# Chapitre 4

# Représentations discrètes

Chapitre rédigé par Isabelle BLOCH

## 4.1 Introduction

Le traitement des images par ordinateur nécessite de disposer de représentations discrètes des scènes observées. On dispose alors d'un échantillonnage de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$, qui est de plus fini, ce qui justifie de représenter les images sous forme matricielle. Pour traiter de tels ensembles de points, deux solutions sont possibles :

- soit on plonge les points discrets de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et on les traite comme s'ils appartenaient à un espace continu ; ce sont alors souvent des procédés de géométrie algorithmique qui sont mis en œuvre ;
- soit on transpose les traitements continus au cas discret, en essayant d'en préserver les effets et les propriétés.

Le choix de l'une ou l'autre de ces solutions dépend beaucoup du type de traitement à effectuer, du type de représentation sur lequel s'appuie ce traitement, des propriétés souhaitées, de la complexité des calculs, etc. Par exemple, on garantit de meilleures propriétés de connexité avec des rotations continues que des rotations discrètes. Au contraire, les opérations morphologiques de base sont beaucoup plus simples à effectuer dans un espace discret (voir le chapitre 6 sur la morphologie mathématique). Dans les cas où les deux approches sont possibles, elles ne sont pas toujours équivalentes, et il est souvent difficile de garantir que la transformation appliquée à une version discrète d'un objet fournira le même résultat que la discrétisation du résultat de la transformation continue.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons surtout aux problèmes de représentations géométriques discrètes, qui serviront de support aux traitements et transformations effectués directement dans $\mathbb{Z}^n$. Des exemples de tels traitements seront abordés en particulier dans le chapitre de morphologie mathématique (chapitre 6). Nous aborderons ici succinctement les pavages et maillages (section 4.2), sur lesquels sont définies les images discrètes, puis les questions de topologie (section 4.3), les problèmes de représentations de quelques structures géométriques simples, déterministes (section 4.4) ou aléatoires (section 4.5), et enfin la définition et le calcul de distances discrètes (section 4.6). Un exposé plus détaillé sur tous ces points ainsi que sur d'autres aspects de la géométrie discrète en traitement d'images peut être trouvé dans [Chassery et Montanvert, 1991].

Les principes décrits peuvent être appliqués aussi bien à la synthèse qu'à l'analyse d'images. La géométrie discrète constitue toujours un axe de recherche important dans ces deux domaines.

## 4.2 Pavages et maillages

### 4.2.1 Définitions et contraintes

Un pavage est une partition de l'espace continu ($\mathbb{R}^n$) en cellules élémentaires (tout l'espace est recouvert par les cellules, et les cellules n'ont pas d'intersection deux à deux).

Cette définition, la plus générale, peut donner lieu à une infinité de solutions si l'on n'impose pas de contraintes supplémentaires sur la forme et la disposition des cellules. En pratique, des contraintes sont imposées :
- d'une part par les capteurs, dont la surface sensible a généralement une structure régulière,
- et d'autre part par l'utilisation que l'on souhaite faire de la représentation, qui impose une certaine régularité et simplicité, ainsi que certaines propriétés sur le pavage résultant sur lesquelles nous reviendrons.

Deux méthodes peuvent être envisagées pour construire un tel pavage :

1. La première consiste à se donner une distribution de points dans l'espace. Puis à chaque point $P$ est associée une cellule $V_P$, de telle sorte qu'elle n'intersecte aucune autre cellule et qu'elle ne laisse pas de ¡¡ vide ¿¿ dans l'espace. La solution la plus simple consiste à choisir pour $V_P$ l'ensemble des points de l'espace qui sont les plus proches de $P$ que de tout autre point de la distribution. Dans le cas où la distribution des points est régulière, on aboutit à un pavage classique, tel que ceux que nous verrons dans la section suivante. Dans le cas où la distribution est irrégulière, on aboutit à un pavage de Voronoï, que nous décrirons plus en détails dans la section 4.4. Les points de la distribution peuvent être interprétés comme des germes, à partir desquels on fait croître des cellules à vitesse constante, jusqu'à ce que tout l'espace soit rempli (voir figure 4.1).

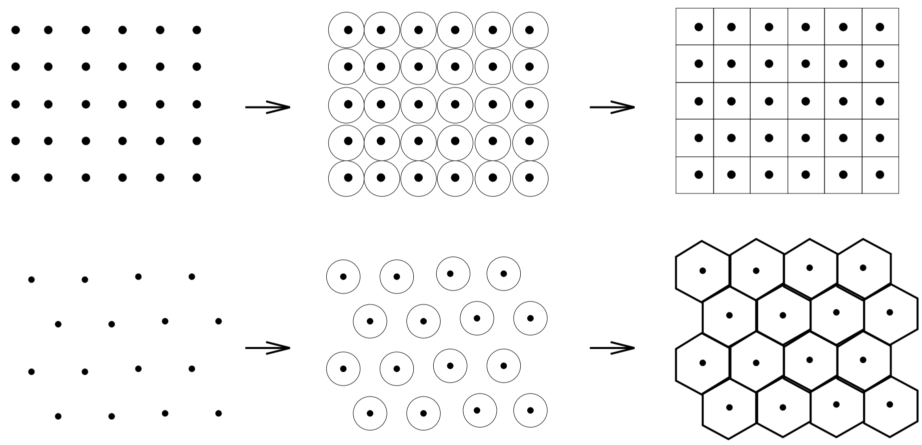

FIG. 4.1 – Deux exemples de construction d'un pavage par propagation à partir d'une distribution de points régulière.

2. La deuxième solution consiste à se donner au contraire un modèle a priori de cellule élémentaire, et à reproduire ce modèle en juxtaposant les cellules pour construire une partition de l'espace [Grunbaum et Shepard, 1989]. Cela n'est bien sûr pas possible avec n'importe quel modèle de cellule. On impose généralement que celui-ci soit un polygone (ou polyèdre) convexe, régulier, et que dans la juxtaposition les sommets soient en contact avec d'autres sommets mais pas avec des arêtes (typiquement, la configuration de la figure 4.2 ne satisfait pas cette dernière condition).

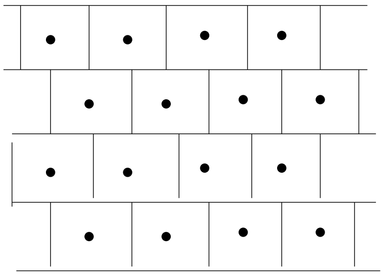

FIG. 4.2 – Exemple d'une configuration où les sommets du pavage ne sont pas en coïncidence avec d'autres sommets.

### 4.2.2 Pavages plans réguliers

Les contraintes les plus strictes que l'on puisse imposer aux cellules élémentaires est qu'elles soient toutes identiques et ¡¡ régulières ¿¿, c'est-à-dire qu'elles soient des polygones dont tous les côtés et tous les angles soient égaux, et que chaque sommet soit en contact avec un nombre fixe de sommets d'autres cellules. Avec de telles cellules, on obtient des pavages dits ¡¡ réguliers ¿¿.

On montre que, dans le plan, il n'existe que trois types de pavages réguliers, correspondant respectivement à des cellules triangulaires, carrées et hexagonales. Ils sont illustrés sur la figure 4.3.

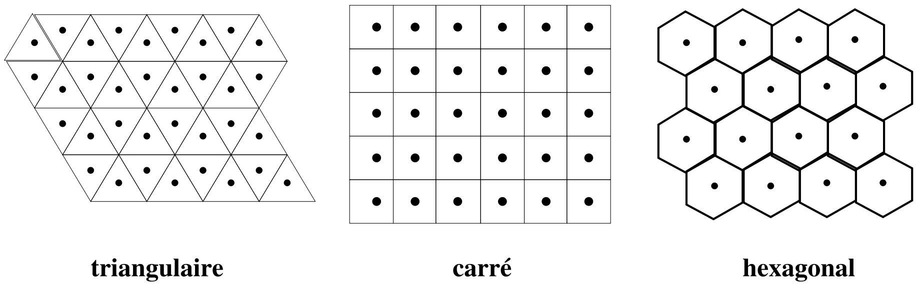


FIG. 4.3 – Les trois pavages réguliers du plan.

### 4.2.3 Pavages plans semi-réguliers

Si l'on relâche un peu les contraintes précédentes, en permettant aux cellules d'être de types différents (avec des nombres de côtés pouvant varier d'une cellule à l'autre), tout en conservant le nombre constant de cellules adjacenctes, on obtient des pavages ¡¡ semi-réguliers ¿¿ [Grunbaum et Shepard, 1989].

Il existe 21 solutions respectant ces contraintes. Seules 11 définissent effectivement une partition (dont les 3 régulières vues précédemment). Deux de ces solutions sont illustrées sur la figure 4.4. L'ensemble de ces solutions est décrit dans [Chassery et Montanvert, 1991].

Si l'on relâche plus de contraintes, on peut obtenir des pavages non uniformes, ou même complètement irréguliers (voir par exemple les dessins d'Escher [Locher et al., 1972]).

### 4.2.4 Dualité pavage / maillage

À partir d'un pavage, on associe à chaque cellule $V_P$ constituant le pavage un point $P$ situé à l'intérieur

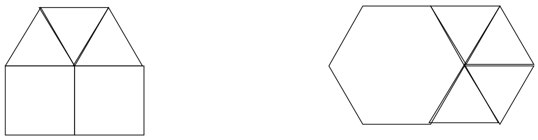

FIG. 4.4 – Deux exemples de configurations semi-régulières permettant de paver le plan.

de cette cellule. Par exemple, $P$ peut être le centre de gravité de $V_P$ (il sera bien à l'intérieur de $V_P$ si l'on se restreint comme ci-dessus à des cellules convexes). Dans ce cas, on retrouve bien sûr des $P$ et des $V_P$ qui correspondent à la construction du pavage à partir d'une distribution de points. Ce sont ces points $P$ qui sont appelés pixels en traitement d'images.

Un maillage est alors défini de la manière suivante : à tout point $P$ on associe les points $Q$ tels que $V_P$ et $V_Q$ ont une arête commune (dans le plan). Le maillage est constitué de tous les segments $[P,Q]$ que l'on peut construire de cette manière.

Ce maillage définit dans l'espace un nouveau pavage, dont les cellules sont centrées sur les sommets du pavage initial. Il y a donc dualité entre pavage et maillage.

Pour les pavages réguliers, qui sont les plus utilisés, cette dualité se traduit de la manière suivante (voir figure 4.5) :
- le maillage associé au pavage triangulaire est hexagonal,
- le maillage associé au pavage carré est carré,
- le maillage associé au pavage hexagonal est triangulaire.

Le maillage carré est certainement le plus utilisé. Le maillage hexagonal n'est cependant pas sans intérêt car il possède de meilleures propriétés d'isotropie et de topologie que le maillage carré. Le maillage triangulaire n'est en revanche presque jamais utilisé.

Dans l'espace discret à 3 dimensions, le maillage cubique est le plus utilisé. On trouve aussi quelques applications de maillages cubiques à faces centrées ou rhombododécaédriques.

## 4.3 Topologie discrète

Dans cette section, nous abordons les problèmes de topologie sur les maillages discrets. Nous verrons en particulier que la topologie discrète classique n'est pas adaptée et qu'une approche fondée sur la définition de voisinages est préférable.

### 4.3.1 Quelques approches

Considérons tout d'abord la topologie discrète classique. Pour cette topologie, tout point de l'ensemble discret considéré est un ouvert. Comme un ensemble connexe est un ensemble qui ne peut pas se décomposer en réunion de deux ouverts non vides disjoints, les seuls ensembles connexes que l'on puisse construire avec cette topologie sont réduits à des singletons.

Cependant du point de vue de l'analyse d'images et de la reconnaissance des formes, on a besoin de définir des objets, que l'on considère comme des entités connexes généralement constituées de plusieurs points. La topologie discrète classique ne permet pas de répondre à ces exigences, et elle n'est donc pas adaptée aux besoins du traitement d'images.

Plusieurs approches ont été tentées afin de définir des topologies plus satisfaisantes. Nous décrivons ici succinctement l'une d'elles [Chassery et Chenin, 1980, Khalimsky et al., 1990]. Elle consiste (dans le plan) à construire une base topologique de $\mathbb{Z}^2$. Une topologie est alors une classe $\mathcal{T}$ d'ensembles de $\mathbb{Z}^2$

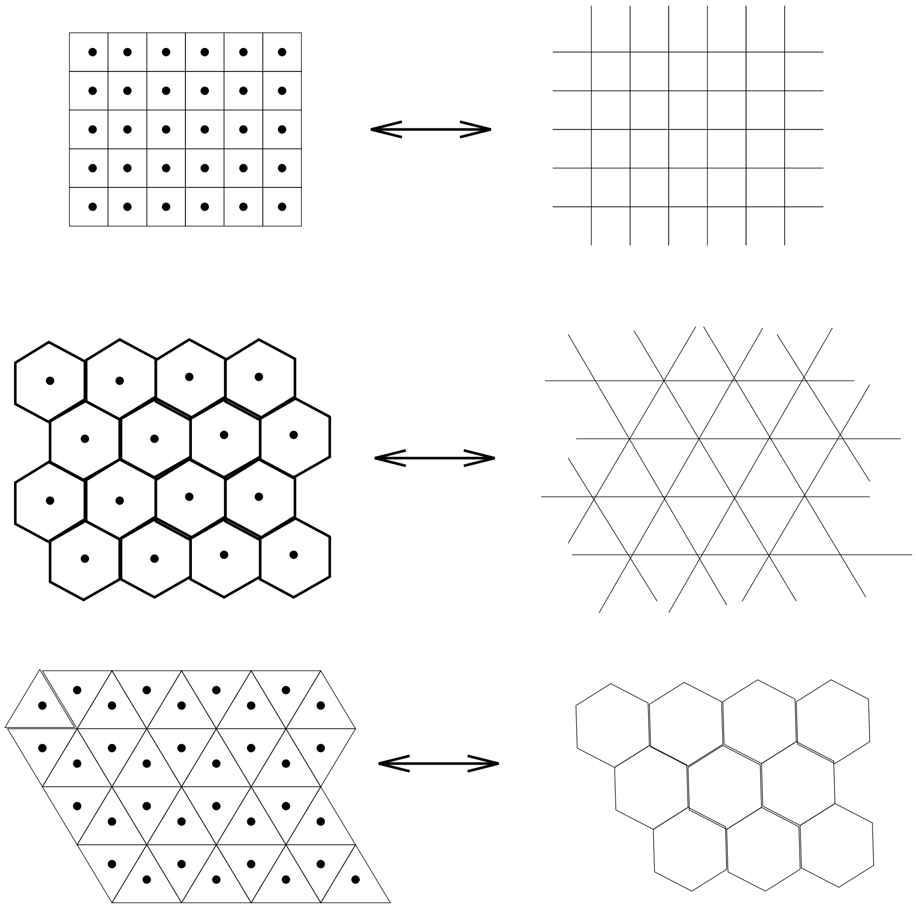

FIG. 4.5 – Dualité entre les maillages et les pavages réguliers du plan.

telle que chaque élément de $\mathcal{T}$ soit réunion dénombrable d'éléments de la base topologique, et telle que :

1. $\mathbb{Z}^2 \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$,
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2,\ A \cap B \in \mathcal{T}$.

Sur une trame carrée, on peut par exemple construire la base topologique de la manière suivante : pour tout point $P$ de $\mathbb{Z}^2$, de coordonnées $(i, j)$, on associe à $P$ l'ensemble $\mathcal{U}(P)$ défini par (voir figure 4.6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(P) &= \{P, (i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \ \textit{si } i+j \textit{ pair}, \\ &= \{P\} \ \textit{sinon}. \end{aligned}$$

Les ensembles $\mathcal{U}(P)$ ainsi construits vérifient bien les conditions suivantes :

1. $\mathbb{Z}^2 = \cup_{P \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{U}(P)$,
2. si $\mathcal{U}(P)$ et $\mathcal{U}(Q)$ sont deux éléments de la base topologique, alors $\mathcal{U}(P) \cap \mathcal{U}(Q)$ est une réunion d'éléments de cette base.

Ce type de construction a un inconvénient majeur : la forme du voisinage induit par les $\mathcal{U}(P)$ autour de chaque point dépend de la position du point dans l'espace. En particulier, la topologie ainsi construite

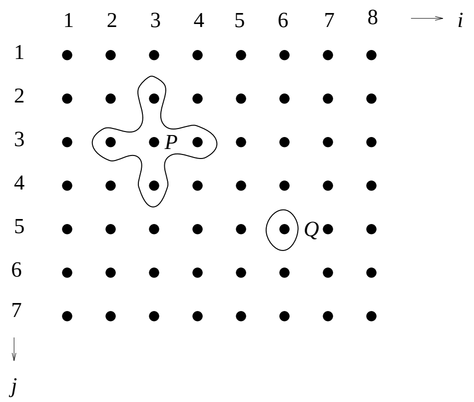


FIG. 4.6 – Définition d'une base topologique dans le plan discret sur une trame carrée.

n'est pas invariante par translation. De plus, ce type de construction ne garantit pas toutes les propriétés souhaitées, en particulier le théorème de Jordan. Enfin, si cette construction reste possible sur une trame triangulaire (voir figure 4.7), elle ne l'est pas sur une trame hexagonale.

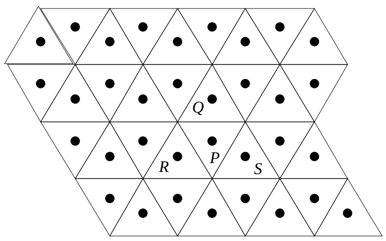


FIG. 4.7 – Définition d'une base topologique dans le plan discret sur une trame triangulaire. Sur cette figure, $\mathcal{U}(P) = \{P, Q, R, S\}$, $\mathcal{U}(Q) = \{Q\}$, $\mathcal{U}(R) = \{R\}$, $\mathcal{U}(S) = \{S\}$.

### 4.3.2 Topologie à partir de la notion de voisinage élémentaire

Pour le traitement d'images, il est donc difficile de définir des notions topologiques satisfaisantes et opérationnelles à partir de la construction d'ouverts. Il est préférable de définir d'abord les notions de voisinage élémentaire, puis de connexité, qui est une des notions topologiques essentielles pour l'interprétation des images et la reconnaissance des formes [Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1979].

Pour cela, on considère l'image discrète comme un graphe. Les nœuds du graphe sont les points discrets (les pixels de l'image). Les arcs sont définis par les relations de voisinage entre les points. Par exemple, sur une trame carrée, on peut considérer que deux points sont voisins si une et une seule de leurs cordonnées diffère d'une unité. Chaque point (encadré sur la figure 4.8 a) a ainsi 4 voisins, et on parle de 4-connexité. Le graphe correspondant est illustré sur la figure 4.9.

Si l'on ajoute dans le graphe les arcs reliant les points aussi en diagonale (dont les deux coordonnées diffèrent d'une unité), chaque point a alors 8 voisins, et on parle de 8-connexité (figure 4.8 b). En 4-connexité, très peu de directions de l'espace sont représentées, en 8-connexité, tous les voisins ne sont pas à la même distance du point central.

Sur une trame hexagonale, la connexité la plus naturelle est la 6-connexité (figure 4.8 c). Chaque point a 6 voisins qui sont tous à même distance du point central et les 6 directions représentées sont

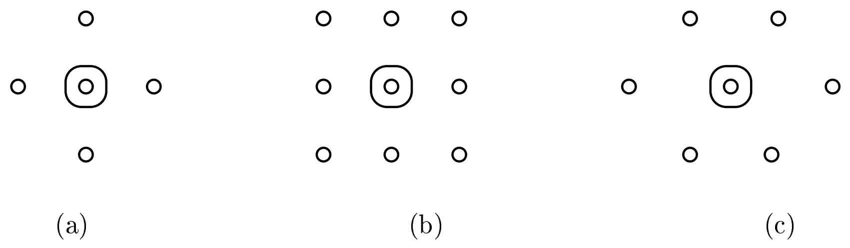


FIG. 4.8 – Connexité sur une trame discrète carrée (a : 4-connexité, b : 8-connexité), ou hexagonale (c : 6-connexité).

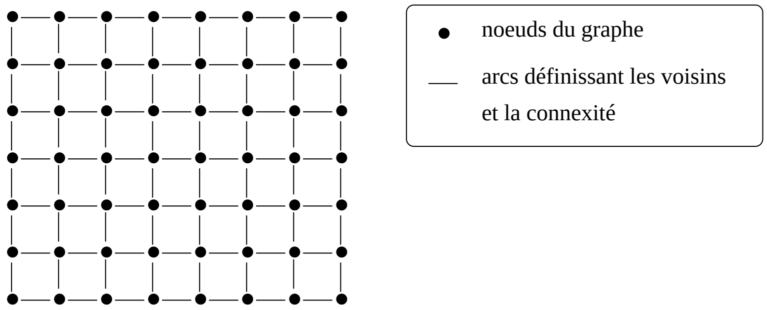


FIG. 4.9 – Graphe définissant la 4-connexité sur une trame carrée.

équiréparties, ce qui constitue un des avantages de la trame hexagonale.

Sur une trame triangulaire, trois types de voisinages élémentaires peuvent être définis, correspondant respectivement à la 3-, 9- et 12-connexité. Ces définitions sont illustrées sur la figure 4.10.

Dans une représentation matricielle des images, l'accès aux voisins d'un point de coordonnées $(i, j)$ se fait très aisément sur une trame carrée. Ce sont :

– en 4-connexité : les points de coordonnées $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$,
– en 8-connexité : les points de coordonnées $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j-1)$, $(i-1, j+1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j+1)$.

Sur une trame hexagonale, l'accès aux voisins est un peu plus délicat. En effet, s'il est toujours possible de représenter une image de manière matricielle, il faut considérer que, géométriquement, les lignes sont décalées les unes par rapport aux autres. Les indices des voisins d'un point dépendent donc de la parité de la ligne sur laquelle se situe le point. Si les lignes sont numérotées comme l'indique la figure 4.11, alors les voisins d'un point de coordonnées $(i, j)$ sont :

– si $j$ est pair : $(i-1, j-1)$, $(i, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$,
– si $j$ est impair : $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$.

Sur une trame triangulaire, de la même manière, les indices des voisins dépendent de la parité de la ligne sur laquelle se trouve le point considéré (et bien sûr de la connexité choisie).

Si l'on se place maintenant en dimension trois sur une trame cubique, trois types de voisinages élémentaires sont classiquement définis, correspondant respectivement à la 6-, 18- et 26-connexité. Si l'on représente chaque point $P$ de l'image 3D comme un cube élémentaire, les 6-voisins correspondent aux cubes adjacents à $P$ par une face, les 18-voisins comprennent les 6 précédents et ceux qui sont adjacents à $P$ par une arête, et les 26-voisins s'obtiennent en ajoutant les cubes adjacents par un sommet (voir figure 4.12).

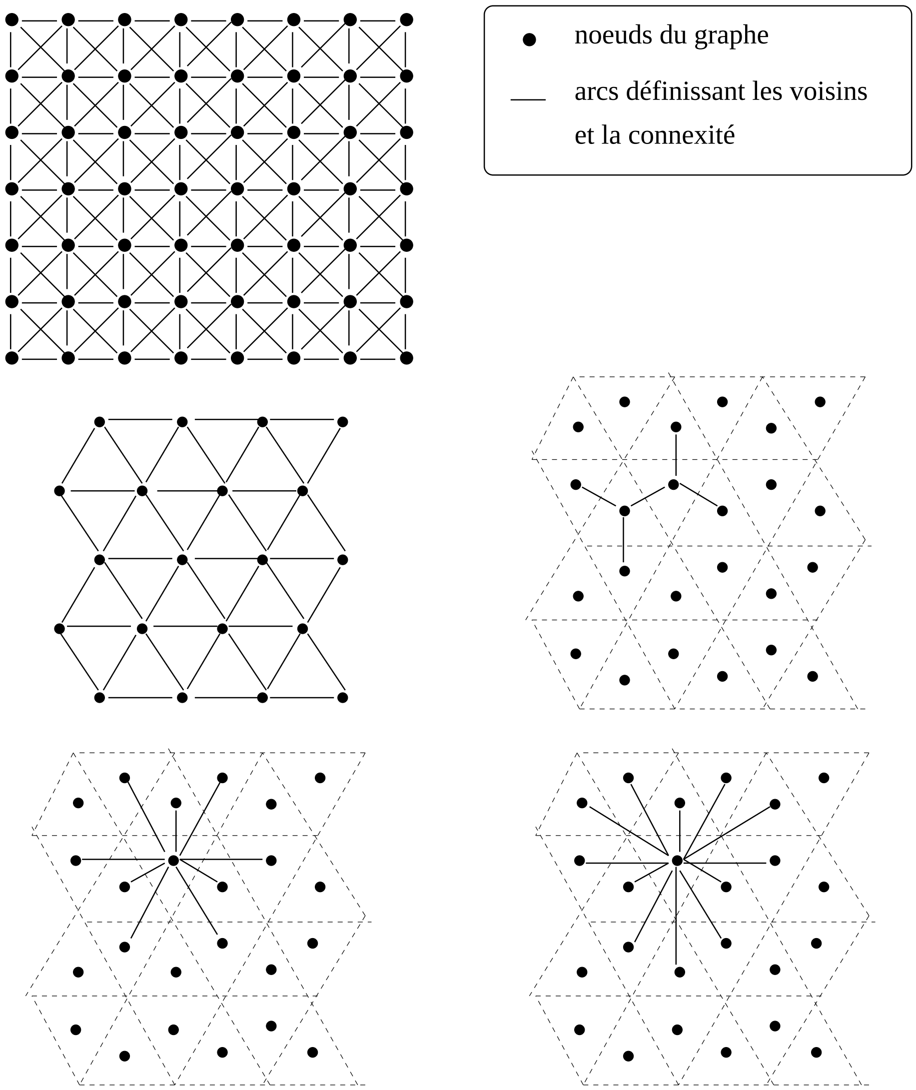


FIG. 4.10 – Graphes définissant la 8-connexité sur une trame carrée, la 6-connexité sur une trame hexagonale, et les 3-, 9- et 12-connexités sur une trame triangulaire (seuls quelques arcs sont représentés pour la trame triangulaire).

Une fois que sont définis les voisinages élémentaires, les notions de connexité s'en déduisent aisément, grâce à l'interprétation en termes de théorie des graphes [Berge, 1958].

Un chemin est ainsi défini comme une suite de sommets du graphe telle que deux points consécutifs de la suite soient joints par un arc du graphe, où les arcs sont définis en fonction de la connexité choisie. Par exemple, sur une trame carrée, on définit :

– un 4-chemin comme une suite de points $(i_k, j_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que :

$$\forall k, 1 \leq k < n,\ |i_k - i_{k+1}| + |j_k - j_{k+1}| \leq 1,$$

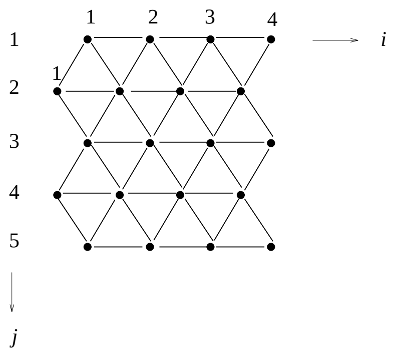


FIG. 4.11 – Les indices des voisins d'un point sur une trame hexagonale dépendent de la parité de la ligne sur laquelle se trouve le point.

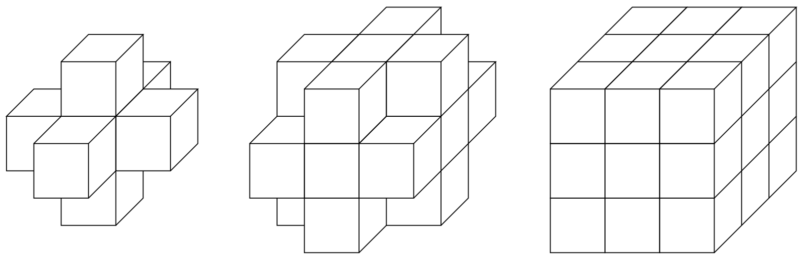

FIG. 4.12 – Les trois types de voisinages élémentaires pour une image 3D définie sur une trame cubique.

– un 8-chemin comme une suite de points $(i_k, j_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que :

$$\forall k, 1 \leq k < n,\ \max(|i_k - i_{k+1}|, |j_k - j_{k+1}|) \leq 1.$$

Les composantes connexes s'en déduisent alors en reprenant les définitions classiques des graphes. On obtient ainsi sur une trame carrée :

– une composante 4-connexe est un ensemble de points $\mathcal{S}$ tel que pour tout couple de points $(P, Q)$ de $\mathcal{S}$, il existe un 4-chemin d'extrémités $P$ et $Q$ et dont tous les points soient dans $\mathcal{S}$ ;
– une composante 8-connexe est un ensemble de points $\mathcal{S}$ tel que pour tout couple de points $(P, Q)$ de $\mathcal{S}$, il existe un 8-chemin d'extrémités $P$ et $Q$ et dont tous les points soient dans $\mathcal{S}$.

Ces définitions sont illustrées sur la figure 4.13.

De manière analogue, on définit sur une trame hexagonale les notions de 6-chemin et de composante 6-connexe. Sur une trame triangulaire, les chemins peuvent être 3-, 9- ou 12-connexes, de même que les composantes connexes.

Sur une trame carrée, des paradoxes peuvent apparaître pour certaines configurations locales de points de l'objet et de son complémentaire. Sur la figure 4.14, en 8-connexité, les points a et d de l'objet sont voisins ainsi que les points b et c du complémentaire. Cela signifie que les composantes connexes de l'objet et du complémentaire se ¡¡ croisent ¿¿. Si on se place au contraire en 4-connexité, ni les points a et d, ni les

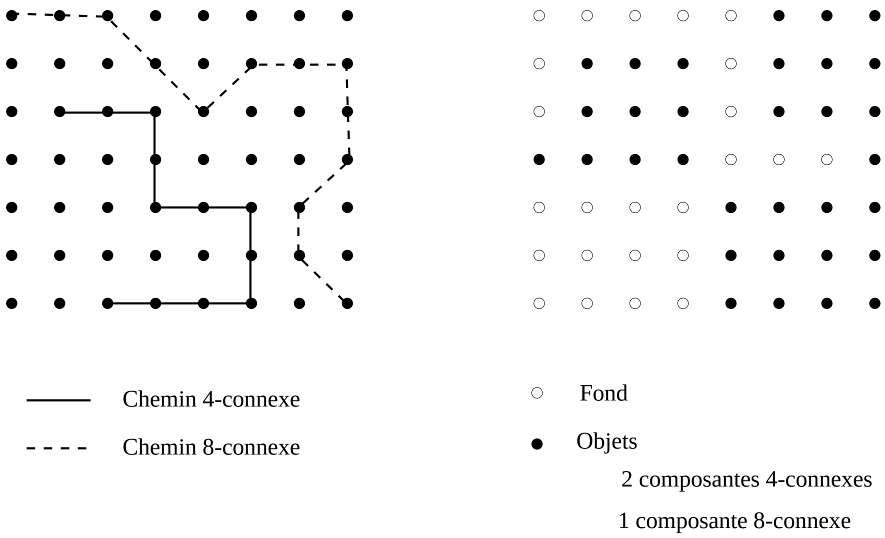


FIG. 4.13 – Illustration des définitions des chemins et composantes connexes sur une trame carrée, en 4- et 8-connexités.

points b et c ne sont voisins, laissant ainsi une zone qui n'est ni l'objet ni son complémentaire. Ce paradoxe peut être évité si l'on considère des connexités différentes pour l'objet et pour son complémentaire.

Sur une trame hexagonale, ce type de phénomène ne se produit pas et on travaille en 6-connexité aussi bien pour la forme que pour le fond.

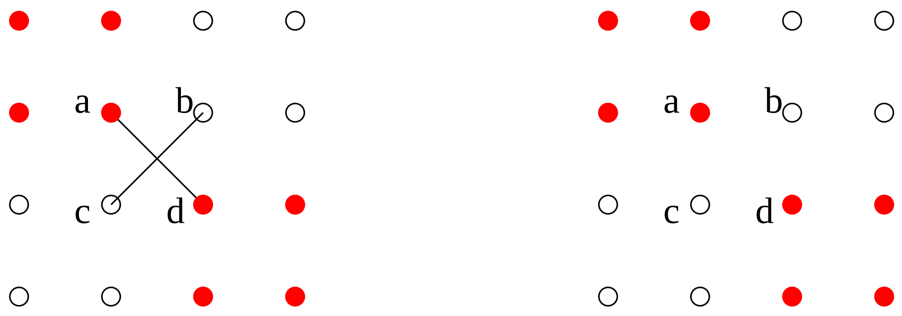


FIG. 4.14 – Paradoxe sur une trame discrète carrée en 8- et 4-connexité.

Un des résultats importants qui permet de garantir de bonnes propriétés topologiques aux objets (et d'éviter ce type de paradoxe) est le théorème de Jordan. Dans le cas continu, il s'exprime sous la forme suivante : toute courbe simple fermée sépare l'espace en deux composantes connexes, l'intérieur et l'extérieur de la courbe. Avec les définitions de la connexité discrète données ci-dessous, on montre les deux résultats suivants :

– sur une trame carrée, tout 4-chemin (respectivement 8-chemin) simple fermé[1] sépare l'espace en deux composantes 8-connexes (respectivement 4-connexes), l'intérieur et l'extérieur (voir l'illustration de la figure 4.15) ;

[1]Un 4-chemin simple fermé est un 4-chemin $(A_0, ..., A_n)$ tel que $n \geq 4$, $A_i = A_j$ si et seulement si $i = j$, et $A_i$ est un 4-voisin de $A_j$ si et seulement si $i = j \pm 1[n+1]$.

– sur une trame hexagonale, tout 6-chemin simple fermé sépare l'espace en deux composantes 6-connexes.

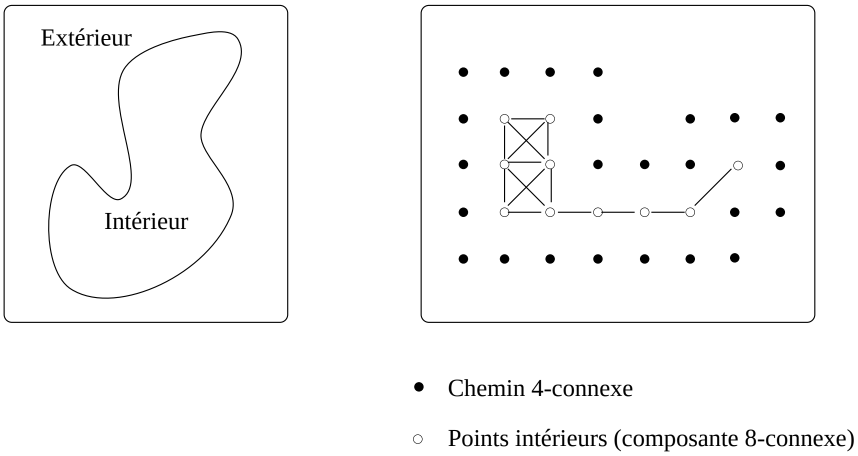


FIG. 4.15 – Illustration du théorème de Jordan dans le cas continu et dans le cas discret sur une trame carrée (les points extérieurs ne sont pas représentés).

Le premier de ces résultats fait apparaître une dualité entre la 4- et la 8-connexité [Kong et Rosenfeld, 1989]. Ainsi, pour garantir que le théorème de Jordan soit respecté, il faut changer de connexité quand on passe d'un objet à son complémentaire. On considérera donc par exemple un objet en 4-connexité et son complémentaire en 8-connexité, ou le contraire. Sur l'exemple de la figure 4.15, les points de l'intérieur du chemin 4-connexe forment bien une composante 8-connexe, mais deux composantes 4-connexes. Le résultat n'est donc pas vrai si on prend la même connexité pour les points du chemin et pour le complémentaire du chemin.

Le deuxième résultat montre qu'au contraire ce type de problème ne se pose pas en 6-connexité. La trame hexagonale présente donc de meilleures propriétés topologiques que la trame carrée.

Sur une trame triangulaire, il existe de manière analogue une dualité entre la 3- et la 12-connexité, mais, comme nous l'avons souligné, cette trame est peu usitée.

En dimension 3 sur une trame cubique, il existe une dualité entre la 6- et la 26-connexité, et on a un analogue du théorème de Jordan en considérant cette fois une surface simple fermée.

La difficulté rencontrée en 4- et 8-connexités vient de ce que l'appartenance des frontières d'un pixel à un objet ou à son complémentaire n'est pas clairement définie. Elle peut être levée dans le cadre des complexes cellulaires [Kovalesky, 1989]. Chaque pixel ou voxel est décomposé en éléments de dimension locale variant de 0 (les sommets) à 2 (l'intérieur du carré représentant un pixel) ou 3 (l'intérieur du cube représentant un voxel), et l'appartenance de chacun de ses éléments aux objets et à leur complémentaire est définie. Ces structures ne posent pas de problèmes topologiques et le théorème de Jordan est vérifié, ainsi que l'illustre la figure 4.16. Ces structures peuvent également être généralisées à trois dimensions [Cointepas et al., 2001].

### 4.3.3 Nombre d'Euler : un exemple de caractéristique topologique d'un objet

Un objet ou un ensemble de points peut être caractérisé par plusieurs types de mesures topologiques. Les plus simples sont le nombre de composantes connexes dont il est constitué et le nombre de trous qu'il contient. La différence entre ces deux nombres est appelé nombre d'Euler, et est utilisé dans des problèmes de reconnaissance des formes, comme un des attributs qui caractérisent un objet.

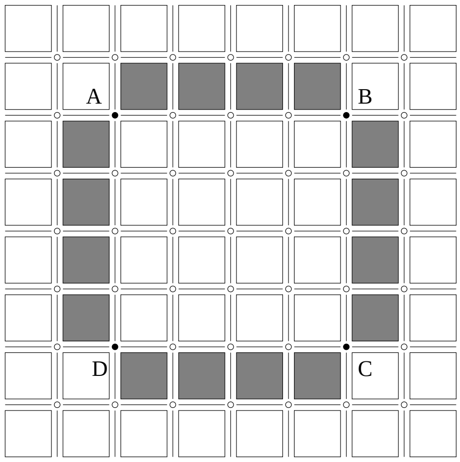


FIG. 4.16 – Le théorème de Jordan est toujours vérifié dans le modèle des complexes cellulaires. Chaque pixel est décomposé en carré, arête et sommet. La couleur des points $A, B, C$ et $D$ détermine la connexité de la courbe noire et celle du fond.

Si l'on appelle $N_{cc}$ le nombre de composantes connexes d'un objet et $N_t$ le nombre de trous, le nombre d'Euler vaut $E = N_{cc} - N_t$. La connexité utilisée pour calculer le nombre de trous et le nombre de composantes connexes doit respecter les contraintes du théorème de Jordan discret. Sur l'exemple de la figure 15.3, le nombre d'Euler vaut $-1$ si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, et 0 si on choisit les conventions inverses.

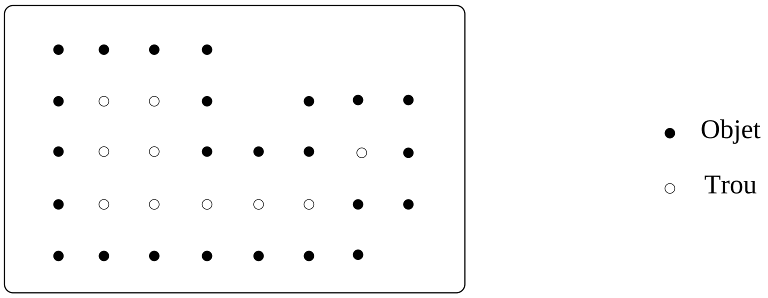


FIG. 4.17 – Nombre d'Euler sur une trame carrée : si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, $N_{cc} = 1$ et $N_t = 2$, donc $E = -1$. Avec les conventions inverses, $N_{cc} = 1$ et $N_t = 1$, donc $E = 0$.

Le nombre d'Euler peut être calculé par simple dénombrement de configurations locales, décrites dans la figure 4.18. Avec les notations de cette figure, on montre que :

– si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, alors :

$$E = v - e - d + t - q,$$

– si on considère les objets en 4-connexité et les trous en 8-connexité, alors :

$$E = v - e + q,$$

Le lecteur pourra vérifier les résultats de ces formules sur l'exemple de la figure 15.3.

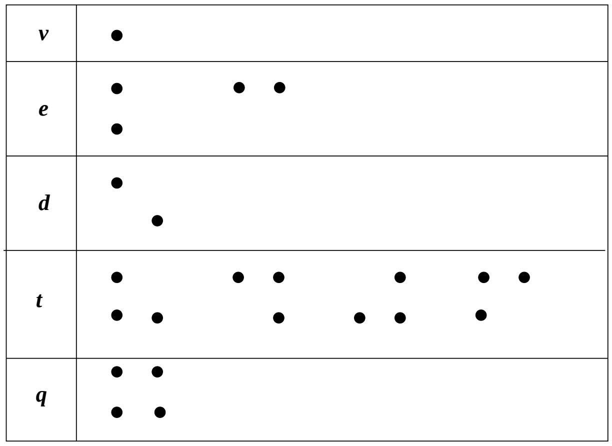


FIG. 4.18 – Configurations locales pour le calcul du nombre d'Euler.

Il est remarquable que ces caractéristiques ne fassent intervenir que des points de l'objet, alors que le nombre d'Euler implique à la fois l'objet et son complémentaire. Cet exemple est également particulièrement intéressant car il montre qu'il est possible de calculer le nombre d'Euler uniquement avec des caractéristiques locales, bien qu'il s'agisse d'une mesure globale sur un objet. Le calcul est donc beaucoup plus facile, et la mise en œuvre informatique avec ces caractéristiques locales est immédiate, alors que le calcul direct des nombres de composantes connexes et de trous serait plus difficile.

Cet exemple illustre ainsi une idée qu'on retrouvera souvent en traitement d'images, qui consiste à ramener des notions globales à des calculs qui peuvent se faire simplement localement. On voit apparaître ici un intérêt supplémentaire de la notion de voisinages élémentaires, puisque ce sont les points définis par ces voisinages qui interviennent dans les calculs locaux.

## 4.4 Représentations géométriques

Si la plupart des entités géométriques simples (droites, cercles, courbes) sont parfaitement maîtrisées dans le cas continu, leurs représentations discrètes soulèvent deux types de problèmes :

- comment représenter sur une trame discrète une entité géométrique continue, et quelles sont les propriétés de cette représentation par rapport aux propriétés vérifiées dans le cas continu ?
- à partir d'une entité géométrique discrète, quelles sont les représentations continues qui lui correspondent ?

Si l'on prend l'exemple de la droite, il est possible de se donner des règles (comme on le verra plus loin) qui permettent de déterminer les points de la trame représentant une droite continue. Inversement, étant donné un ensemble de points de la trame, on peut vérifier s'ils correspondent ou non à la discrétisation d'une droite continue suivant ces règles. Si c'est le cas, on trouvera en général qu'il n'y a pas unicité de la droite continue dont l'ensemble de points est la discrétisation, mais que les droites possibles constituent tout un faisceau.

On pourra se reporter à la référence [Chassery et Montanvert, 1991] pour une étude de ces problèmes dans le cas de courbes quelconques. Ici, nous nous restreignons à l'étude des droites et des cercles. Puis nous abordons les pavages de Voronoï et les triangulations de Delaunay, qui permettent de représenter les images de manière structurée, non pas systématique comme avec les pavages réguliers, mais en fonction du contenu des images.

Dans toute la suite, on se placera dans le cas 2D, sur une trame carrée. Les résultats peuvent en général être étendus à d'autres types de trames et à des espaces de dimension supérieure.

### 4.4.1 Discrétisation d'une droite continue

Une première méthode de discrétisation des droites est la méthode dite du ¡¡ pavé semi-ouvert ¿¿. Le pavé semi-ouvert associé à un point discret $P$ de coordonnées $(i, j)$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient :

$$i - \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{1}{2} \; \textit{ et } \; j - \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{1}{2}.$$

La méthode de discrétisation par pavé semi-ouvert consiste alors à garder dans la représentation discrète tout point $P$ de la trame tel que le pavé semi-ouvert qui lui est associé ait une intersection non vide avec l'entité à discrétiser. La figure 4.19 illustre le résultat dans le cas d'un segment de droite.

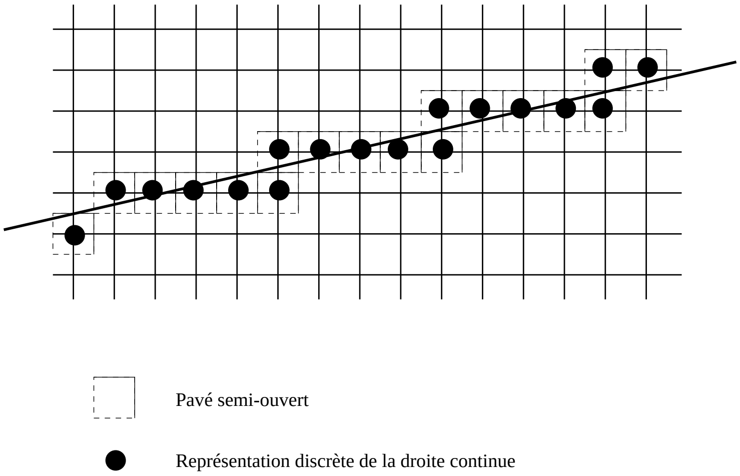


FIG. 4.19 – Discrétisation d'un segment de droite par la méthode du pavé semi-ouvert.

L'ensemble discret ainsi obtenu ne constitue pas nécessairement un chemin simple au sens de la 4- ou de la 8-connexité. Sur l'exemple de la figure 4.19, l'ensemble de points obtenu n'est pas 4-connexe, et au sens de la 8-connexité, certains points ont plus de 2 voisins.

Si l'on cherche maintenant à discrétiser la frontière du demi-plan fermé limité par la droite (plutôt que la droite elle-même), en imposant une contrainte d'unilatéralité, on obtient cette fois un chemin 8-connexe [Dorst et Smeulders, 1984]. La méthode consiste à garder les points discrets s'ils sont situés d'un même côté de la droite et tels que le segment vertical du maillage qui en part coupe la droite. Ce procédé est illustré sur la figure 4.20.

On remarquera que le résultat obtenu est différent de celui obtenu avec la méthode du pavé semi-ouvert, partant de la même droite continue.

Il est possible de combiner ces deux méthodes, en associant à chaque point du maillage un segment semi-ouvert, centré en ce point et vertical. Un point discret est alors conservé si le segment qui en est issu intersecte la droite continue. Le résultat de ce procédé est illustré sur la figure 4.21.

On obtient toujours un chemin 8-connexe, mais où les points discrets sont répartis des deux côtés de la droite continue[2].

[2]Le résultat est équivalent à celui qu'on obtiendrait avec l'algorithme de Bresenham, fréquemment utilisé en synthèse

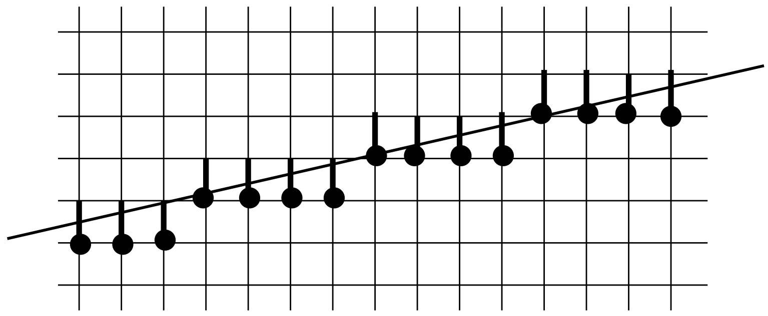


FIG. 4.20 – Discrétisation d'un segment de droite par la contrainte d'unilatéralité.

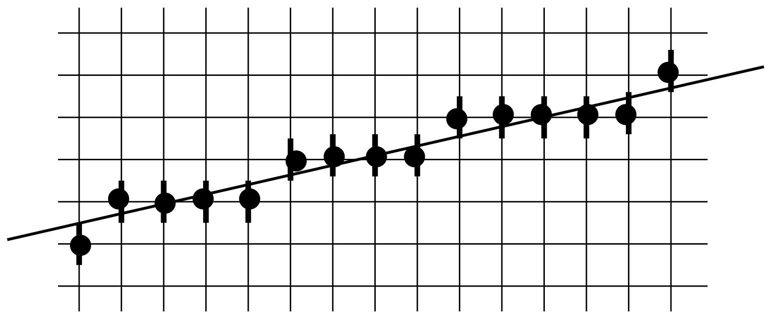


FIG. 4.21 – Discrétisation d'un segment de droite par la méthode de segment vertical semi-ouvert.

### 4.4.2 Caractérisation d'un segment de droite discret

Considérons maintenant le problème inverse : étant donné un ensemble de points discrets, est-il la discrétisation d'un segment de droite continue ? En utilisant les caractérisations précédentes, cela revient à vérifier qu'il existe un segment de droite dont la discrétisation selon les règles choisies donne exactement l'ensemble des points discrets. Cette démarche n'est pas toujours très opérationnelle, et on lui préfère deux autres méthodes, l'une reposant sur la propriété de la corde, et l'autre sur une description syntaxique d'un segment de droite discret.

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de points discrets (toujours en dimension deux et sur une trame carrée). On dit que $\mathcal{S}$ vérifie la propriété de la corde si et seulement si :

$$\forall (P,Q) \in \mathcal{S}, \forall R \in [P,Q],\ \exists T \in \mathcal{S}, d_\infty(T,R) < 1$$

où $[P,Q]$ désigne le segment de $\mathbb{R}^2$ (continu) joignant $P$ à $Q$, et $d_\infty$ désigne la distance obtenue à partir de la norme $L_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$ ($d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(|x-x'|,|y-y'|)$).

d'images, qui minimise l'erreur locale en chacun des points du tracé [Hégron, 1985].

La figure 4.22 présente un cas où la propriété de la corde est vérifiée et un cas où elle ne l'est pas.

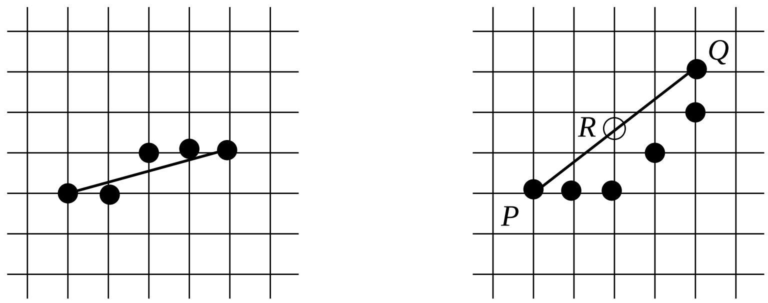


FIG. 4.22 – L'ensemble de points discrets de gauche vérifie la propriété de la corde, celui de droite ne la vérifie pas (le point $R$ du segment $[P, Q]$ est à une distance de plus de 1 de tout point discret de $\mathcal{S}$).

Un segment discret vérifiant la propriété de la corde satisfait aux caractéristiques utilisées dans la méthode de discrétisation du segment semi-ouvert [Rosenfeld, 1974, Ronse, 1985, Santalo, 1940].

Une deuxième caractérisation opérationnelle de segments de droite discrets repose sur leur description syntaxique [Pham, 1986]. En effet, un segment de droite discret est constitué d'une suite de points, que l'on peut suivre en observant les changements de direction. La caractérisation est alors la suivante :
- on appelle section une sous-suite de points maximale sans changement de direction (les 8 directions possibles sont celles définies par la 8-connexité sur la trame carrée, comme l'indique la figure 4.23),
- dans un segment de droite discret, les sections ne peuvent avoir que deux directions distinctes, qui sont consécutives (selon le schéma de la figure 4.23),
- pour une de ces directions, les sections sont toutes de longueur 1, et pour l'autre direction, les sections sont de longueur $n$ ou $n + 1$, où la valeur de $n$ dépend de la pente de la droite.

On peut donc utiliser cette caractérisation, illustrée sur la figure 4.24, pour vérifier si l'ensemble de points considéré est bien un segment de droite discret.

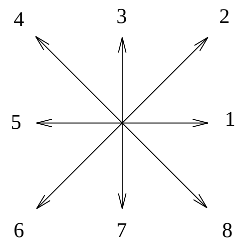


FIG. 4.23 – Les 8 directions possibles sur une trame carrée. Deux directions sont consécutives si leurs numéros diffèrent de 1 (modulo 8).

### 4.4.3 Droites analytiques discrètes

On considère ici le problème des droites discrètes d'un point de vue différent. Au lieu d'essayer de discrétiser une droite par une suite de points connexes, on cherche au contraire à savoir quels sont les points d'intersection avec la trame d'une droite continue quelconque.

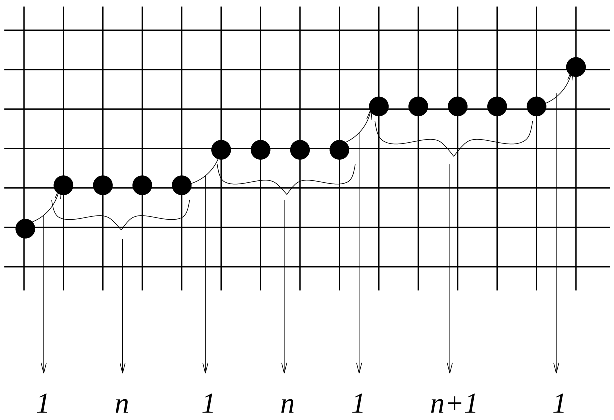


FIG. 4.24 – Caractérisation syntaxique d'un segment de droite discret.

Une droite d'équation $y = ax + b$ sera alors repésentée par les points d'intersection avec les points du maillage. Pour que cette intersection soit non vide, il faut que la pente de la droite soit de la forme :

$$a = \frac{p}{q}$$

avec $p$ et $q$ entiers, premiers entre eux, et vérifiant :

$$p \leq q \leq N,$$

si l'image est de taille $N \times N$, et pour une pente de droite inférieure à 1 (les autres cas s'obtiennent par symétrie).

Les pentes de droites possibles forment donc une suite de Farey d'ordre $N$, notée $F(N)$ [Franel, 1924]. Pour une image de taille $4 \times 4$, les droites possibles telles que $a \leq 1$ sont représentées sur la figure 4.25 ; on a dans ce cas :

$$F(N) = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}.$$

Le nombre de droites possibles augmente bien sûr avec la taille de l'image. Par exemple pour $N = 6$, on a :

$$F(6) = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\}.$$

Le cardinal de $F(N)$ est de l'ordre de $3N^2/\pi^2$. Des propriétés des suites de Farey permettent de les construire. En particulier, si les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p"}{q"}$ sont des termes consécutifs de $F(N)$, on a les relations suivantes :

$$p'q - pq' = 1,$$

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p + p"}{q + q"}.$$

On peut ainsi calculer le nombre de droites possibles suivant la taille de l'image, mais aussi les nombres d'occurrences de ces droites en fonction de la pente $a$. En effet, si l'on essaye de retrouver une droite dans une image à partir de deux points discrets, on trouvera plus souvent certaines droites que d'autres. Par exemple, les droites de pente 0 et 1 sur la figure 4.25 seront obtenues pour plus de couples de points que les autres droites.

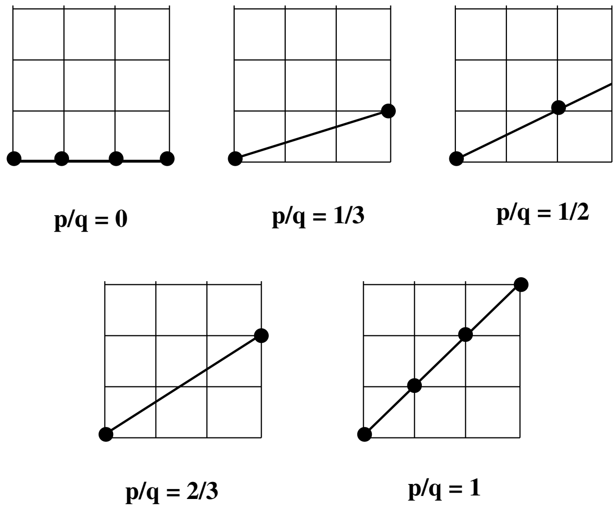


FIG. 4.25 – Les droites possibles (d'intersection non vide avec l'ensemble des points de la trame) sur une image $4 \times 4$.

Pour certaines transformations, ce phénomène constitue un véritable biais lié à la discrétisation dont il va falloir tenir compte. Par exemple, si l'on essaye de détecter des contours rectilignes en comptant les couples de points qui contribuent à un contour d'orientation donnée (transformation de Hough [Maître, 1985a, Maître, 1986], voir chapitre 15), on détectera beaucoup plus facilement les contours de pente 0 ou 1 que des contours de pente très faible par exemple.

Si l'on cherche maintenant quelles sont les longueurs possibles de segments discrets, on arrive à des conclusions de même type. Soit $L$ le carré d'une longueur de segment. $L$ est obtenu comme la distance quadratique entre deux points discrets, donc de coordonnées entières. $L$ est donc solution d'une équation diophantienne de la forme :

$$a^2 + b^2 = L$$

avec $a$ et $b$ entiers. On retrouvera pour les cercles le même type d'équation, qui sera étudié plus en détails à cette occasion.

Cette équation n'a pas toujours de solution. En effet, on constate que, suivant la parité de $a$ et $b$, $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4. Les valeurs de $L$ qui sont congrues à 3 modulo 4 ne peuvent donc jamais être obtenues. La figure 4.26 illustre l'irrégularité des nombres d'occurrences de $L$ sur une image $16 \times 16$ et sur une image $50 \times 50$. La décroissance générale des courbes obtenues est liée au fait que les images sont bornées.

### 4.4.4 Cercles discrets

De la même manière que pour les droites, le nombre de points discrets qui sont situés sur un cercle continu peut varier beaucoup, et de manière irrégulière suivant le rayon. Pour certaines valeurs du rayon, il n'y a pas de solution. Ici encore, l'équation à résoudre est :

$$a^2 + b^2 = n$$

où $a$, $b$ et $n$ sont entiers, $n$ représente le carré du rayon et $a^2 + b^2$ la distance quadratique d'un point discret au centre du cercle (on suppose que le centre coïncide avec un des points de la trame). On trouve

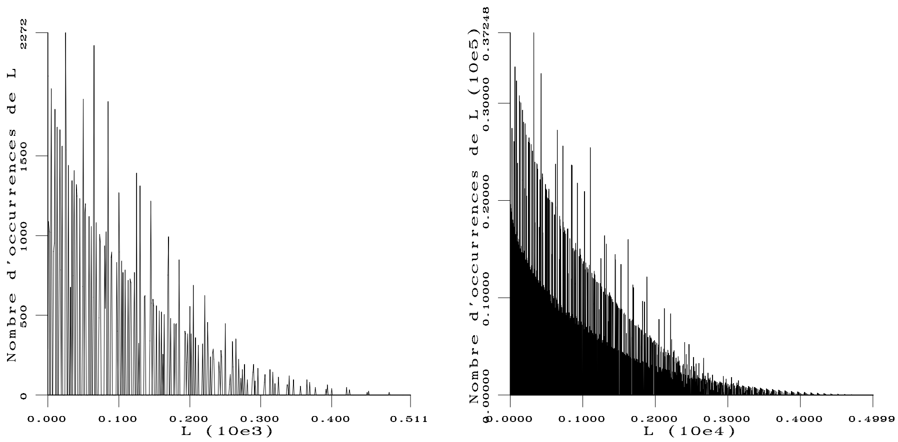


FIG. 4.26 – Distribution des carrés des longueurs des segments discrets sur une image $16 \times 16$ et sur une image $50 \times 50$.

ainsi 4 points sur un cercle de rayon 1, 4 points pour $n = 2$, aucun point pour $n = 3$, etc., comme l'illustre la figure 4.27.

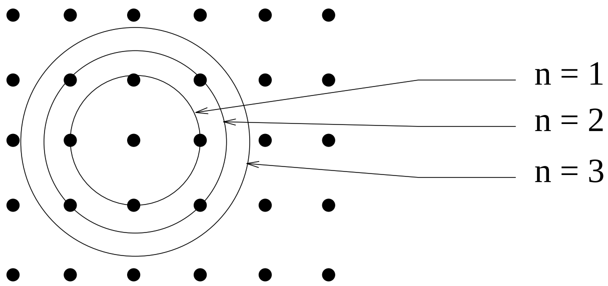


FIG. 4.27 – Intersection de cercles continus avec des points de la trame carrée.

Le nombre de solutions de cette équation est donné par $r(n)$, calculé à partir de la décomposition de $n$ en nombres premiers :

$$r(n) = 4\Pi_t(\tau_p + 1)\Pi_q \left( \frac{1 + (-1)^{\sigma_q}}{2} \right).$$

où $n$ est décomposé en facteurs premiers sous la forme :

$$n = 2^{\alpha}\Pi_p p^{\tau_p}\Pi_q q^{\sigma_q}$$

où les $p$ représentent les facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, et les $q$ ceux qui sont congrus à 3 modulo 4.

Par exemple, pour $n = 5$ on obtient 8 points, pour $n = 25$ on obtient 12 points. En effet, $25 = 5^2$ et 5 est congru à 1 modulo 4. Le seul terme qui intervient dans $r(25)$ correspond donc à $p = 5$, avec $\tau_p = 2$, et $r(25) = 4 \times (2 + 1) = 12$. On remarque dans ces formules que, dès qu'intervient dans la décomposition de $n$ un terme congru à 3 modulo 4 avec un exposant impair, alors $r(n) = 0$.

En pratique, la définition d'un cercle discret limitée aux points d'intersection avec le maillage est très restrictive. On préfère donc souvent considérer que le cercle a une certaine ¡¡ épaisseur ¿¿, et donc regarder plutôt l'intersection d'une couronne circulaire avec les points du maillage[3].

Si $k$ est l'épaisseur de la couronne, on cherche alors le nombre de points satisfaisant l'équation :

$$n \leq a^2 + b^2 < n + k$$

toujours avec $a$ et $b$ entiers. Le nombre de solutions est simplement donné par :

$$r(n, k) = \sum_{i=n}^{i=n+k-1} r(i).$$

Par exemple, pour $n = 54$ et $k = 4$, on trouve $r(n, k) = 0$. Ici encore, la grande variabilité de la fonction $r(n, k)$ entraîne des biais dans les méthodes d'analyse ou de synthèse d'images, ainsi que de reconnaissance des formes, qu'il ne faut pas négliger. Il existe des méthodes de correction, prenant en compte la forme des distributions obtenues.

### 4.4.5 Pavage de Voronoï et triangulation de Delaunay

Nous nous attachons maintenant à des représentations structurées adaptées au contenu des images. Nous présentons ici les pavages de Voronoï, qui constituent un exemple de système de représentation structurée pour l'interprétation de formes. Nous en verrons un autre exemple très différent avec le squelette dans le chapitre 6 sur la morphologie mathématique.

On se donne un ensemble de points $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$, appelés germes. À chacun de ces germes, on associe un domaine du plan $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$V(P_i) = \{P \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall j, 1 \leq j \leq n, \ d(P, P_i) \leq d(P, P_j)\},$$

où $d$ désigne une distance du plan.

Si l'on choisit pour $d$ la distance euclidienne, alors les $V(P_i)$ sont des polygones convexes. En effet, si l'on prend tout d'abord $n = 2$, alors la séparation entre $V(P_1)$ et $V(P_2)$ est la médiatrice des deux points. Les $V(P_i)$ pour $n$ quelconque sont donc des intersections de demi-plans, donc des polygones convexes (pas forcément bornés).

La figure 4.28 illustre cette définition (pour la distance euclidienne), ainsi que la convexité des pavés obtenus.

Notons que le pavage obtenu correspond à la première des méthodes décrites pour construire des pavages dans la section 4.2. Les pavés sont appelés polygones de Voronoï, et sont formés d'arêtes et de sommets de Voronoï.

La définition du pavage de Voronoï se généralise directement à des germes quelconques (plus nécessairement ponctuels) mais, dans ce cas, les pavés obtenus ne sont pas nécessairement polygonaux.

Dans le cas discret, la définition du pavage de Voronoï demeure inchangée. Cependant, au lieu de la distance euclidienne, on en utilise généralement des approximations : les distances discrètes, telles qu'elles seront vues dans la section 4.6, qui permettent des calculs rapides tout en fournissant une bonne approximation de la distance euclidienne.

Le pavage de Voronoï a les propriétés suivantes [Klein, 1989] :

1. s'il n'existe pas de quadruplets de germes cocirculaires, tout sommet de Voronoï est équidistant de 3 germes exactement,

[3] On peut bien sûr faire la même chose avec des droites et des segments, en considérant des bandes.

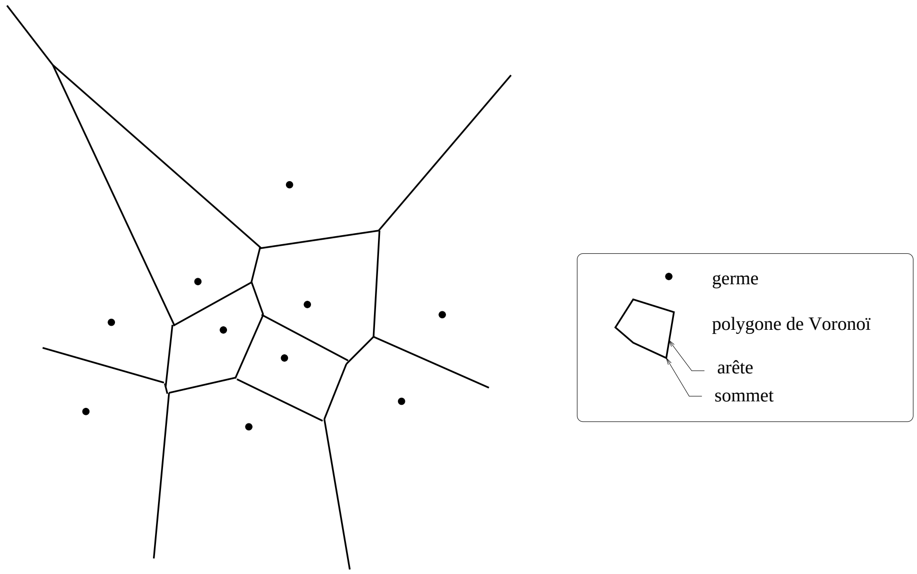


FIG. 4.28 – Pavage de Voronoï à partir d'un ensemble de points.

2. tout sommet du diagramme de Voronoï est centre d'un cercle passant par 3 germes et ne contenant aucun autre germe, ce cercle est appelé cercle de Delaunay,
3. $V(P_i)$ est non borné si et seulement si $P_i$ appartient à la frontière de l'enveloppe convexe des $P_j$.

Si l'on joint par des segments les 3 germes équidistants d'un sommet de Voronoï, on obtient une triangulation de l'ensemble de $P_i$, appelée triangulation de Delaunay. Le résultat obtenu pour les points de la figure 4.28 est illustré sur la figure 4.29.

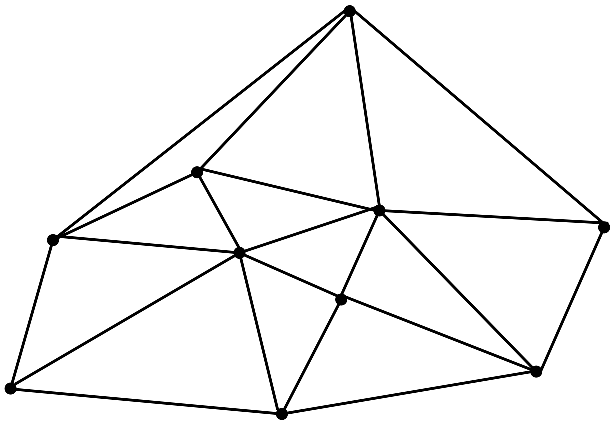

FIG. 4.29 – Triangulation de Delaunay d'un ensemble de points.

La triangulation de Delaunay et le pavage de Voronoï sont deux structures de l'espace duales l'une de l'autre, comme l'illustre la figure 4.30. En effet, à chaque arête de Voronoï correspond une arête de la triangulation, qui lui est orthogonale ; chaque germe est un sommet de la triangulation, et chaque sommet de Voronoï est le centre d'un triangle de Delaunay.

La deuxième propriété est illustrée sur la figure 4.31. La triangulation de Delaunay est celle qui vérifie

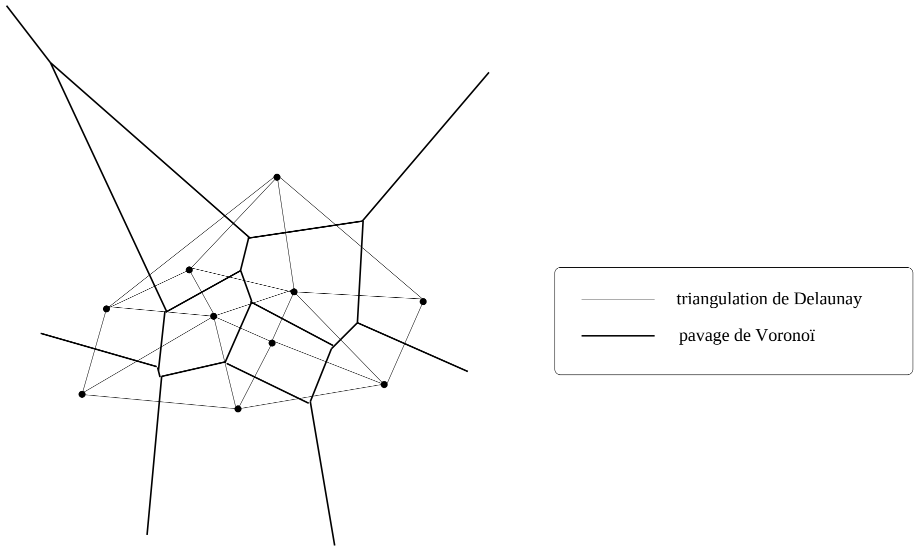


FIG. 4.30 – Dualité entre triangulation de Delaunay et pavage de Voronoï.

que le cercle circonscrit à chaque triangle ne contienne aucun sommet de la triangulation. On a donc ici une première application géométrique du pavage de Voronoï et de la triangulation de Delaunay.

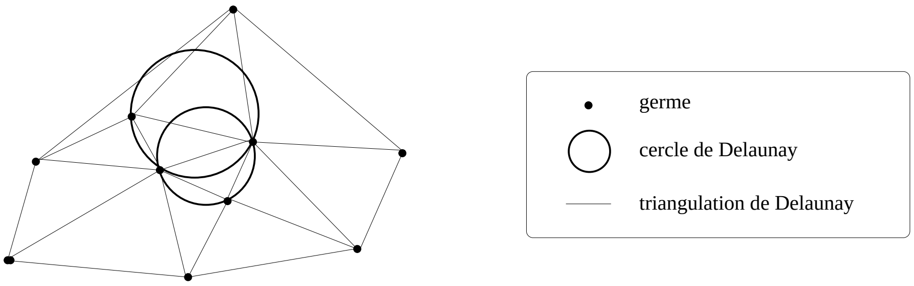


FIG. 4.31 – Propriétés géométriques de la triangulation de Delaunay.

La troisième propriété permet de déduire directement l'enveloppe convexe d'un ensemble de points, ce qui nous donne une deuxième application géométrique de ces deux notions.

Il existe beaucoup d'autres applications. Nous n'en mentionnerons plus qu'une ici, qui concerne le calcul de la distance minimum entre deux ensembles de points $A$ et $B$. Cette distance est définie par :

$$d_{\min}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b),$$

où $d(a, b)$ désigne la distance euclidienne entre les points $a$ et $b$. Pour calculer cette distance minimum, il suffit d'effectuer la triangulation de Delaunay de la réunion de tous les points $A \cup B$, et de déterminer l'arête la plus courte ayant une extrémité dans $A$ et l'autre dans $B$.

Enfin, mentionnons quelques algorithmes de calcul du pavage de Voronoï [Toussaint, 1985, Preparata et Shamos, 1988]. Il existe des algorithmes récursifs qui sont optimaux (en termes de complexité algorithmique), mais dont la mise en œuvre n'est pas très facile. Il existe également des algorithmes incrémentaux, dont la complexité dans le cas le pire n'est pas optimale, mais qui sont plus simples à mettre en œuvre [Green et Sibson, 1978]. Le principe consiste à rajouter les points un à un et à modifier le pavage précédemment obtenu. L'intérêt est que l'ajout d'un point n'entraîne que des modifications locales du pavage. Supposons que l'on connaisse le pavage de $\{P_1, ...P_{n-1}\}$. Lorsqu'on ajoute $P_n$, on commence par rechercher le germe $P_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ le plus proche de $P_n$. La médiatrice de $[P_i, P_n]$ est le support d'une nouvelle arête du pavage. En se donnant un sens de parcours de cette médiatrice, on recherche l'intersection avec une arête du pavage précédent. Le germe correspondant, voisin de $P_i$, est le nouveau point $P_i$ et on itère la procédure jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. On ¡¡ tourne ¿¿ ainsi autour de $P_n$ pour construire le pavé qui lui est associé. Les parties d'arêtes du pavage précédent qui tombent dans ce nouveau pavé sont alors supprimées. La figure 4.32 illustre le principe de cette construction.

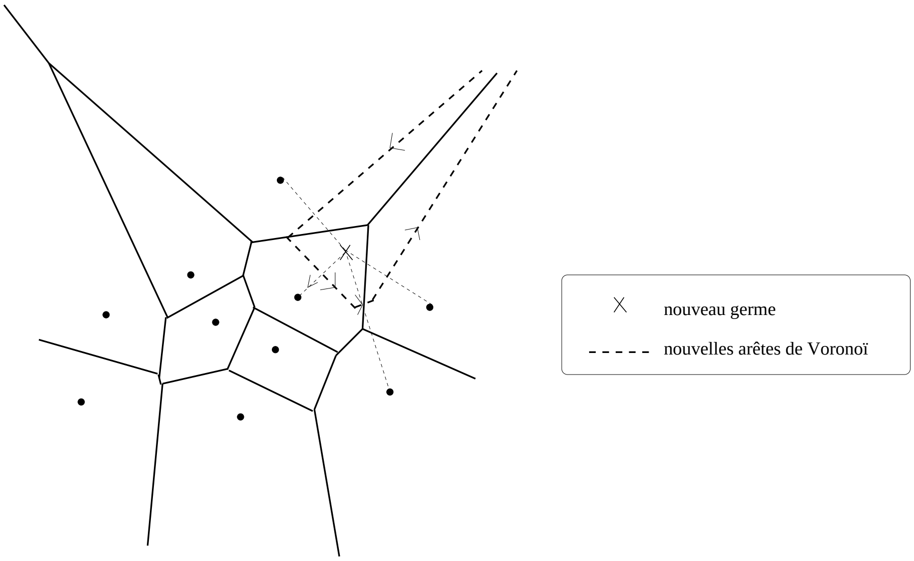


FIG. 4.32 – Construction incrémentale du pavage de Voronoï.

## 4.5 Exemples de structures aléatoires

Dans nombre d'applications, en particulier pour l'analyse de textures, qu'elles soient binaires ou à niveaux de gris, il est nécessaire de générer des germes aléatoires dans l'image.

Une des structures aléatoires ponctuelles les plus utilisées repose sur des distributions de Poisson[4]. Une distribution de points de Poisson vérifie les propriétés suivantes [Serra, 1982a] :

- si $X$ est un compact, et $N(X)$ la variable aléatoire qui compte les points de Poisson tombés dans $X$, alors $N(X)$ est une variable aléatoire d'espérance $\lambda V(X)$, où $\lambda$ est la densité du processus de Poisson et $V(X)$ le volume du compact (sa surface dans le cas du plan) ;
- si $X$ et $X'$ sont deux compacts tels que $X \cap X' = \emptyset$, alors $N(X)$ et $N(X')$ sont deux variables aléatoires indépendantes ;
- la variable aléatoire $N(X)$, pour $X$ compact vérifie :

$$P(N(X) = n) = \frac{\Phi^n}{n!} \exp(-\Phi)$$

[4]Elles constituent par exemple une des composantes des schémas booléens que nous arborderons au chapitre 6.

avec : $\Phi = \int_X \lambda dv$, (dans le cas d'une densité constante, $\Phi = \lambda V(X)$) ;
– étant donnés $n$ points $x_i$ dans $X$, $x_i$ suit une loi uniforme sur $X$.

Si l'on essaye de généraliser la notion de points de Poisson à des structures plus complexes, on est confronté à des difficultés de génération de ces structures. Par exemple, la génération de droites de Poisson n'est pas immédiate. L'idée la plus simple serait de se donner une distribution de points de Poisson dans le plan, et en chaque point, de tracer une droite dont la direction est choisie de manière uniforme. Malheureusement la distribution de droites ainsi obtenue n'est pas de Poisson. Une autre solution, plus compliquée mais fournissant effectivement une distribution de Poisson, consiste à faire touner un axe $Oz$ autour d'un point $O$. Quand $Oz$ balaye un secteur angulaire $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, on tire sur la droite des points de Poisson de densité $\lambda d\alpha$, et on trace les droites orthogonales à $Oz$ passant pas ces points. On obtient ainsi un ensemble de droites de Poisson. Elles peuvent être utilisées par exemple pour définir des pavages aléatoires isotropes.

## 4.6 Fonction distance

La fonction distance est une transformation qui permet de passer d'une image binaire à une image numérique où la valeur de chaque point représente la distance à l'objet le plus proche. Bien que le concept soit global, la fonction distance peut être calculée de manière locale en propageant des distances locales (entre points voisins) définies dans un masque. Ce type d'algorithme évite de calculer de manière exhaustive les distances d'un point à tous les points de l'objet pour en trouver le minimum, ce qui serait prohibitivement long. La contre-partie est qu'on ne calcule alors qu'une approximation de la distance euclidienne. Les exigences sont alors d'obtenir, par des algorithmes rapides, une bonne approximation de la distance euclidienne. Ces méthodes, appelées aussi distances du chanfrein [Borgefors, 1996], sont un exemple où un procédé algorithmique permet de lever les difficultés liées à la discrétisation de l'espace.

Nous verrons dans le chapitre 6 que la fonction distance a de nombreuses applications en morphologie mathématique (outre toutes les applications nécessitant une estimation de la distance entre objets comme le recalage).

### 4.6.1 Définition de distances discrètes

Les distances discrètes sont définies comme des distances sur un graphe, dans lequel les nœuds sont les pixels ou voxels, et les arcs sont définis par un ensemble de vecteurs de base. Ils peuvent représenter les relations de connexité élémentaires (par exemple 4 ou 8 connexité), mais également relier des points plus éloignés. Ils représentent les directions selon lesquelles on peut se déplacer pour aller d'un point à un autre.

Soit $\mathcal{P} = \{\vec{p_1}, ...\vec{p_m}\}$ l'ensemble de ces vecteurs de base, qui engendrent le graphe, et auxquels on associe des longueurs $d_i$. On impose les conditions suivantes :
– $\vec{p_i} \in \mathcal{P} \Rightarrow -\vec{p_i} \in \mathcal{P}$,
– $\vec{p_i} \in \mathcal{P}, \lambda\vec{p_i} \in \mathcal{P} \Rightarrow \lambda = \pm 1$,
– $||\vec{p_i}|| = ||\vec{p_j}|| \Rightarrow d_i = d_j$.

On définit alors la distance entre deux nœuds $x$ et $y$ (deux points) comme :

$$d(x,y) = \frac{1}{s} \min\{\sum_{i=1}^{m} n_i d_i \mid n_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{m} n_i \vec{p_i} = \vec{xy}\}$$

où $s$ est un facteur d'échelle (typiquement $s = d_1$ si $d_1$ est la longueur associée au vecteur élémentaire selon un des axes de coordonnées). Cette distance est exactement la longueur du plus court chemin entre

$x$ et $y$ sur le graphe engendré par $\mathcal{P}$. On peut vérifier aisément que toutes les propriétés d'une distance sont bien satisfaites.

En pratique, les $\vec{p_i}$ et $d_i$ sont représentés par des masques. Chaque point du masque est l'extrémité d'un $\vec{p_i}$ et a pour coefficient le $d_i$ correspondant, qui représente la distance locale entre ce point et le point central du masque (celui-ci est affecté du coefficient 0).

### 4.6.2 Exemples

Pour la qualité de l'approximation, il est possible de jouer sur deux paramètres : la taille du masque (donc le nombre de directions représentées, ou encore le nombre de $\vec{p_i}$) et les coefficients du masque (donc les $d_i$). Plusieurs critères ont été proposés pour estimer cette qualité, le plus fréquemment utilisé étant de minimiser le maximum de la différence avec la distance euclidienne. Les masques les plus employés sont illustrés sur la figure 4.33. Les deux premiers correspondent respectivement à la 4- et à la 8-connexité sur une trame carrée. Le troisième (figure 4.33 c) permet d'avoir une erreur faible ($\leq 8\%$) par rapport à la distance euclidienne en modifiant les coefficients (toutes les distances sont alors multipliées par 3). Le dernier (figure 4.33 d) donne une erreur inférieure à 2% en jouant à la fois sur les coefficients et sur la taille du masque (toutes les distances sont alors multipliées par 5).

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 1 | 0 | 1 |
| | 1 | |

a

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

b

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 4 |
| 3 | 0 | 3 |
| 4 | 3 | 4 |

c

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 11 | | 11 | |
| 11 | 7 | 5 | 7 | 11 |
| | 5 | 0 | 5 | |
| 11 | 7 | 5 | 7 | 11 |
| | 11 | | 11 | |

d

FIG. 4.33 – Exemples de masques pour la distance du chanfrein.

### 4.6.3 Algorithmes de calcul

Une première famille d'algorithmes opère sur une représentation classique de l'image, sous forme de tableau. Les algorithmes de cette famille peuvent être de deux types : parallèle ou séquentiel. Nous les illustrons sur le problème du calcul de la fonction distance (distance de chaque point de l'image au point des objets le plus proche, au sens de la distance discrète définie plus haut).

Si $f^k$ représente l'image à l'itération $k$ et $g$ le masque choisi, l'algorithme parallèle s'exprime de la manière suivante : les points de l'objet sont mis à 0 et les points du complémentaire à une valeur infinie (en pratique, la plus grande valeur stockable), pour former l'image $f^0$ ; puis la formule suivante est itérée jusqu'à convergence :

$$f^k(x) = \min\{f^{k-1}(y-x) + g(y),\ y \in \mathrm{support}(g)\}.$$

L'inconvénient majeur de cet algorithme est que le nombre d'itérations dépend de la taille de l'image, de la taille de l'objet et de sa forme. De plus deux images doivent être gardées en mémoire. Cet algorithme s'applique à n'importe quelle trame et n'importe quel masque.

L'algorithme séquentiel ne nécessite que deux itérations. Il procède en deux balayages en sens opposés de l'image et le masque est divisé en deux parties $g_1$ et $g_2$ contenant les points déjà examinés dans le sens courant de balayage. Pour $k = 1, 2$, on effectue l'opération suivante ($f^0$ étant calculée comme précédemment) :

$$f^k(x) = \min\{f^{k-1}(x), f^k(y-x) + g_k(y),\ y \in \text{support}(g_k)\}.$$

Cet algorithme vérifie l'exigence de la rapidité. Il ne nécessite qu'une image en mémoire et s'applique également à n'importe quelle trame et n'importe quel masque.

Une deuxième famille d'algorithmes repose sur les contours des objets. En effet, les points situés à l'intérieur des objets ont toujours une distance nulle à l'objet, et les points les plus proches des points extérieurs aux objets sont toujours des points situés sur les contours des objets. Ainsi, seuls ceux-ci interviennent réellement dans le calcul.

Un premier type d'algorithme dans cette famille repose sur une structure de chaîne pour représenter les contours des objets. Le principe du calcul de la fonction distance consiste à déplacer ces contours par des règles de ré-écriture, pour déterminer successivement les points à une distance 1 des objets, puis les points à une distance 2, etc. [Vincent, 1992]. Une étape d'ajustement est parfois nécessaire, par exemple quand le déplacement d'un contour conduit à connecter deux objets. Ce type d'algorithme ne nécessite qu'une image en mémoire. L'accès aux voisins doit être facile car il est fréquemment utilisé dans les règles de ré-écriture. Il est très rapide, mais ne peut pas être généralisé à des images 3D car il n'y a pas d'ordre naturel sur les points de la surface d'un objet 3D permettant de les représenter sous forme de chaîne. Les règles de ré-écriture et d'ajustement comportent beaucoup de cas particuliers et la procédure complète est donc un peu délicate.

Un deuxième type d'algorithme repose sur une représentation des points de contours sous la forme d'une simple file d'attente FIFO (*first in, first out*). Cette pile est initialisée par les points de contours des objets (l'ordre n'a pas d'importance). L'algorithme extrait alors le premier point $p$ de la pile, et recherche ses voisins. Pour chaque voisin $q$, si celui-ci est à l'extérieur des objets, il est ajouté à la pile, et on lui affecte une valeur de distance qui vaut celle de $p$ plus la distance locale entre $p$ et $q$ ($d_i$ si $\vec{pq} = \vec{p_i}$). Cet algorithme est également très rapide, généralisable à 3D, et nécessite également un accès rapide aux voisins.

Notons que ces différentes classes d'algorithmes sont utilisées pour de nombreuses autres transformations.