dans le domaine des fréquences à partir d'estimations $F'(u, v)$ de $F(u, v)$

$$B_3(u_1, u_2, v_1, v_2) = E[F'(u_1, v_1)F'(u_2, v_2)F'(-u_1 - u_2, -v_1 - v_2)] \tag{161}$$

Nous reprendrons ce point dans le paragraphe consacré à l'interférométrie en astrophysique. Il faut toutefois donner les extensions bidimensionnelles des résultats élémentaires de l'analyse des signaux aléatoires monodimensionnels

6.1.1 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale

En ce qui concerne l'analyse des statistiques du deuxième ordre, on a ainsi la fonction d'autocorrélation du signal $f(x, y)$ que nous supposerons réel, stationnaire et de moyenne nulle

$$r(m, n) = E[f(x, y)f(x + m, y + n)] \tag{162}$$

qui est une fonction symétrique par rapport à l'origine

$$r(m, n) = r(-m, -n) \tag{163}$$

et est associée à un opérateur défini positif.

La transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation est la densité spectrale $R(e^{ju}, e^{jv})$ qui est une fonction réelle positive ou nulle. Cette densité spectrale est la moyenne du module de la transformée de Fourier du signal $f(x, y)$ soit $F(e^{ju}, e^{jv})$: Si on dispose d'estimations de cette transformée de Fourier, on obtiendra la densité spectrale en en calculant la moyenne

$$R(e^{ju}, e^{jv}) = E[|F'(e^{ju}, e^{jv})|^2] \tag{164}$$

6.1.2 Filtrage linéaire des signaux aléatoires bidimensionnels

De même que dans le cas des signaux monodimensionnels, on peut calculer $R_g(e^{ju}, e^{jv})$ densité spectrale de la sortie $g(x, y)$ d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(x, y)$ soumis à une entrée aléatoire $f(x, y)$ en fonction du carré du module de la réponse en fréquence du filtre $H(e^{ju}, e^{jv})$ et de la densité spectrale du signal d'entrée $R_f(e^{ju}, e^{jv})$

$$R_g(e^{ju}, e^{jv}) = R_f(e^{ju}, e^{jv})|H(e^{ju}, e^{jv})|^2 \tag{165}$$

6.2 Estimation spectrale bidimensionnelle

Dans les problème de détection d'ondes se propageant dans une direction donnée mais aussi dans d'autres applications, le problème à résoudre passe par la recherche de l'amplitude et de la phase d'une sinusoïde ; c'est à dire de la valeur de la transformée de Fourier en un point de l'espace des fréquences. Si on s'intéresse plus particulièrement à l'aspect énergétique, plutôt qu'à la forme des signaux, on est amené à étudier le module (ou le carré du module) de cette transformée de Fourier c'est à dire la densité spectrale de puissance bidimensionnelle. Par exemple on cherche à détecter la présence d'une sinusoïde bidimensionnelle se détachant d'un bruit de fond en estimant son amplitude sans se préoccuper de sa phase.

6.2.1 Les techniques classiques non paramétriques

Les techniques non paramétriques utilisées dans le cas monodimensionnel s'appliquent aussi dans le cas présent. On peut étudier la répartition énergitique en fonction de la fréquence spatiale en calculant le périodogramme bidimensionnel par transformée de Fourier discrète des images. Les difficultés liées à cette méthode sont identiques à celles rencontrées dans le cas des signaux monidimensionnels :

- L'augmentation du nombre d'échantillons ne permet pas de diminuer la variance du périodogramme.

- L'analyse se fait nécessairement sur un nombre fini d'échantillons. La transformée de Fourier du signal analysé est nécessairement le résultat de la convolution de la T. F. du signal de durée infinie par la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse : une composante sinusoïdale est donc “dispersée” sur les fréquences voisines.

Pour atténuer les distorsions dûes à la limitation des signaux à un support de taille finie on utilise les mêmes techniques que dans le cas monodimensionnel :

• Addition de périodogrammes calculées à partir de différentes images engendrées par un même processus ; Cette addition permet de diminuer la variance de l'estimateur.

• Lissage d'un périodogramme par calcul d'une moyenne de l'énergie dans une petite région du domaine des fréquences spatiales : Si la fonction d'autocorrélation du signal tend rapidement vers 0 lorsqu'on s'éloigne de l'origine, cela signifie que les variations de la densité spectrale en fonction de la fréquence spatiale sont relativement lentes. Dans ce cas il peut être légitime de lisser le périodogramme par un filtrage passe bas dans le domaine des fréquences. Mais cette technique peut aboutir à de mauvais résultats lorsque les variations spectrales sont rapides en particulier lorsque la densité spectrale n'est pas continue : c'est le cas lorsque cette densité spectrale présente des pics infinis (Dirac) c'est à dire des composantes sinusoïdales isolées dont l'énergie est comparable à celle du reste du signal (en général un bruit de fond coloré).

Calcul du périodogramme après pondération dans le domaine spatial du signal par une fenêtre permettant de diminuer la dispersion du signal dans le domaine des fréquences. Une fenêtre de pondération qui minimise la dispersion spectrale d'une raie est la fonction de support carré

$$f(x,y) = \cos(\frac{\pi x}{2T})\cos(\frac{\pi y}{2T}) \tag{166}$$

définie pour $-T \leq x, y < T$.

6.2.2 Techniques hautes résolution pour l'estimation spectrale

Pour trouver l'énergie moyenne de la composante spectrale $R(u,v)$ à la fréquence (u,v) d'un processus aléatoire $f(x,y)$, on peut filtrer ce processus par un filtre passe-bande autour de (u,v) et calculer l'énergie de la sortie de ce filtre.

On peut aussi moduler (multiplier) le signal par une sinusoïde $\exp[-j(ux+vy)]$ pour translater le point (u,v) du domaine de fréquence en $(0,0)$ puis filtrer passe-bas le signal ainsi obtenu par un filtre de réponse impulsionnelle $h(x,y)$ avant de calculer son énergie. Dans la suite nous supposerons que le filtre-passe bas a une réponse impulsionnelle $h(x,y)$ de support fini $-X \leq x,y < X$ et un gain unité à la fréquence $(0,0)$, soit

$$\sum_{x=-X}^{X-1}\sum_{y=-X}^{X-1} h(x,y) = 1 \tag{167}$$

On connait la fonction d'autocorrélation $r(x,y)$ du processus aléatoire $f_{mod}(x,y)$ obtenu par modulation du signal original,

$$f_{mod}(x,y) = f(x,y)\exp[-j(ux+vy)] \tag{168}$$

pour un nombre fini d'échantillons $-X < x, y < X$. Le signal basse fréquence (théoriquement constant) dont on cherche à mesurer l'amplitude (ou l'énergie) est le résultat $g(x, y)$ du filtrage de $f_{mod}(x, y)$ par $h(x, y)$

$$g(x,y) = \sum_{s=-X}^{X-1} \sum_{t=-X}^{X-1} f_{mod}(x-s, y-t) h(s,t) \tag{169}$$

L'énergie de ce signal Eg^2 est donnée par

$$Eg^2 = E \left[\sum_{s=-X}^{X-1} \sum_{t=-X}^{X-1} f_{mod}(x-s, y-t) h(s,t) \sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} f_{mod}(x-p, y-q) h(p,q) \right] \tag{170}$$

En échangeant l'ordre des sommations et en appliquant le calcul de l'espérance aux seuls termes aléatoires

$$Eg^2 = \sum_{s=-X}^{X-1} \sum_{t=-X}^{X-1} \sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} h(s,t) h(p,q) E\left[f_{mod}(x-s, y-t) f_{mod}(x-p, y-q) \right] \tag{171}$$

On suppose que le signal est stationnaire et on écrit Eg^2 en fonction de la fonction d'autocorrélation de $f(x, y)$

$$Eg^2 = \sum_{s=-X}^{X-1} \sum_{t=-X}^{X-1} \sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} h(s,t) h(p,q) r(p-s, q-t) \tag{172}$$

Le problème d'estimer le mieux possible l'amplitude à la fréquence 0 peut alors être interprété de la manière suivante : quelle est la réponse impulsionnelle de durée finie $h(x, y)$ et dont le gain vaut 1 à la fréquence $(0, 0)$ telle que l'amplitude des autres composantes fréquentielles soient les plus petites possible ? Si la contrainte est telle que le gain du filtre vaut 1 à la fréquence 0, l'énergie de la composante à cette fréquence est la même pour tous les filtres : les variations sur les coefficients des autres filtres modifieront les énergies des autres composantes. Il s'agit donc de minimiser l'énergie en sortie du filtre sans modifier l'amplitude à la fréquence $(0, 0)$: ceci revient à minimiser la forme quadratique $Eg2$ sous la contrainte

$$\sum_{x=-X}^{X-1} \sum_{y=-X}^{X-1} h(x,y) = 1 \tag{173}$$

La minimisation sous contrainte de la forme quadratique se traduit par la recherche du minimum par rapport à tous les $h(x, y)$ ($4X^2$ inconnues) de la quantité (où on fait apparaître le multiplicateur de Lagrange λ)

$$\sum_{s=-X}^{X-1} \sum_{t=-X}^{X-1} \sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} h(s,t) h(p,q) r(p-s, q-t) + \lambda \left[1 - \sum_{x=-X}^{X-1} \sum_{y=-X}^{X-1} h(x,y) \right] \tag{174}$$

Le minimum est obtenu lorsque pour x,y = -X, . . . , X-1 ($4X^2$ équations)

$$\sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} h(p,q) r(p-x, q-y) = \lambda \tag{175}$$

La solution $h(x, y)$ cherchée est la solution d'un système linéaire de $4X^2$ équations à $4X^2$ inconnues. (Cette solution est d'abord calculée à la constante multiplicative λ près, ensuite la valeur de λ est calculée *a posteriori* de manière à ce que la somme des é chantillons de $h(x, y)$ soit égale à 1.)

En admettant que la matrice R (de taille $4X^2 \times 4X^2$) dont l'élément générique est

$$r(x,y,p,q) = r(p-x, q-y) \tag{176}$$

associée au système linéaire à résoudre a une inverse R^{-1} dont l'élément serait $\rho(x, y, p, q)$, les échantillons de la réponse impulsionnelle du filtres seront

$$h(p,q) = \lambda \left[\sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} \rho(x,y,p,q) \right] \tag{177}$$

la valeur de λ vérifiant la contrainte est

$$\lambda = \left[\sum_{p=-X}^{X-1} \sum_{q=-X}^{X-1} \rho(x,y,p,q) \right]^{-1} \tag{178}$$

La valeur du minimum est égale à λ.

6.2.3 Les techniques paramétriques (maximum d'entropie)

Cette approche classique présente des limites. En effet, une classe d'application essentielle en traitement des signaux bidimensionnels est celle où on cherche à détecter un signal sinusoïdal (ou plusieurs) caractérisé par sa fréquence et sa direction en présence d'un bruit de fond. C'est par exemple le cas en analyse de signaux sonar et radar ou en radio astronomie. L'analyse par le périodogramme est parfois mal adaptée car elle ne permet qu'une résolution limitée en fréquence. On a donc été amené à proposer d'autres techniques qui sont très liées aux techniques de modélisation d'un signal comme la sortie d'un filtre bidimensionnel.

Dans le cas de l'analyse des signaux bidimensionnels, il n'est pas toujours possible d'étendre les techniques paramétriques monodimensionnelles. La cause majeure des limitations des possibilités d'extensions peut être esquissée de la manière suivante :

Dans le cas monodimensionnel, on peut (en utilisant les techniques de prédiction linéaire) trouver les coefficients d'un filtre $1/A(z)$ tels que les $2p+1$ échantillons de la fonction d'autocorrélation $r(-p)$, . . . ,r(0),. . . , $r(p)$ du signal analysé soient identiques aux p premiers échantillons de la sortie de ce filtre soumis à un bruit blanc. Ceci revient à résoudre un système de p équations à p inconnues (équations de Yule Walker). Cette identité entre le nombre de paramètres du filtre et le nombre de coefficients de corrélations permet une extension de la fonction d'autocorrélation dont la densité spectrale est définie positive sous la forme

$$R(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A(z^{-1})} \tag{179}$$

Les choses ne se présentent pas si bien dans le cas bidimensionnel : on peut trouver les $2p2^{+}2p+1$ coefficients d'un filtre prédicteur $A(z_x, z_y)$ de support carré permettant de prédire les coefficients d'autocorrélation. Mais les extensions des équations de Yule Walker font apparaître de l'ordre de $4p^2$ valeurs de la fonction d'autocorrélation. Dans ces conditions il n'est généralement pas possible d'affirmer que l'extension de l'autocorrélation sous la forme définie positive

$$R(z_x, z_y) = \frac{\sigma^2}{A(z_x, z_y)A(z_x^{-1}, z_y^{-1})} \tag{180}$$

coïncide exactement avec les $4p^2$ valeurs données de la fonction d'autocorrélation.

La formulation la plus efficace d'une extension bidimensionnelle de cette approche paramétrique est celle du maximum d'entropie : Dans cette méthode, on cherche le filtre tel que les échantillons de la transformée de Fourier inverse du carré du module de sa réponse en fréquence coïncident evec ceux qui sont connus $r(x, y)$ *en faisant le moins d'hypothèses possibles sur la valeur des échantillons inconnus*. Cette idée d'absence d'hypothèse peut se traduire en termes d'"entropie". On est ainsi amené à maximiser l'entropie de la densité spectrale

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{\sigma^2}{A(e^{ju}, e^{jv})A(e^{-ju}, e^{-jv})} dudv \tag{181}$$

en respectant les contraintes de coïncidence des échantillons de la fonction d'autocorrélation, soit

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^2 e^{j(ux+vy)}}{A(e^{ju}, e^{jv})A(e^{-ju}, e^{-jv})} dudv = r(x, y) \tag{182}$$

lorsque

$$y = 0 \quad : \quad 0 < x < X \tag{183}$$

$$y > 0 \quad : \quad -X < x < X \tag{184}$$

. Les contraintes de coïncidence ne peuvent pas toujours être respectées lorsque les degrés en z_x et z_y sont faibles, et il faut donc envisager de modéliser le signal grâce à des fonctions de transfert d'ordre élevé. On peut chercher une solution du problème en deux temps : d'abord en cherchant les coefficients de $A(z_x, z_y)A(z_x^{-1}, z_y^{-1})$ puis en factorisant ce polynôme fonction de deux variables (à condition que cette factorisation soit possible). Une méthode pour calculer les coefficients de $A(z_x, z_y)A(z_x^{-1}, z_y^{-1})$ peut être une technique itérative de recherche de maximum : le nombre de paramètres à trouver étant supérieur au nombre de contraintes, on se place en un point du sous-espace des paramètres où les contraintes sont vérifiées et on cherche à minimiser l'entropie tout en restant dans ce sous-espace, ce qui ne garantit pas l'obtention d'un maximum absolu.

7 Quelques problèmes de traitement de signaux multidimensionnels

7.1 Propagation de signaux

De nombreuses applications portent sur l'analyse de signaux se propageant dans l'espace en fonction du temps. Par exemple, la propagation de signaux acoustiques ou électromagnétiques se traduit pas des équations différentielles à coefficients constants.

7.1.1 Equation de Helmholtz

L'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{185}$$

appliquée à une vibration fonction sinusoïdale su temps

$$f(x,y,z,t) = a(x,y,z)e^{j\varphi(x,y,z)}e^{j\omega t} \tag{186}$$

devient l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x,y,z,t) = 0 \tag{187}$$

7.1.2 Propagation de signax en géophysique

C'est par exemple le cas en géophysique : une onde acoustique (vibration d'un émetteur, explosion d'un charge) est engendrée et mesurée par des capteurs après avoir éventuellement été réverbérée par des couches du sous-sol présentant de brusques variations de caractéristiques (écho). On cherche à retrouver la position de ces zones où l'écho a été engendré à partir des signaux mesurés par les différents capteurs. Ces capteurs forment par exemple un réseau régulier planaire ou linéaire. En analyse de signal Sonar ou Radar on est amené à étudier des problèmes du même type.

Un signal (l'onde qui se propage) est alors caractérisé par sa valeur en fonction de ses coordonnées $\vec{x}$ (un vecteur dans un espace à trois dimensions) et du temps t. On peut calculer sa transformée de Fourier dans un espace à quatre dimensions

$$S(\vec{u},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)\exp -j[(\omega t - (\vec{u}.\vec{x})]d\vec{x}dt \tag{188}$$

La transformée inverse est

$$s(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{u},\omega)\exp j[\omega t - (\vec{u}.\vec{x})]d\vec{u}d\omega \tag{189}$$

Un signal est ainsi représenté comme une superposition d'ondes planes d'amplitude $S(\vec{u},\omega)$ de la forme

$$e(x,t) = \exp j[omega(t - \frac{(u.x)}{\omega})] \tag{190}$$

de pulsation ω et dont la direction et la vitesse de propagation sont respectivement la direction du vecteur $\vec{u}$ et $\omega/|\vec{u}|$. (en termes de dimension, ω est l'inverse d'un temps et $|\vec{u}|$ est l'inverse d'une distance). Dans l'espace des fréquences $(\vec{u},\omega)$ les ondes planes se propageant à la même vitesse c sont situés sur un cône

$$\frac{\omega}{|\vec{u}|} = c(constante) \tag{191}$$

.

Dans cet espace des signaux se propageant dans la même direction appartiennent à un hyperplan passant par l'origine et contenant l'axe des fréquences ω.

7.1.3 Analyse par formation de voie

On est souvent amené à filtrer un signal de manière à en extraire une composante particulière (par exemple dans une bande de fréquences donnée, à une vitesse donnée et dans une direction donnée) ce qui revient à extraire une composante sinusoïdale dans un espace à quatre dimensions. Ceci peut se faire grâce à un filtre passe bande sélectif.

En particulier la formation de voie consiste à extraire d'un signal les composantes se propageant dans une direction particulière $\vec{u}$ et à une vitesse donnée (mais les composantes peuvent être de fréquences différentes). Dans l'espace des fréquences on cherche donc à estimer l'amplitude et la phase des sinusoïdes à l'intersection d'un cône et d'un plan.

L'estimation de ce signal se fait grâce à la mesure du signal $s(x,t)$ par un réseau de K capteurs, le capteur numéro k étant situé au point de coordonnées x_k . Le signal temporel $h_k(t)$ reçu par l'un des capteurs (k) de ce réseau peut être amplifié par un gain g_k et retardé d'un temps τ_k. Le signal final de la formation de voie est la moyenne de ces différents signaux

$$f(t) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} g_k h_k(t-\tau_k) \tag{192}$$

Le choix approprié des gains et des retards permet d' "orienter" le réseau de capteurs dans une direction donnée et de sélectionner une fréquence particulière.

Supposons que le signal capté soit une sinusoïde

$$e(\vec{x},t) = \exp j\omega[t-(\vec{\alpha}.\vec{x})] \tag{193}$$

La sortie du capteur numéro k est

$$h_k(t) = e(\vec{x_k},t) = \exp j\omega[t-\tau_k-(\vec{\alpha}.\vec{x_k})] \tag{194}$$

Le signal formé sera

$$f(t) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j\omega[t-\tau_k-(\vec{\alpha}.\vec{x_k})] \tag{195}$$

Supposons que les retards τ_k soient reliés aux positions x_k de manière à sélectionner une onde plane se propageant dans la direction $\vec{\alpha}_0$ à la vitesse $1/|\vec{\alpha}_0|$

$$\tau_k = -(\vec{\alpha}_0.\vec{x_k}) \tag{196}$$

La sortie $f(t)$ sera alors

$$f(t) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j\omega[t+((\vec{\alpha}_0-\vec{\alpha}).\vec{x_k})] \tag{197}$$

Le signal de sortie est un signal sinusoïdal de pulsation ω dont l'amplitude est

$$G(\vec{\alpha}_0,\vec{\alpha}) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j\omega[(\vec{\alpha}_0-\vec{\alpha}).\vec{x_k})] \tag{198}$$

Cette amplitude dépend de la postion des capteurs (x_k) et de la différence ($\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}$) entre la direction d'arrivée de l'onde et de l'orientation du réseau. Si on considère la variable

$$\vec{u} = -\omega(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}) \tag{199}$$

le réseau est ainsi caractérisé par la transformée de Fourier de sa configuration prenant en compte la position des capteurs et le gain affecté à chacun d'entre eux

$$G(\vec{u}) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j[(\vec{u}.\vec{x_k})] \tag{200}$$

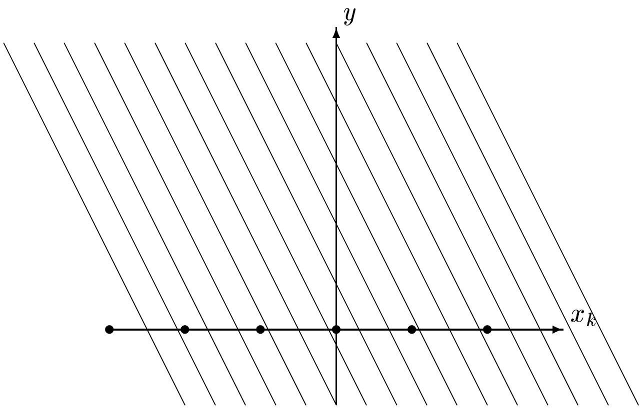


FIG. 31: Propagation d'ondes mesurées par des capteurs alignés et régulièrement espacés

Si le réseau est orienté dans la direction a de l'onde et sélectionne uniquement les ondes se propageant à la vitesse $c = 1/|\vec{a}|$, le signal temporel obtenu en sortie du réseau sera une sinusoïde dont le gain sera donné par la valeur de $G(u)$ pour $u = 0$, soit $G(0)$.

Ceci est vrai quelquesoit la pulsation temporelle ω du signal se propageant avec une vitesse donnée et dans une direction donnée : par addition, on en déduit que le signal n'est pas déformé par le réseau de capteur lorsque ses paramètres de retard sont correctement ajustés.

L'effet de la géométrie du réseau est analogue à celui d'une fenêtre de pondération d'analyse spectrale.

Remarques sur la formation de voies

Une onde plane sinusoïdale de pulsation w se propage dans un plan x0y à une vitesse c en provenance de la direction q. On capte cette onde par une ligne de capteurs régulièrement espacés situés sur l'axe Ox.

Le signal reçu par le capteur de position (=kd, où d est la distance entre deux capteurs voisins, c'est à dire le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial) est

Dans le plan des fréquences (, w), ce signal est représenté par une impulsion de Dirac située au point de coordonnées (- w cosq/c, w). Dans ce plan tous les signaux sinusoïdaux provenant de la direction q et se propageant à la vitesse c sont situés sur la droite de pente - c/cos q. Si on considère la projection de Radon dans le domaine spatio-temporel (x, t) sur la droite de pente cos q/c, on obtient donc le signal dont la transformée de Fourier est située sur cette droite de pente - c/cos q dans le plan des fréquences. Ce signal a pour expression

il peut donc être approximé par formation de voie : c'est le signal obtenu en additionnant les signaux reçus par les capteurs après qu'ils aient été retardés d'un temps kd cosq/c. Le gain g associé au capteur k agit comme l'échantillon k de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas sélectionnant la fréquence spatiale 0. Comme le nombre d'échantillons de ce filtre est fini, la forme de cette réponse impulsionnelle peut être celle d'une fenêtre

7.2 Cas où les signaux sont échantillonnés et les capteurs alignés et régulièrement espacés

Dans le cas des signaux échantillonnés dans le temps, t prend des valeurs entières. Supposons de plus qu'on analyse les signaux mesurés par un réseau de capteurs situés sur une droite et régulièrement espacés

$$x_k = kx_1 = k. \tag{201}$$

On cherche à reconstituer le signal se propageant avec une vitesse c dans une direction $\vec{\alpha)}$ faisant l'angle θ avec l'axe Ox portant les capteurs. Le signal reçu par le capteur k est

$$f_k(t) = f_0(t - \frac{k}{c}\cos\theta) \tag{202}$$

Nous traiterons seulement le cas où l'espace de propagation des ondes est un espace à deux dimensions. Dans le cas où les signaux se propagent dans un espace à trois dimensions, il faut étendre la méthode au cas où les capteurs forment un réseau bidimensionnel dont l'orientation dépendra de deux paramètres (gisement et azimuth). Le signal reçu par les capteurs est une fonction de deux variables (k, t). Comme toutes les ondes se propagent à vitesse constante, sa transformée de Fourier bidimensionnelle a pour support l'axe du plan (u, ω)

$$\omega = cu\cos\theta \tag{203}$$

Donc une manière de reconstituer le signal temporel cherché est de calculer la transformée de Fourier bidimensionnelle de $g(k,t) = f_k(t)$ et d'estimer par interpolation la valeur de cette transformée de Fourier le long de l'axe (203). Comme la transformée de Fourier est obtenue par utilisation de transformée rapide, les valeurs en sont connues pour un nombre fini de points dans le plan des fréquences et elles sont calculées à partir d'un nombre fini de points dans le domaine spatio-temporel. On se heurte alors à une double difficulté :

L'interpolation suppose que les variations dans le domaine spectral soient relativement lentes et donc que les supports des signaux dans le domaine spatio-temporel soient de petite dimension (signaux brefs et peu étendus dans l'espace) .

Le calcul de la transformée de Fourier à partir d'un nombre fini d'échantillons pose de plus le problème de la fenêtre de pondération. On sait en effet que l'analyse d'une fréquence pure se traduit par une dispersion de ce signal sinusoïdal en fonction de la transformée de la fenêtre de pondération.

7.2.1 Formation de voies et transformée de Radon

Pour cette reconstitution, il est aussi possible d'effectuer les calculs dans le domaine temporel en utilisant le théorème de projection : la transformée de Fourier le long de l'axe de pente c est donnée par la transformée de Fourier de la somme

$$h_c(t) = \int_{-\infty} \infty h(t - \cos\theta \frac{x}{c}) \tag{204}$$

Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale se propageant dans le plan $x0y$ à la vitesse c et dans la direction θ le signal reçu par le capteur de position $(x = k)$ est

$$f(k,t) = f(0, t - \frac{k}{c}\cos\theta) \tag{205}$$

Dans le plan des fréquences (u, ω), ce signal est représenté par une impulsion de Dirac située au point de coordonnées $(-\omega\cos\theta/c, \omega)$. Dans ce plan tous les signaux sinusoïdaux provenant de la direction θ et se propageant à la vitesse c sont situés sur la droite de pente $-c/\cos\theta$. Si on considère la projection de Radon dans le domaine (x, t) sur la droite de pente $\cos\theta/c$, on obtient donc le signal dont la transformée de Fourier est située sur cette droite de pente $-c/\cos\theta$ dans le plan des fréquences. Ce signal a pour expression

$$f_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \frac{k}{\cos}\theta c)dx \tag{206}$$

il peut être approximé par formation de voie : c'est le signal obtenu en additionnant les signaux reçus par les capteurs après qu'ils aient été retardés d'un temps $k\cos\theta/c$. Le gain g associé au capteur k agit comme l'échantillon k de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas sélectionnant la fréquence spatiale 0. Comme le nombre d'échantillons de ce filtre est fini, la forme de cette réponse impulsionnelle peut être celle d'une fenêtre de pondération utilisée en synthèse de filtres numérique et en analyse spectrale.

7.2.2 Résolution des équations de Maxwell utilisant la transformée de Fourier en compatibilté avec le théorème d'échantillonnage

7.3 Filtrage d'ondes sismiques

On étudie la propagation d'une onde acoustique $f(x,y,t)$ régie par une équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{207}$$

La valeur de cette fonction est mesurée au niveau du sol : $f(x,0,t)$ et donne une condition aux limite caractérisant la solution de l'équation différentielle. On cherche à déduire de ces mesures la valeur de l'onde en profondeur . Ce calcul revient à simuler la propagation “rétrograde” de l'onde par une succession d'extrapolations.

On peut écrire $f(x,y,t)$ à partir de la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'onde à la profondeur y

$$F(u,y,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,t)\exp -j(ux+\omega t)dxdt \tag{208}$$

en utilisant la transformée inverse

$$f(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,y,\omega)\exp j(ux+\omega t)dud\omega \tag{209}$$

et faire apparaitre $F(u,y,\omega)$ dans la transformée de Fourier de l'équation différentielle

$$u^2F(u,y,\omega) + \frac{\partial^2 F(u,y,\omega)}{\partial y^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2 F(u,y,\omega)}{\partial t^2} = 0 \tag{210}$$

Le problème de rétropropagation consiste donc à résoudre cette équation différentielle en fonction de la profondeur y connaissant les conditions initiales en $y = 0$. La forme de la solution de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants (u et ω sont fixés) dépend du signe du coefficient de $F(u,y,\omega)$ soit $(u2 - \frac{\omega^2}{c^2})$. Si ce coefficient est positif, la solution de l'équation différentielle est une exponentielle réelle et son énergie est finie : elle s'amortit rapidement et ne se propage guère. Si ce coefficient est négatif, la solution est une exponentielle complexe et il y a propagation de l'onde en fonction de y : on peut écrire

$$F(u,y,\omega) = F(u,0,\omega)\exp jky \tag{211}$$

$$k^2 = w^2/c^2 - u^2 \tag{212}$$

La solution complète devrait être de la forme d'une somme de deux exponentielles de phases opposées, mais on peut interpréter cette somme comme la combinaison d'une onde se propageant vers le haut ($k > 0$) et d'une onde se propageant vers le bas ($k < 0$) ; or on s'intéresse à la propagation de l'onde ascendente qu'on cherche à reconstituer, on ne garde donc qu'une des deux exponentielles possibles.

La propagation peut s'interpréter comme un filtrage linéaire en fonction de la profondeur y.

Les composantes des signaux $f(x,0,t)$ dont les fréquences (u,ω) impliquent l'amortissement rapide ne seront pas donc propagées et doivent donc être filtrées (éliminées). Les autres sont propagées sans pertes mais avec un déphasage : elles sont donc filtrées par un filtre de gain unité et dont le déphasage pour la profondeur y est $y\sqrt{\frac{w^2}{c^2} - u^2}$ La visualisation de l'onde en fonction de x, y et t permet de reconstituer la propagation de l'onde et en particulier les instants et les profondeurs où l'onde a été réémise par réflexion sur une surface séparant deux couches de caractéristiques acoustiques différentes. Ceci donne des indications sur la constitution du sous-sol.

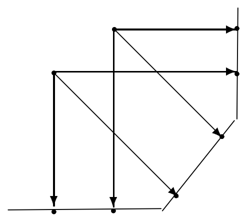


FIG. 32: Trois projections d'un objet composé de deux points permettent par de retrouver la forme de l'objet, c'est à dire les coordonées des deux points dans l'espace $x0y$

7.4 Reconstitution d'images à partir de projections

Dans ce paragraphe nous reprenons les résultats théoriques concernant les projections de Radon et nous montrons comment ils sont utilisés pour traiter les problèmes de reconstruction d'images en particulier dans des applications biomédicales comme la tomographie et l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Le principe de cette reconstuction est relativement simple : en fait on regarde un objet plus ou moins opaque (comme une radiographie) et on distingue donc les objets en projection. Ensuite on regarde les objets sous un autre angle, on en a donc une vue différente. On imagine bien qu'à partir de différentes vues on peut reconstruire l'objet par exemple dans un espace à deux dimensions à partir des projections vues sous des angles différents. C'est ce qui se passe dans un cas plus simple lorsqu'on fait de la triangulation : supposons que l'objet soit composé de deux points P_1 et P_2 de coordonnées $(x_1, y_1$ et (x_2, y_2) dans un plan $x0y$. On mesure les projections de ces deux points sur trois plans. Si on trace les droites passant par ces projections et perpendiculaires au plan de projection, trois de ces droites se coupent en chacun des deux points P_1 et P_2. Il n'y a pas d'autres points par lesquels passent trois droites.

Le principe de reconstruction en tomographie n'est pas exactement celui là, mais les idées sont assez semblable. Nous allons en décrire la formalisation.

7.4.1 Mesure de projections

Un signal traversant un milieu absorbant subit en général un diminution d'amplitude

$$a(y + \Delta y) = a(y) \exp[-f(y)\Delta y]. \tag{213}$$

Lorsqu'il se propage le long d'un parcours linéaire l'amplitude du signal se réduit en suivant la loi

$$a(Y) = a(-Y) \exp[\left[-\int_{-Y}^{Y} f(y)dy\right] \tag{214}$$

On suppose que l'amplitude du signal avant son atténuation par l'objet traversé est $A(-Y)$ et que l'atténuation $f(y)$ est nulle en dehors de l'objet analysé, (en dehors de l'intervalle $[-Y, Y]$)

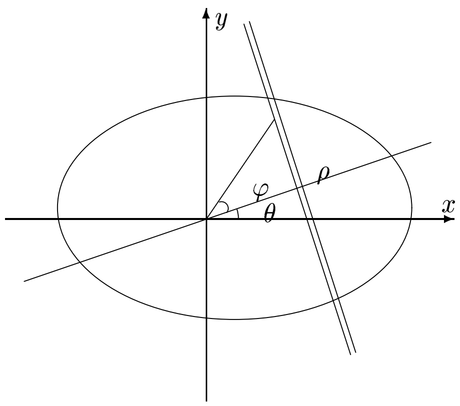
Dans un espace à deux dimensions, on peut analyser une région du plan caractérisé par une atténuation $f(x, y)$ en déplaçant le signal vertical le long de l'axe des abscisses

$$a(x, Y) = a(x, -Y) \exp[\left[-\int_{-Y}^{Y} f(x, y)dy\right] \tag{215}$$

Nous supposerons que $a(x, Y)$ est une constante, soit A.

On peut faire subir une rotation d'angle θ à l'émetteur engendrant le signal et au capteur sans bouger l'objet analysé $f(x, y)$ ce qui donne une fonction projetée dépendant du paramètre θ et où la variable x est remplacée par la variable ρ donnant la position d'un point sur l'axe de direction θ passant par l'origine. z donne alors la distance (signée) d'un point à cet axe

$$a(\theta, Z) = A \exp[\left[-\int_{-Z}^{Z} f(\rho\cos\theta - z\sin\theta, \rho\sin\theta + z\cos\theta)dz\right] \tag{216}$$



En supposant A connu, on dispose pour chaque analyse dans une direction θ d'une fonction $a_\theta(\rho)$. Le problème de la reconstitution du signal est alors le suivant :

Est-il possible, connaissant les valeurs des fonctions projetées $a_\theta(\rho)$ de retrouver la fonction $f(x, y)$? On peut répondre par l'affirmative à cette question grâce au théorème suivant

7.4.2 Propriétés des transformées de Fourier des fonctions projetées

Soit la fonction projetée

$$g(\theta, \rho) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos\theta - z\sin\theta, \rho\sin\theta + z\cos\theta)dz \tag{217}$$

(On suppose ici que le capteur et l'émetteur sont situés à l'infini et que A vaut 1)

La transformée de Fourier de cette fonction est

$$G(\theta, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta, \rho)\exp(-j\rho\omega)d\rho \tag{218}$$

$$G(\theta, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos\theta - z\sin\theta, \rho\sin\theta + z\cos\theta)\exp(-j\rho\omega)d\rho dz \tag{219}$$

On fait le changement de variable

$$\rho\cos\theta - z\sin\theta = x \tag{220}$$
$$\rho\sin\theta + z\cos\theta = y \tag{221}$$

correspondant à une rotation d'un angle $-\theta$ des axes, l'élément d'intégration devient $dxdy$. Si on remplacet ρ par sa valeur en fonction de x et de y ;

$$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{222}$$

$$G(\theta, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp -j(x\cos\theta + y\sin\theta)\omega dxdy \tag{223}$$

On y reconnait la transformée de Fourier $F(u, v)$ de $f(x, y)$ calculée pour des valeurs de u et v

$$u = \omega\cos\theta \tag{224}$$
$$v = \omega\sin\theta \tag{225}$$

soit

$$G(\theta, \omega) = F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta) \tag{226}$$

La transformée de la fonction projetée sur l'axe de direction θ est égale à la valeur de la transformée de Fourier de la fonction bidimensionnelle initiale $F(u, v)$ le long d'un axe de pente θ

$$v \cos\theta = u \sin\theta \tag{227}$$

On peut donc envisager la reconstitution du signal bidimensionnel $f(x, y)$ de la manière suivante :

On mesure différentes fonctions projetées pour différentes valeurs de θ de la fonction $f(x, y)$; on en prend la transformée de Fourier. On reporte cette transformée de Fourier monidimensionnelle dans le plan des fréquences bidimensionnel (u, v) ; on réalise par sommation de ces portions de transformées de Fourier bidimensionnelles une reconstitution estimée de $F(u, v)$ et par transformée de Fourier inverse on obtient la fonction cherchée $f(x, y)$.

Le défaut majeur de cette technique de reconstitution est la nécessité d'utiliser à la fois des représentations en coordonnées polaires (pour estimer la transformée de Fourier bidimensionnelle à partir de celles des projections) et en coordonnées cartésiennes pour effectuer le calcul de la transformée de Fourier inverse. Cette utilisation de deux systèmes de coordonnées impose la réalisation d'interpolations dans le domaine des fréquences, interpolations qui sont délicates car les variations de phases sont importantes et leur mauvaise reconstitution peut avoir des conséquences néfastes sur la qualité du signal reconstitué.

7.4.3 Reconstitution dans le domaine spatial ; formule de Radon

Il est aussi possible d'effectuer les calculs dans le domaine spatial en restant dans une représentation en coordonnées polaires.

La transformée de Fourier inverse du signal est

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp j(ux + vy) du dv \tag{228}$$

Si on prend la représentation en coordonnées polaires de $F(u, v)$, on obtient une fonction $G(\theta, w)$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction projetée. On peut alors effectuer un changement de variables et écrire

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j(\omega x \cos\theta + \omega y \sin\theta) \omega d\omega d\theta \tag{229}$$

Dans cette expression, on effectue le calcul sur un demi-axe d'angle θ et on fait varier cet angle θ de $-\pi$ à π ; on peut aussi écrire cette formule en effectuant une intégration sur des axes complets (ω variant de $-\infty$ à ∞) si on restreint l'intégration de θ au support $(0, \pi)$ et si on remplace le facteur ω qui est toujours positif par $|\omega|$. On obtient alors

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j(\omega x \cos\theta + \omega y \sin\theta) |\omega| d\omega d\theta \tag{230}$$

On peut aussi écrire f(x,y) dans un systèmes de coordonnées polaires (ρ, φ)

$$r(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j(\omega\rho\cos\varphi\cos\theta + \omega\rho\sin\varphi\sin\theta) |\omega| d\omega d\theta \tag{231}$$

soit

$$r(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) \omega d\omega d\theta \tag{232}$$

$$r(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho(\cos(\varphi - \theta) |\omega| d\omega d\theta \tag{233}$$

Supposons maintenant que θ est fixé. On peut alors faire apparaître une transformée de Fourier inverse

$$r(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho(\cos(\varphi - \theta) |\omega| d\omega \right] d\theta \tag{234}$$

On commence par calculer la reconstitution partielle dans le domaine spatial pour tous les points tels que

$$\rho\cos(\theta - \varphi) = constante \tag{235}$$

ce sont des points situés sur une droite. On effectue ainsi une "rétro-projection" , la valeur

$$h(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta,\omega)\exp j\omega\rho(\cos(\varphi-\theta)|\omega|d\omega \tag{236}$$

est calculée en fonction de ρ (θ est fixé). Elle est assignée à tous les points de la droite

$$\rho\cos(\theta-\varphi) = constante \tag{237}$$

. Ce calcul de $h(\rho,\theta)$ est répété pour différentes valeurs de θ ; on réalise ensuite pour chacune de ces valeurs de θ la rétroprojection et on additionne les résultats partiels pour obtenir l'image reconstituée, ce qui correspond à la sommation sur θ.

Le calcul de $h(\rho,\theta)$ est celui de la transformée de Fourier du produit de $G(\theta,\omega)$ par $|\omega|$. Il peut donc s'interpréter comme une convolution et être effectué dans le domaine spatial (monodimensionnel) plutôt que dans le domaine des fréquences. Il s'agit alors de filtrer $g_\theta(r)$, c'est à dire la fonction projetée par le filtre dont la réponse en fréquence est $|\omega|$. En théorie, ce calcul pose quelques difficultés : La réponse en fréquence du filtre s'écrit ω signe(ω). On ne peut pas écrire formellement la réponse impulsionnelle correspondante car c'est une fonction généralisée . Mais on peut exprimer les deux opérations qu'il faut effectuer sur gq(r) pour obtenir $h(\rho,\theta)$:

Il faut calculer la transformée de Hilbert de gq(r) puis dériver cette expression

$$h(\rho,\theta) = \frac{d}{d\rho}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\theta(s)}{r-s}ds\right) \tag{238}$$

(où l'intégrale est une intégrale en valeur principale)

Cette expression est connue sous le nom de formule de Radon et permet d'obtenir une autre classe d'algorithmes pour réaliser la reconstitution du signal spatial (sans faire intervenir de transformations de Fourier). Cependant, dans les applications on traite des signaux à bande limitée et échantillonnés et ce problème théorique ne se pose pas.

7.4.4 Cohérence avec le théorème d'échantillonnage

Mise en oeuvre pour les signaux échantillonnés Nous pouvons supposer que les projections sont calculées sur l'axe des abscisses lorsque

$$-\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{4} \tag{239}$$

et sur l'axe des ordonnées lorsque

$$\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{3\pi}{4} \tag{240}$$

Dans les deux cas, la fréquence d'échantillonnage sur les projections sera toujours égale à 2π et le pas d'échantillonnage sera toujours égal à un pour toutes les valeurs de θ. Effectuer la filtrage par le filtre dont la réponse en fréquence est $|\omega|$. On peut calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre mais il est préférable de faire les calculs dans le domaine des fréquences our pouvoir effectuer directement le calcul des rétroprojections. Le calcul des rétroprojections revient à décaler $h_\theta(t)$ d'une valeur proportionnelle à l'ordonnée

$$h_\theta(x,y) = h_\theta(x - y\cos\theta) \tag{241}$$

On fait ensuite la sommation pour les différents angles. On répète cette séquence d'opérations pour les projections effectuées sur l'axe des ordonnées et on additionne les résultats. On peut aussi effectuer les additions de rétroprojections sans filtrer les projections et appliquer un filtrage passe haut $\sqrt{u^2+v^2}$ à l'image reconstituée

Optimisation du résultat On remarque que les opérations utilisées sont des opérations linéaires invariantes par translations. L'effet du calcul des projections et de la reconstruction peut donc être caractérisé par la réponse impulsionnelle de cet ensemble d'opérateurs, soit $p(x,y)$. Lorsque le nombre de projections est fini, on voit que la reconstruction est imparfaite : la reconstruction $n(x,y)$ est le résultat de la convolution de l'image initiale et du filtre $p(x,y)$. (Bien sûr, la reconstruction s'améliore lorsqu'on augmente le nombre de projections.) Améliorer la reconstruction revient à résoudre cette équation de convolution bidimensionnelle.

FIG. 33: Réponse en fréquence du filtre à appliquer aux projections avant rétroproction

On peut aussi aboutir à cette formulation en se fondant sur une interprétation dans le domaine des fréquences : Si la transformée de Fourier de l'objet analysé $m(x, y)$ est $M(u, v)$ (nous supposons que l'objet est de support fini)

$$M(u,v) = \sum_{x=-L/2}^{L/2-1} \sum_{y=-L/2}^{L/2-1} m(x,y) \exp j(ux + vy) \tag{242}$$

, on a théoriquement d'après le théorème sur les projections de Radon

$$M(\omega \cos\theta, \omega \sin\theta) = G_\theta(\omega) \tag{243}$$

On peut donc chercher à minimiser

$$\sum_{u=-L/2}^{L/2-1} \sum_{v=-L/2}^{L/2-1} |M(\omega \cos\theta, \omega \sin\theta) - G_\theta(\omega)|^2 \tag{244}$$

ce qui mène à la recherche de la solution de l'équation de convolution

$$m = n * p \tag{245}$$

7.5 Imagerie par résonance magnétique nucléaire

Une autre technique extrèmement importante d'imagerie médicale est l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Le princípe de génération des signaux permettant de reconstituer cette forme d'images est complètement différent. Cependant la mise en équation montre que le formalisme mathématique de la reconstruction est très similaire à celui étudié dans le paragraphe consacré à la tomographie.

L'analyse des composants chimiques et l'imagerie par résonance magnétique nucléaire reposent sur des bases physiques qui sont bien au-delà des prétentions de ce cours. Je vais tenter d'en donner succintement les principes. Les conseils d'amélioration des personnes compétentes qui trouveront certainement cette presentation simpliste voire erronnée sont les bienvenus. J'ai tenté de retranscrire les éléments qui me paraissent les plus opérationnels dans l'article de Z. H. Cho *et al*, "Fourier transform nuclear maghetic resonance tomographic imaging", Proc. of the IEEE, vol. 70, no. 10 Oct. 1982, pp 1152-1173. De nombreux sites sont consacrés à l'analyse de ce phénomène, citons par exemple www.med.univ-rennes1.fr/cerf/edicerf/BASES/

7.5.1 Les équations fondamentales de la résonance manétique nucléaire

Parmi les 250 noyaux d'atomes stables, plus de 100 possèdent un moment magnétique (un spin) $\vec{M}$. Si ces noyaux sont placés dans un champ magnétique $\vec{B}$, ils obéissent à l'équation de Bloch

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B} \tag{246}$$

Rappel : le produit vectoriel $\vec{c}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ noté

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \tag{247}$$

se calcule dans un système de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \tag{248}$$

Les aimants s'alignent dans la direction de ce champ et oscillent autour de ce champ avec une fréquence ω_0 (fréquence de Larmor).

$$\vec{\omega_0} = -\gamma \vec{B} \tag{249}$$

Si on rajoute à ce champ fixe une onde électromagnétique dont la fréquence est la fréquence propre (de résonance) ω_0, il se produit une modification de l'état des protons dans le noyau, la direction des aimants que sont ces noyaux . Lorsqu'on arrête l'émission de l'onde électromagnétique, les protons reviennent à leur état d'équilibre (comme des aimants orientés dans l'axe du champ fixe) selon une une sinusoïde amortie dont la fréquence est la fréquence propre du noyau dans le champ $\vec{B}$. Cette fréquence ω_0 est identique ou au moins proche de la fréquence d'exciation si la fréquence des ondes radioélectriques a été choisie dans le voisinage de la fréquence de résonnance. Cette évolution du champ magnétique est captée par l'antenne qui a généré le champ oscillant et se traduit sous la forme d'une fonction temporelle, le FID ("free induction decay"). L'évolution de ce signal s'écrit en fonction du temps

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \cos(\omega_0 t) \tag{250}$$

$$y(t) = -x_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \sin(\omega_0 t) \tag{251}$$

$$z(t) = z_0 + (z_\infty - z_0) e^{-\frac{t}{T_1}}) \tag{252}$$

L'amortissement de la composante dans l'axe du champ B n'oscille pas et a une constante de temps T_1 ; celui de la composante orthogonale à B tourne à la fréquence ω_0 a une constante de temps T_2. T_1 est nettement plus grande que T_2. Ces deux constantes de temps sont caractéristiques des éléments étudiés. La fréquence de la sinusoïde amortie du retour à l'état d'équilibre pourra être différente de la fréquence des oscillations appliquées par la source électromagnétique externe. T_1 etT_2 peuvent varier en fonction du matériau analysé. La fréquence ω_0 est la fréquence de résonance du moment magnétique. Elle est fonction de l'élément chimique étudié et de la relation entre le noyau et les noyaux des atomes qui se trouvent dans son voisinage. elle est aussi proportionnelle au champ magnétique appliqué. Pour l'analyse chimique, on cherchera à réaliser des champs magnétiques constants dans la portion d'espace où on place l'objet à analyser pour ne pas avoir de dégradation des mesures du fait des fluctuations de ce champ. En visualisation bidimensionnelle ou tridimensionnelle, les objectifs sont différents :

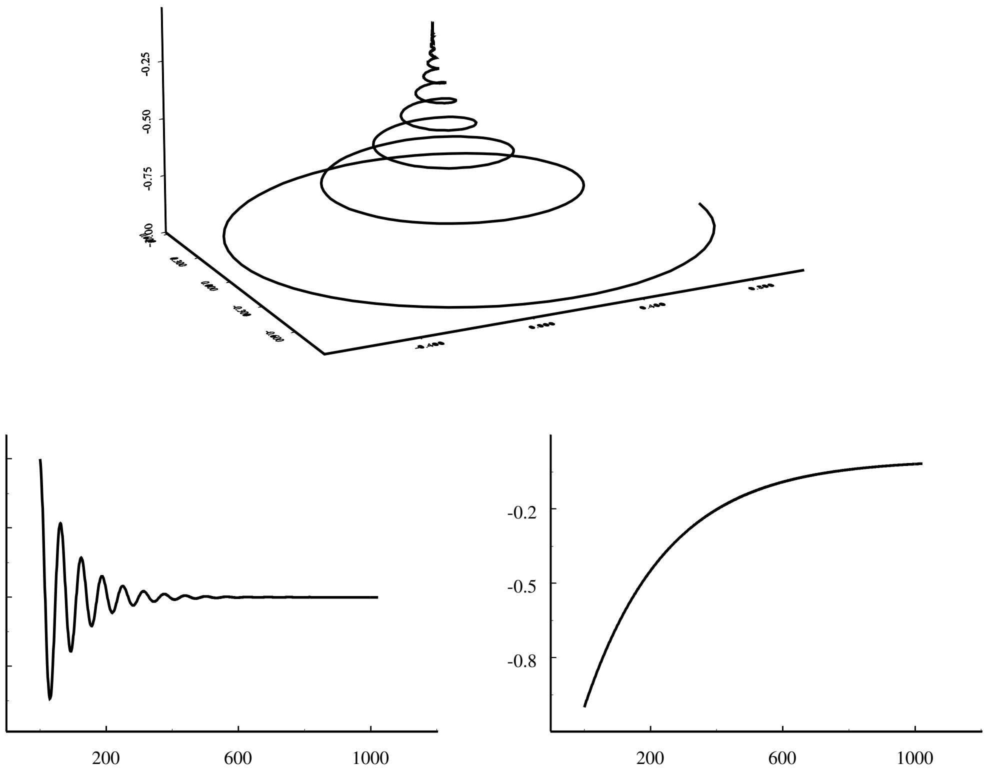


FIG. 34: Illustration du retour à l'équilibre (FID) dans le sens du champ magnétique fixe des moments magnétiques après suppression de l'excitation radioélectrique : (a), (b), (c)

7.5.2 Imagerie par résonance magnétique nucléaire

Dans ce type d'application on n'étudie qu'un seul élément chimique, et les variations de la fréquence de relaxation ne dépendront que de l'amplitude du champ $\vec{B}$. L'amplitude des oscillations dépendront de la densité (nombre par unité de volume) d'atomes du type analysé, par exemple de l'hydrogène. En construisant un champ $\vec{B}(x,y,z)$ de manière à le faire varier en fonction de l'espace, on pourra mettre en évidence la variation spatiale de la densité d'un composant. En particulier si on réalise une variation linéaire de l'amplitude de $\vec{B}(x,y,z)$ dans une direction, on obtiendra une composante de la transformée de Fourier tridimensionnelle de l'objet étudié.

Si le gradient de $\vec{B}(x,y,z)$ est constant

$$\frac{\partial \vec{B}(x,y,z)}{\partial x} = G_x \tag{253}$$

$$\frac{\partial \vec{B}(x,y,z)}{\partial y} = G_y \tag{254}$$

$$\frac{\partial \vec{B}(x,y,z)}{\partial z} = G_z \tag{255}$$

les trois composantes B_x, B_y et B_z de $\vec{B}$ sont des fonctions linéaires des coordonées, soit xG_x, yG_y et zG_z. Le signal RMN (ou FID) mesuré par l'antenne est la somme des signaux émis par tous les atomes. Par exemple la relaxation dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ s'écrit en fonction de la densité $\rho(x,y,z)$ de l'atome étudié

$$s(t) = \int\int\int \rho(x,y,z) \exp\left[-\frac{t}{T_2} + j\gamma(xG_x + yG_y + zG_z)t\right] dxdydz \tag{256}$$

On remarque que $s(t)\exp\frac{t}{T_2}$ est la valeur de la transformée de Fourier de $\rho(x,y,z)$ calculée à la fréquence spatiale à trois composantes $\gamma G_x t$, $\gamma G_y t$,$\gamma G_z t$. Une mesure RMN avec un choix de la direction du gradient donne ainsi la valeur de la transformée de Fourier 3D le long d'un axe dont la direction est donnée par celle du gradient. On peut ainsi remplir l'espace des fréquences en effectuant des séquences de mesures pour lesquelles on modifie la direction du gradient. On a le même type de données que celles utilisées en tomographie et on peut effectuer une reconstruction d'images soit par filtrage et rétroprojection, soit par reconstruction dans le domaine des fréquences. Les images ainsi obtenues sont d'une qualité remarquable.

7.5.3 Quelques chiffres pour donner les ordres de grandeur

Le champ magnétique fixe $\vec{B}$ a une amplitude de 500 à 15000 Gauss et un gradient de 0.01 à 1 Gauss/cm., ce qui donnera une résolution de l'ordre d'une fraction de millimètre. L'onde radiofréquence engendrant la résonance a une fréquence de l'ordre de 10 à 100 MHz. Par exemple, dans un champ Bo de 1 tesla, l'hydrogène 1H résonne à 42,57 MHz (l'hydrogène est l'élément étudié en imagerie clinique), le phosphore 31P à 17,24 MHz, le carbone 13C à 10,70 MHz, le sodium 23Na à 11,26 MHz. Les constantes de temps sont de l'ordre de 0.5 s pour T_1 et de 50 ms pour T_2.Le temps de relaxation T2 de l'eau pure est de 3 secondes. Le temps de relaxation T2 dans les tissus est de l'ordre de 50 ms.

7.6 Utilisation du bispectre en astrophysique

Un des problèmes actuels de l'astrophysique est l'augmentation de la résolution angulaire des télescopes. Il n'est d'augmenter la taille des télescopes. Donc les astronomes sont amenés à développer des techniques de reconstitution d'images d'objets stellaires à partir d'informations partielles. Pour obtenir ces informations partielles, ils cherchent à réaliser des interférences entre les signaux issus d'une même direction de l'espace (engendrés par la même étoile) et mesurés par des capteurs situés à une distance importante les uns des autres. Cette grande distance entre les capteurs peut être interprétée comme le diamètre d'un télescope . Le signal d'interférence obtenu à partir de deux signaux issus de capteurs situés en deux points A et B est approximativement égal à un signal sinusoïdal bidimensionnel dont l'amplitude et la phase sont celles de la transformée de Fourier $F(u, v)$ du signal analysé (la répartition spatiale $f(x, y)$ de la luminosité de l'étoile) calculée pour la fréquence spatiale (u_α, v_α) où u_α et v_β sont les composantes du vecteur AB. En dehors des problèmes techniques posés par la mise au point des franges d'interférence, il existe une difficulté supplémentaire parce que la traversée de l'atmosphère par les ondes lumineuses les affecte d'une perturbation. On peut considérer que cette perturbation est un déphasage aléatoire dans le temps et dans l'espace, de moyenne nulle. La phase de $F(u_\alpha, v_\alpha)$ est ainsi la différence de phase entre les signaux reçus par le capteur A et le capteur B, soit

$$(\varphi_B - \varphi_A)$$

qui ne dépend que de l'image analysée et non pas du temps. Toutefois, lors de mesures à travers l'atmosphère présentant une agitation thermique, une perturbation aléatoire

$$\Delta\varphi_B(t) - \Delta\varphi_A(t)$$

est ajoutée à cette différence de phase. Elle ne peut donc pas être mesurée directement.

Cependant, il est possible d'éliminer ces déphasages aléatoires de la manière suivante :

On considère trois points A, B et C, et on nomme α, β et γ les vecteurs AB, BC et CA. On a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{257}$$

si on mesure les amplitudes et les phases des trois composantes, on obtient

$$F(u_\alpha, v_\alpha) = \rho(u_\alpha, v_\alpha) \exp[j(\varphi(u_\alpha, v_\alpha) + \Delta\varphi_B(t) - \Delta\varphi_A(t))] \tag{258}$$
$$F(u_\beta, v_\beta) = \rho(u_\beta, v_\beta) \exp[j(\varphi(u_\beta, v_\beta) + \Delta\varphi_C(t) - \Delta\varphi_B(t))] \tag{259}$$
$$F(u_\gamma, v_\gamma) = \rho(u_\gamma, v_\gamma) \exp[j(\varphi(u_\gamma, v_\gamma) + \Delta\varphi_A(t) - \Delta\varphi_C(t))] \tag{260}$$

On effectue le produit de ces trois valeurs, qu'on appelle *bispectre* et que nous nommerons

$$R(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$$

. Il ne fait intervenir que les variables

$$u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta$$

car les deux autres variables se déduisent des quatre premières d'après l'éq. (257), les trois termes de déphasage aléatoires dûs aux perturbations atmosphériques se compensent. Cette propriété est connue sous le nom de cloture (parfois de fermeture)de phase. D'après l'éq. (257)

$$u_\gamma = -(u_\alpha + u_\beta) \tag{261}$$
$$v_\gamma = -(v_\alpha + v_\beta) \tag{262}$$
$$\tag{263}$$

et le bispectre s'écrit

$$\begin{aligned} R(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta) = {} & \rho(u_\alpha, v_\alpha)\rho(u_\beta, v_\beta)\rho(-u_\alpha - u_\beta, -v_\alpha - v_\beta) \\ & \exp j[\varphi(u_\alpha, v_\alpha) + \varphi(u_\beta, v_\beta) + \varphi(-u_\alpha - u_\beta, -v_\alpha - v_\beta)] \end{aligned} \tag{264}$$

car la somme des trois perturbations est nulle :

$$\Delta\varphi_B(t) - \Delta\varphi_A(t) + \Delta\varphi_C(t) - \Delta\varphi_B(t)\Delta\varphi_A(t) - \Delta\varphi_C(t) = 0 \tag{265}$$

On a ainsi éliminé les perturbations aléatoires. En effectuant cette opération on a aussi éliminé les éventuels composantes linéares de la forme $(\lambda u + \mu v)$ présentes dans les phases $\varphi(u_\alpha, v_\alpha)$, $\varphi(u_\beta, v_\beta)$ et $\varphi(u_\gamma, v_\gamma)$.

Cette élimination n'a pas de conséquences majeures car un déphasage linéaire se traduit dans le domaine spatial par une translation mais ne déforme pas l'image analysée. Si on excepte cette translation, le bispectre contient l'information $F(u,v)$. Il faut bien sûr trouver des moyens de déduire $F(u,v)$ de $R(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$

En pratique, il existe des techniques indépendantes de la mesure du bispectre pour calculer l'amplitude de la transformée de Fourier de l'image ; le bispectre est surtout utile pour la reconstitution de la phase de cette transformée et on sait que cette de phase est très informative dans la représentation de la forme de l'image cherchée.

En ce qui concerne la recherche de la phase de $F(u,v)$ à partir de la phase $\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$ de $R(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$, on peut utiliser l'algorithe suivant on peut initialiser un algorithme en se fixant a priori et arbitrairement (par exemple à 0) deux premières valeurs de la phase $\varphi(u_\alpha, v_\alpha)$, $\varphi(u_\beta, v_\beta)$. Ce choix arbitraire revient simplement à se fixer la translation que subira l'image, et cette translation n'a pas d'importance dans le problème étudié où on s'intéresse à la forme d'un objet . Si on a mesuré $\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$, on peut donc en déduire la phase φ en un troisième point du plan des fréquences

$$\varphi(-u_\alpha - u_\beta, -v_\alpha - v_\beta) = -\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta) + \varphi(u_\alpha, v_\alpha) + \varphi(u_\beta, v_\beta) \tag{266}$$

L'image analysée est réelle et sa phase est une fonction impaire

$$\varphi(-u,-v) = -\varphi(u,v) \tag{267}$$

On connait alors la phase en six points du plan des fréquences : α, $-\alpha$, β, $-\beta$, γ, $-\gamma$. Il y a cloture de phase pour le triplet (α, β, γ) et pour le triplet $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Si maintenant on mesure simultanément la phase pour les fréquences α, $-\gamma$ et $(-\alpha + \gamma)$ et si on calcule le bispectre associé à ce triplet on peut donc en déduire la phase non perturbée $\varphi(u,v)$ à la fréquence $(-\alpha + \gamma)$. Par un choix judicieux du triple de fréquences pour lequel on calcule le bispectre on peut donc augmenter le nombre d'échantillons du plan des fréquences pour lesquels la phase est connue. Si de plus on tient compte d'informations connues a priori sur l'image cherchée ou d'hypothèses permettant de compléter la transformée de Fourier dans le plan des fréquences, on peut estimer cette transformée de Fourier de l'image dans la région utile du domaine bidimensionnel des fréquences et donc par transformée inverse, reconstruire l'image de l'objet étudié.

7.6.1 Bispectre et triple corrélation

Le bispectre est la transformée de Fourier de la triple corrélation . Nous nous bornerons à montrer ce résultat dans le cas des fonctions monodimensionnelles. L'extension au cas bidimensionnel est directe.

Soit un bispectre calculé de la manière décrite dans le paragraphe précédent (7.6)

$$R(u,v) = F(u)F(v)F(-u-v). \tag{268}$$

C'est une fonction de deux variables. Sa transformée de Fourier inverse est

$$r(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)F(v)F(-u-v) \exp(jux + jvy) du dv \tag{269}$$

ou encore

$$r(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(jux) du \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v)F(-u-v) \exp(jvy) dv \tag{270}$$

La transformée de Fourier inverse du produit de deux fonctions $F(\omega)G(\omega)$ est une convolution

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{271}$$

Si on choisit pour variable v à la place de ω et la fonction

$$G(v) = F(-u-v), \tag{272}$$

on obtient

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-u-v) \exp(jvt) dv \tag{273}$$

soit, en effectuant le changement de variable

$$v + u = w \tag{274}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(-w)\exp[j(w-u)t]dw \tag{275}$$

ce qui donne une translation dans le domaine de la variable t

$$g(t) = f(-t)\exp(-jut) \tag{276}$$

On peut reporter cette valeur de $g(t)$ dans la convolution transformée de Fourier inverse du produit (271)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)F(-u-v)\exp(jvy)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau-y)\exp j(u\tau-uy)d\tau \tag{277}$$

$r(x,y)$ s'écrit alors

$$r(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp(jux)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau-y)\exp j(u\tau-uy)d\tau\right]du \tag{278}$$

En commutation les opérateurs de sommation

$$r(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau-y)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp j(ux+u\tau-uy)du\right]d\tau \tag{279}$$

c'est à dire, en exprimant la transformée de Fourier inverse

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp j(ux+u\tau-uy)du = f(x+\tau-y) \tag{280}$$

$$r(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(x+\tau-y)f(\tau-y)d\tau \tag{281}$$

En posant

$$\tau - y = z \tag{282}$$

cette expression devient

$$r(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)f(z+x)f(z+y)dz \tag{283}$$

expression connue sous le nom de triple corrélation.

7.7 Filtrage et détection de contour

De nombreux problèmes pratiques d'analyse d'image nécessitent une analyse préalable où il faut découper l'image en régions homogènes séparées par des contours. En général les régions homogènes sont des régions où l'intensité lumineuse varient lentement en fonction des coordonées spatiales. Les contours séparant ces régions sont des portions de l'image de faible largeur (largeur de l'ordre de un pixel) où les variations d'intensité sont importantes. Il existe une multitude de méthodes pour caractériser les régions homogènes et pour détecter les contours

7.7.1 Régions

Caractéristiques d'une région ; séparation en sous-régions si les caractéristiques ne sont pas homogènes ou au contraire fusion de régions si les caractéristiques sont semblables.

7.7.2 Texturue

Les régions homogènes d'une image ne sont pas nécessairement des régions d'intensité constante ou des régions où les variations spatiales de l'intensité sont lentes. Il peut s'agir de régions où les caractéristiques statistiques (en particulier les caractéristiques spectrales ne varient pas ou varient peu). On peut ainsi caractériser ces régions par un nombre de paramètres plus élevés (par exemple les paramètres obtenus par analyse spectrale paramétrique). Ainsi c'est le vecteur des paramètres qui varie lentement en fonction des coordonnées spatiales.

7.7.3 Le filtre de Canny dans le domaine des fréquences

Un des outils considérés comme les plus intéressants pour effectuer le prétraitement des images en vue de la détection de contour est le filtre de Canny qui est en général proposé sous une forme séparable : filtrage monodimensionnel ligne par ligne puis colonne par colonne. La réponse impulsionnelle monodimensionnelle de ce filtre est

$$h(x) = x \exp(-\alpha|x| \tag{284}$$

Ce filtre qui est un filtre passe-bande a un double objectif : sélectionner les fréquences relativement élevées pour mettre en évidence les variations rapides dans l'image, car ces variations rapides correspondent en général aux contours ; tout en filtrant autant que possible le bruit dont l'importance relative est plus grande dans les hautes fréquences. Le paramètre α doit être réglé en fonction de l'application envisagée. L'implémentation séparable est par exemple celle de Deriche (filtre de "Canny-Deriche") sous la forme d'un filtre récursif traitant chaque ligne ou chaque colonne dans un sens puis dans l'autre. Cette forme séparable ne conserve pas l'isotropie : un filtre ne traite pas de la même manière les verticales ou les horizontales que les obliques. Pourtant, si on l'application autorise le traitement par transformée de Fourier, il est possible de réaliser le filtrage dans le domaine des fréquences bidimensionnelles.

L'expression du filtre de Canny dans le domaine des fréquences est

$$H(\omega) = \frac{4j\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \tag{285}$$

C'est sur l'image filtrée ligne par ligne puis colonne par colonne que sont détectées les variations rapides du signal qui sont interprétées comme un contour ou comme du bruit.

On peut donner une forme bidimensionnelle de ce filtre en imposant la symétrie et l'invariance par rotation

$$H(u,v) = 4\alpha \frac{ju - v}{(\alpha^2 + u^2 + v^2)^2} \tag{286}$$

La réponse en fréquence de ce filtre a pour module

$$\rho(u,v) = 4 \frac{sqrt(u^2 + v^2}{(\alpha^2 + u^2 + v^2)^2} \tag{287}$$

et pour phase

$$\varphi(u,v) = \arg(v - ju) \tag{288}$$

Ce filtre produit un signal filtré complexe : la partie réelle donne la composante du gradient suivant l'axe des abscisses et la partie imaginaire la composante suivant l'axe des ordonnées. Le module du gradient est le module de ce nombre complexe.

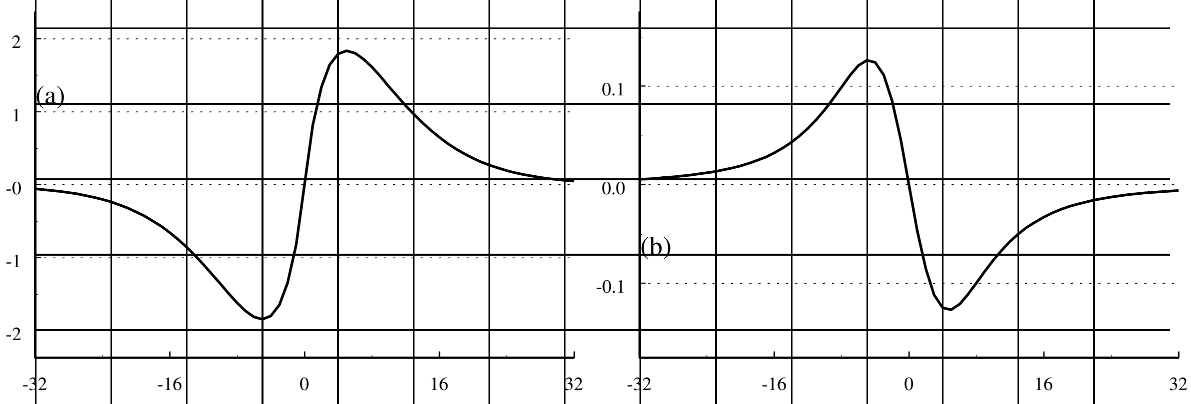


FIG. 35: Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence (partie imaginaire) du filtre de Canny

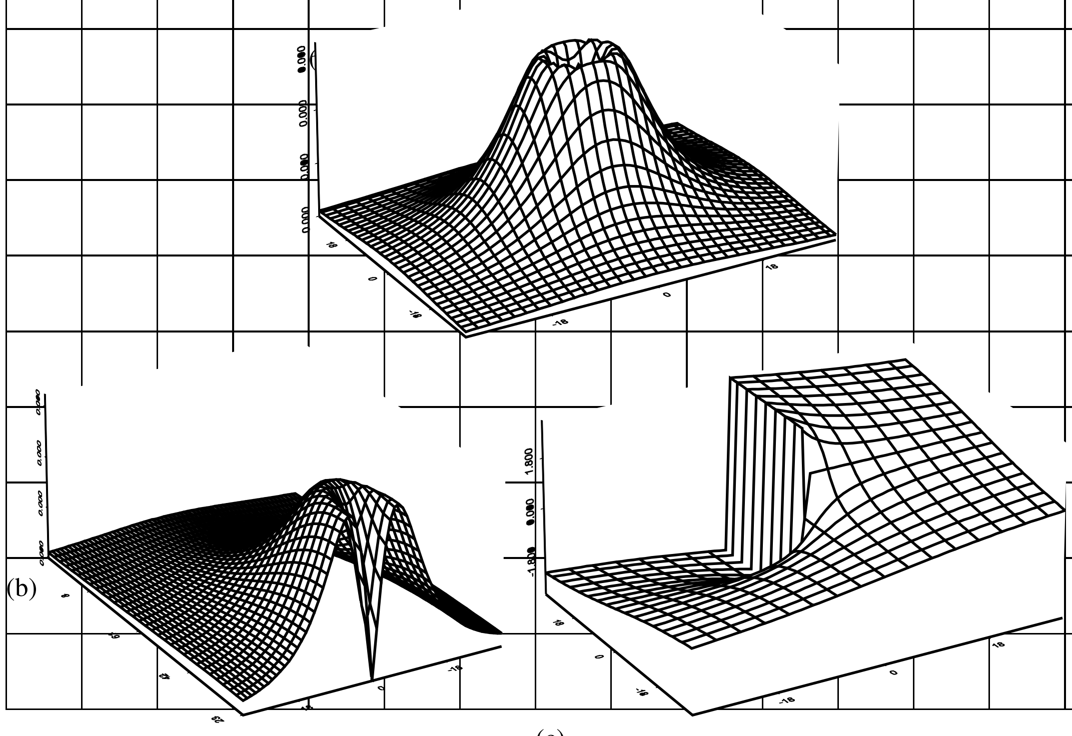


FIG. 36: Module, coupe du module et phase du filtre de Canny bidimensionnel

Courbure d'un contour La réalisation d'un filtre bidimensionnel dans le domaine des fréquences permet d'effectuer certains calculs dont la réalisation serait plus fastidieuse dans le domaine spatial.

Soit $f(x,y)$ l'image à analyser de transformée de Fourier $F(u,v)$. Pour calculer une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ on peut calculer dans le domaine des fréquences $juF(u,v)$ et $jvF(u,v)$. Il faut bien entendu tenir compte de l'éventuelle amplification du bruit dans le domaine des hautes fréquences. Les transformées des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

sont respectivement

$$-u^2F(u,v), -uvF(u,v) \text{ et } -v^2F(u,v).$$

Il est intéressant de noter que ces formulations dans le domaine des fréquences donnent les valeurs exactes des dérivées alors que dans le domaine spatial on se contente souvent de valeurs très approchées (mais la plupart du temps suffisantes en pratique). Ces calculs de dérivées exactes permettent par exemple de trouver la pente précise d'un contour :

$$arctg \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} |_{x=x_0, y=y_0} \tag{289}$$

On peut aussi, à partir des dérivées secondes calculer le rayon de courbure d'un contour $\rho(x_0,y_0)$:

$$\rho(x_0,y_0) = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2} |_{x=x_0, y=y_0} \tag{290}$$

L'appartenance d'un point à un contour correspond en général à une valeur élevée de l'amplitude du gradient

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

et tel que l'intersection de la fonction analysée $f(x,y)$ avec le plan vertical perpendiculaire à la tangente horizontale au contour

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0$$

présente un point d'inflexion, soit pour

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial f}{\partial y})^2 = 0 \tag{291}$$

Bien sûr cette méthode est particulièrement sensible au bruit car la double dérivation amplifie considérablement les hautes fréquences.