Chapitre 3

L'échantillonnage des images, la représentation fractale

Chapitre rédigé par Henri MAÎTRE

Chronologiquement, l'une des toutes premières étapes du traitement numérique des images est la tâche d'échantillonnage qui réduit l'ensemble continu du monde observable en une série de valeurs discrètes. Nous n'insisterons pas sur l'importance de cette étape en traitement des images, tant il est évident que c'est par elle que l'on contrôle la finesse des détails enregistrés, et par là même, la nature de l'information retenue dans l'image numérique. Cette étape s'accompagne d'une quantification des niveaux de gris et très souvent débouche ensuite soit sur la compression, soit sur le traitement.

Mais en traitement des images, l'échantillonnage apparaît en de nombreuses autres occasions que lors de l'acquisition. En effet, les images sont très souvent appelées à être ré-échantillonnées, par exemple pour des conversions de format (passage d'un format SECAM à un format NTSC[1] en télévision numérique), ou pour en transformer la géométrie (corriger une perspective, orienter une forme dans un repère convenable ou recaler l'image sur une référence). Toutes ces étapes posent à nouveau le problème de l'échantillonnage et nécessitent les mêmes précautions que l'acquisition elle-même.

Dans tout le champ du traitement du signal, l'échantillonnage est abordé à l'aide de la théorie classique proposée par Nyquist et Shannon. Cette théorie s'applique bien sûr aux images et nous la développerons donc dans un premier temps. Nous verrons cependant qu'elle est parfois mal adaptée. Nous verrons également que certains objets peuvent être très mal traités par cette approche. C'est le cas des objets fractales que nous présenterons en fin de chapitre.

3.1 Les signaux monodimensionnels à bande limitée

La théorie de l'échantillonnage s'applique à des signaux f, fonctions d'une variable continue x, dont la bande passante est limitée, c'est-à-dire dont la transformée de Fourier (TF) F, fonction de u, variable

[1]Les formats SECAM et NTSC sont les normes de représentation des signaux de télévision utilisés en France et aux États-Unis.

associée[2] à x, possède un support fini $[-U, U]$:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi iux}dx \quad : \quad F(u) \equiv 0 \quad \forall |u| \geq U$$

3.1.1 Échantillonnage du signal

Le théorème d'échantillonnage établit l'équivalence, sous certaines conditions, entre un signal continu $f(x)$, connu pour tout x, et un ensemble d'échantillons discrets g_i. Cette équivalence se traduit en particulier par la possibilité de calculer f à partir des valeurs g_i et réciproquement la possibilité de calculer g_i à partir de f. Les conditions sont les suivantes ;

- les g_i sont les valeurs du signal $f(x)$ prises à des positions x régulières ;
- ces positions sont séparées d'un intervalle p au plus égal à $\frac{1}{2U}$.

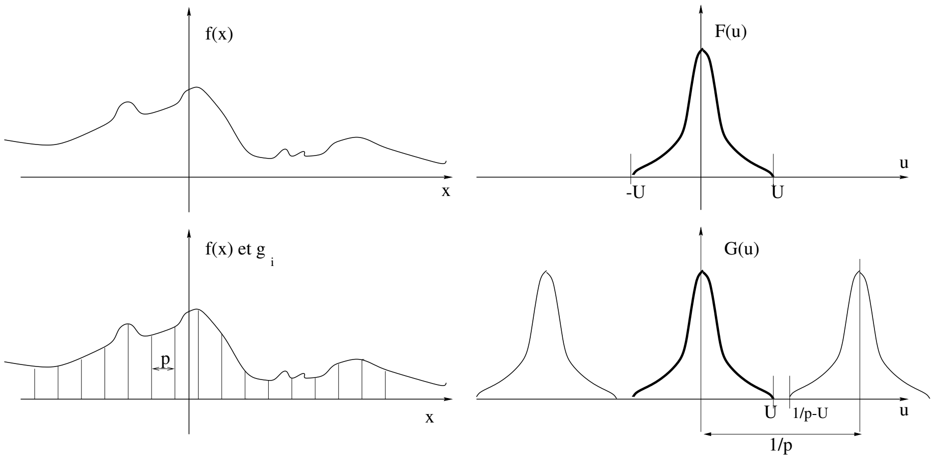

FIG. 3.1 – Echantillonnage d'un signal continu $f(x)$, à spectre $F(u)$ à support borné, avec un pas d'échantillonnage p. Le signal résultant discret a un spectre $|G(u)|^2$.

Ces échantillons sont donc en nombre infini et ont pour valeur :

$$g_i = f(x = ip) = f(x)\delta(x - ip)$$

Ce que nous écrirons aussi :

$$g(x) = f(x) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - ip) = f(x) \text{Ш}\ (x/p)$$

la fonction Ш (x/p) étant le peigne de Dirac de période p.

La TF $G(u)$ se déduit de F par répétition de période $\frac{1}{p}$ (cf. figure 3.1) et atténuation de $\frac{1}{p}$. Comme $\frac{1}{p} \geq 2U$, sur l'intervalle $]-U, U[$, $G(u)$ et $F(u)$ coïncident exactement (au facteur $\frac{1}{p}$ près).

Pour reconstruire le signal, il est intéressant de distinguer le cas où le signal a été échantillonné à la fréquence la plus basse, $p = \frac{1}{2U}$, appelée fréquence de Nyquist, du cas où l'on choisit un nombre plus élevé d'échantillons $p < \frac{1}{2U}$.

[2] Á une variable x temporelle correspond une variable u fréquentielle, exprimée en Hertz ; à une variable x spatiale, correspond une fréquence spatiale u, exprimée en m^{-1}.

3.1.2 Reconstruction du signal échantillonné à la fréquence de Nyquist

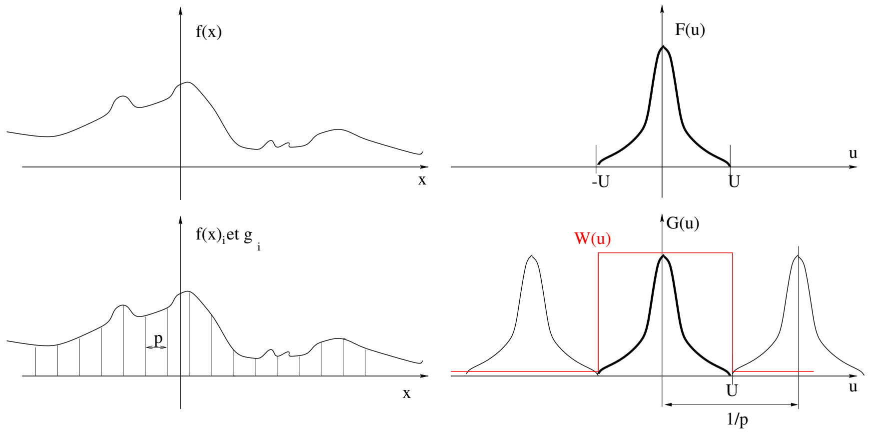

FIG. 3.2 – Echantillonnage d'un signal continu $f(x)$ à la fréquence de Nyquist. Le filtre de reconstruction $W(u)$ est le filtre canonique $W_N(u)$, c'est-à-dire la fonction porte.

Dans le cas où l'on choisit juste le nombre minimal d'échantillons, on se trouve dans la situation particulière décrite sur la figure 3.2 où les ordres parasites dus à l'échantillonnage affectent toutes les fréquences immédiatement supérieures à U. La reconstruction est alors totalement contrainte. Elle se fait par le filtre unique $W_N(u)$ tel que :

$$W_N(u) = \begin{cases} 1 & \forall |u| < U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.1}$$

La reconstruction de f à partir de g s'écrit alors :

$$f(x) = pg(x) * w_N(x)$$

ou de façon équivalente :

$$F(u) = pG(u)W_N(u)$$

La fonction w_N qui vérifie les relations 3.1 s'appelle la fonction canonique d'échantillonnage. Nous en verrons l'usage plus loin. Dans le cas monodimensionnel qui nous intéresse ici, nous avons :

$$w_N(x) = sinc(xp)$$

et la reconstruction, en dehors des valeurs connues $x = kp$, prend la forme classique d'une sommation de sinus cardinaux pondérés par les valeurs des échantillons :

$$f(x) = \sum_i pg_i sinc(x - ip)$$

Pour les positions des échantillons $x = kp$, on vérifie que les contributions de tous les autres échantillons s'annulent (cela exprime l'indépendance des échantillons à la fréquence de Nyquist). On voit donc que les échantillons pris à la distance $\frac{1}{2U}$ forment une base pour la reconstruction des signaux dont la bande est limitée à l'intervalle $[-U, U]$.

3.1.3 Reconstruction dans le cas de suréchantillonnage

Si l'on choisit de prendre plus d'échantillons qu'il n'est strictement nécessaire ($p < \frac{1}{2B}$), on se trouve dans la situation décrite sur la figure 3.1, où certaines fréquences, comprises entre U et $\frac{1}{p} - U$, ne contiennent pas d'énergie. Lors de la reconstruction, tout filtre vérifiant :

$$W_N(u) = \begin{cases} 1 & \forall |u| < U \\ 0 & \forall |u| > \frac{1}{p} - U \end{cases} \tag{3.2}$$

est satisfaisant pour la reconstruction. Il existera donc de nombreuses formules de reconstruction du type :

$$f(x) = pg(x) * w_k(x)$$

où les w_k seront autant de fonctions de reconstruction (cf. figure 3.3). Il n'y a donc en général plus indépendance entre les échantillons, mais au contraire **redondance**. Ces échantillons ne forment plus une base mais un système générateur. La redondance peut être exploitée de diverses façons, par exemple pour corriger des distorsions, atténuer l'effet d'un bruit ou combler des pertes. Elle permet également de choisir les filtres w_k les plus adaptés à nos contraintes. Elle se paie par un signal plus volumineux.

Parmi toutes les fonctions de reconstruction possibles, la fonction canonique vue en éq.3.1 se distingue car elle garantit que la reconstruction qu'elle procure, même en présence de bruit, sera la plus fidèle au signal original selon un critère d'écart quadratique moyen.

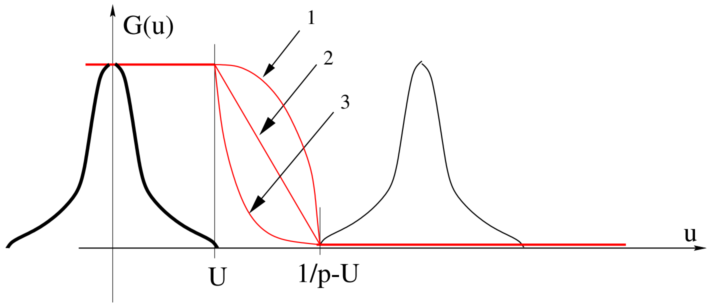

FIG. 3.3 – Trois filtres possibles pour reconstruire exactement un signal suréchantillonné (les filtres sont symétriques pour les u négatifs). Ils diffèrent par leurs valeurs dans l'intervalle compris entre U et $1/p - U$.

3.2 Signaux réels

Á quelque échelle que nous l'observions, l'univers nous apparaît comme une fonction des deux variables d'espace, définie en tout point et continue en presque tout point et dotée de détails aussi fins que nous le souhaitons. Il en est ainsi des vues aériennes, des scènes de la rue quotidienne et mêmes des microphotographies, tant les structures observées sont usuellement grandes devant les discontinuités de la matière : moléculaires ou atomiques. L'univers ne se présente donc pas comme une fonction à spectre borné comme nous le souhaiterions, mais comme une fonction à spectre à support quasi-infini.

3.2.1 Les limitations physiques du spectre

Mais l'univers s'observe à travers des instruments (microscope, lentille, caméra) dont la résolution est limitée en particulier par la diffraction (cf. [Pérez, 1991]). Ce sont ces instruments qui introduisent généralement la limitation en bande passante exigée par l'échantillonnage. Au lieu de mesurer l'image exacte $f(x)$ de l'univers, on en mesure une image dégradée f' par la réponse impulsionnelle $h(x)$ du système d'observation :

$$f'(x) = f(x) * h(x)$$

La limite fréquentielle U est alors imposée par le support de H, fonction de transfert du système. C'est donc à ce signal f' que l'on appliquera les recommandations issues de la théorie de Shannon et exposées dans les lignes précédentes (Section 3.1).

Les limites des optiques

Pour tous les systèmes dont l'optique est parfaite et limitée par le seul diamètre D de la pupille d'entrée, et dans le cas d'une imagerie incohérente, l'optique introduit un filtrage bidimensionnel, fonction de la seule variable $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$:

$$H(\rho) = \frac{J_1^2(\pi \rho D/\phi)}{(\pi \rho D/\phi)^2} \tag{3.3}$$

Cette fonction est connue sous le nom de tache d'Airy [Pérez, 1991], J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1 et ϕ la distance focale de l'optique utilisée. Un tel filtre n'est malheureusement pas un filtre passe-bas parfait mais il est généralement considéré comme approximativement nul au-delà des fréquences $\rho = 1,22D/\phi$.

Les capteurs solides

Une autre limitation du spectre du signal est introduite lorsqu'on utilise des détecteurs solides (matrices ou lignes de photodétecteurs). Ces détecteurs sont constitués d'un assemblage de détecteurs élémentaires placés dans le plan image du système optique, chacun étant chargé de mesurer un échantillon. L'échantillon ainsi mesuré n'est donc pas ponctuel mais il résulte de l'intégration de l'énergie sur la surface du capteur élémentaire. Le filtrage a pour réponse impulsionnelle une fonction porte dont, pour des raisons de construction, la largeur est nécessairement inférieure au pas d'échantillonnage (donné par la distance entre capteurs). Un tel système est lui aussi un mauvais filtre passe-bas puisque sa fonction de transfert (la fonction *sinc*) est à support large d'une part et ne s'annule qu'à l'extérieur de la bande passante compatible avec le pas d'échantillonnage d'autre part. Lui aussi laissera place à du repliement de spectre si l'on ne prend pas soin de filtrer optiquement le signal.

3.2.2 Filtrage du signal

Pour de nombreuses applications, le pas d'échantillonnage p, dont découle le débit de l'échantillonneur, est la grandeur limitante d'un système d'imagerie. C'est par exemple le cas pour certaines applications de télésurveillance ou de télédétection qui utilisent un canal de transmission à débit réduit. Dans ces cas, le problème de l'échantillonnage est pris à l'envers et c'est la bande passante de l'optique qui est ajustée pour assurer la relation $p = \frac{1}{2U}$. On adapte donc la dégradation du signal au taux d'échantillonnage que l'on peut effectuer. Comment choisir alors h si p est fixé ?

Une idée tentante est de filtrer parfaitement le signal original f de façon que son spectre ne déborde pas de la bande de fréquence $[-U, U]$. Cela conduit à choisir $H(u)$ égale à la fonction porte $W_U(u)$. Cette solution est aisée si l'on dispose de la TF du signal $f(x)$, comme en optique cohérente [Cozannet et al., 1981], ou en radar [Maître, 2001]. Il suffit alors de supprimer les fréquences au-delà de U. Lorsque l'on ne peut accéder directement au domaine spectral, un tel filtrage passe-bas idéal est difficile à réaliser puisqu'il nécessite que l'on convole le signal par un sinus cardinal, fonction à support infini. On choisit alors d'approcher cette opération en convolant $f(x)$ par une fonction $h'(x)$ à support " presque-compact " et dont le spectre $H'(u)$ est proche de la fonction porte. Cette approximation entraîne deux types d'erreurs (cf. figure 3.4) :

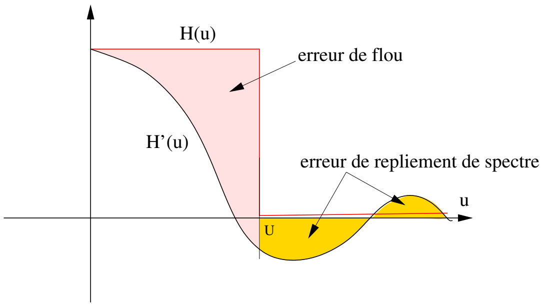

FIG. 3.4 – Les deux types d'erreurs introduites par le filtrage d'un signal par un filtre $h'(x)$ différent du passe-bas idéal $h(x)$ lors de son échantillonnage. Ils sont présentés ici dans l'espace de Fourier. Á l'intérieur de la bande, l'erreur est une distorsion des fréquences appelée flou en traitement d'images, à l'extérieur de la bande, l'énergie non annulée viendra se replier lors de l'échantillonnage et créera le défaut de repliement de spectre.

1. tout d'abord, à l'intérieur de la bande passante $[-U, U]$, des fréquences seront atténuées, introduisant un flou sur l'image. Son énergie est donnée par :

$$E_i = \int_{-U}^{U} F^2(u)[H'(u) - H(u)]^2 du$$

2. d'autre part, à l'extérieur, des fréquences ne seront pas annulées. Lors de l'échantillonnage, ces fréquences répliquées dans les ordres parasites viendront s'insérer dans la bande conservée, introduisant une distorsion du signal appelée repliement de spectre ou *aliasing*. L'énergie concernée est :

$$E_o = 2 \int_{U}^{\infty} F^2(u) H'^2(u) du$$

Parmi les fonctions h' les plus fréquemment utilisées, nous pouvons citer les suivantes :

- la fonction porte : $h'_1(x) = W_{p/2}(x)$ qui conduit à $H'_1(u) = p\ sinc(up)$;
- la fonction triangle (convolution de 2 portes) : $h'_2(x) = \mathrm{Tri}(x/p)$ qui conduit à $H'_2(u) = p^2\ \mathrm{sinc}^2(up)$;
- la spline cubique (convolution d'une porte et d'un triangle) :

$$h'_3(x) = (x)^3_+ - 4(x-1)^3_+ + 6(x-2)^3_+ - 4(x-3)^3_+$$

  où : $z_+ = max(z, 0)$, qui conduit à $H'_3(u) = p^3\ \mathrm{sinc}^3(up)$;
- la fonction gaussienne $h'_4(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ qui a pour fonction de transfert la gaussienne de variance $1/\sigma$.

3.3 L'extension en dimension N

L'extension de la théorie de l'échantillonnage à des espaces de dimension N ($N = 2$ pour l'image, $N = 3$ pour les séquences d'images ou pour les volumes en imagerie sismique et médicale, $N = 4$ pour une séquence de volumes temporels, etc.) est simplifiée par la linéarité des opérations dans le domaine spectral qui permettent de décomposer la démarche en autant de problèmes d'échantillonnage que de dimensions. Mais il révèle cependant des différences notables dès que $N > 1$ et entraîne une complexité croissante du choix de la base d'échantillonnage avec N.

Nous noterons par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{u}$ les variables vectorielles conjuguées d'espace et de fréquence. A une image continue $f(\mathbf{x})$ est associée sa transformée de Fourier $F(\mathbf{u})$.

$$F(\mathbf{u}) = \iint \ldots \int f(\mathbf{x}) \exp(-2i\pi \mathbf{u}.\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

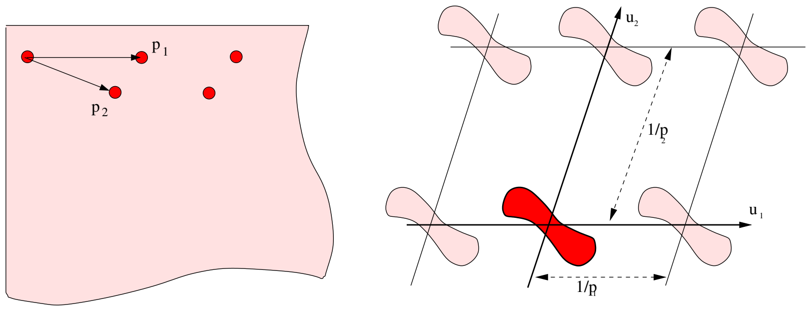

FIG. 3.5 – Echantillonnage d'un signal bidimensionnel selon 2 pas d'échantillonnage p_1 et p_2 (à gauche). Le spectre de l'image est reproduit aux nœuds du réseau réciproque (à doite). Le domaine $\mathcal{S}$ est le domaine où $F(u)$ n'est pas nul ; le domaine $\mathcal{V}$ est la maille de répétition du motif.

Un signal de dimension N est à spectre borné s'il existe U tel que $\forall \mathbf{u}, |\mathbf{u}| > U$. Se donner un échantillonnage de l'espace, c'est choisir un ensemble de N vecteurs d'échantillonnage $\mathbf{p}$ formant une base de l'espace image. Á ces vecteurs est associé par transformée de Fourier le réseau réciproque de vecteurs de base $\mathbf{k}$ qui pave l'espace des fréquences (cf. figure 3.5). La reconstruction du signal continu se fera exactement si les ordres parasites ne se superposent pas au spectre du signal.

On voit qu'il est simple d'échantillonner un signal de dimension N de façon à vérifier l'inégalité stricte de Shannon. Il suffit de choisir tous les pas d'échantillonnage p_i de façon que $p_i < 1/2U$. Cette condition suffisante pour faire un échantillonnage parfait n'est cependant pas nécessaire et conduit généralement à un très fort suréchantillonnage et donc à une grande redondance dans les échantillons ainsi mesurés.

On définit l'efficacité de l'échantillonnage η par le rapport du volume $\mathcal{S}$ où le spectre n'est pas nul, sur le volume élémentaire $\mathcal{V}$ de répétition du spectre par les $\mathbf{p}$:

$$\eta = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{V}} \leq 1$$

On vérifie que l'échantillonnage au critère de Nyquist (cf. Section 3.1.2) correspond au cas $\eta = 1$, sans redondance. S'il est facile d'adapter le pas d'échantillonnage d'un signal monodimensionnel de façon à éliminer la redondance, c'est beaucoup plus difficile pour $N > 1$, et très souvent impossible. En effet, on ne pourra assurer $\eta = 1$ que si le domaine $\mathcal{S}$ a la même géométrie que $\mathcal{V}$, c'est-à-dire si l'on peut paver l'espace à partir de translatés de $\mathcal{S}$. Á 2D, les seules formes vérifiant cette propriété sont les parallélogrammes ou des hexagones, mais il est exceptionnel de trouver des scènes dont le spectre est borné par de telles figures. En conséquence, pour la dimension 2 et les dimensions supérieures, ont doit généralement accepter des échantillonnages redondants. On peut alors chercher à maximiser η. Dans le cas général d'un spectre quelconque, cette optimisation se fait de façon empirique. Un cas très fréquemment rencontré est celui de spectres isotropes ($\mathcal{S}$ est une sphère de R^N). Les échantillonnages qui s'imposent alors sont bâtis sur le maillage hexagonal (cf. figure 3.6) :

– à 2D c'est le maillage hexagonal lui-même ;
– à 3D c'est le maillage hexagonal compact ou le maillage cubique centré qui conduit à des maillages appelés en quinconce en vidéo (quinconce ligne et quinconce trame).

Les échantillonnages bâtis sur le maillage carré sont plus redondants mais leur simplicité de mise en œuvre les a rendus populaires malgré leur efficacité médiocre et leurs faibles propriétés topologiques (cf. Chapitre 4).

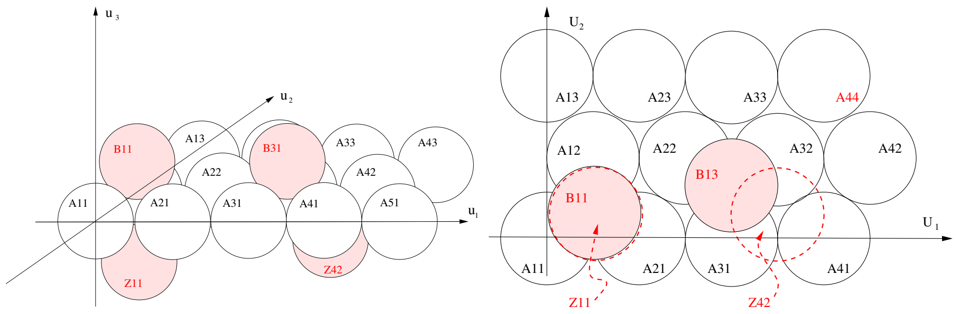

FIG. 3.6 – Echantillonnage de signaux tridimensionnels à spectre isotrope. Les spectres sont représentés par des sphères. la vue de gauche représente une vue perspective du domaine de Fourier, celle de droite une vue de dessus depuis la direction des u_3 positifs. On a représenté un échantillonnage hexagonal dans le plan u_1u_2 (sphères Aij) et 2 schémas différents : l'hexagonal compact et le cubique centré. Dans les deux cas, la couche supérieure (représentée par les sphères Bij) est placée dans les trous de la couche A de façon que chaque sphère B soit tangente à 3 sphères A. Mais dans le schéma hexagonal compact (B11 et Z11), la couche inférieure Z est à l'aplomb de la couche B tandis que dans le cas cubique centré (B13 et Z42) elle occupe les sites inoccupés de la couche B.

3.4 Le modèle fractal

Nous allons voir maintenant un modèle d'univers qui s'oppose en tous points à l'approche précédemment développée de l'échantillonnage. C'est le modèle fractal.

La notion de dimension fractale a été introduite par Mandelbrot [Mandelbrot, 1977] pour rendre compte du comportement surprenant de certains objets soumis à des mesures de plus en plus fines. On s'aperçoit alors que le résultat de la mesure (longueur, périmètre ou surface) dépend fortement de la précision de l'instrument utilisé, et que ce résultat, invariablement, croît sans limite apparente pour des précisions de plus en plus grandes. Cette propriété est bien illustrée par l'exemple d'une côte rocailleuse, tiré de [Richardson, 1961], dont la longueur ne cesse de croître, selon qu'on la mesure sur une carte, sur le terrain en voiture, en vélo, à pied, ou avec un double décimètre. Chaque nouvelle méthode nous permet de contourner des rochers nouveaux, de s'introduire dans des anfractuosités plus petites, ce qui rallonge d'autant l'estimation faite auparavant. Mandelbrot a souligné que ce comportement, qui s'oppose résolument à toutes les notions de l'analyse mathématique classique (fondée sur la régularité et la continuité des fonctions, au moins dans des petits domaines), est en fait très commun et peut être aisément étendu à des objets les plus variés : suspension d'eau savonneuse et ses infinies cascades de particules en émulsion, éponges aux formes torturées, étagement de végétations dans les sous-bois, ramifications sans fin des connexions nerveuses, emboîtement des cratères à la surface de la lune, et bien d'autres encore.

Sur la figure 3.7, nous avons représenté certains de ces objets, tels que la nature nous les propose, véritables casse-têtes pour le traiteur d'image. Une éponge, ou un poumon, présentent, par exemple, une surface continue, mais si déchiquetée, si percée d'alvéoles, si ponctuée de protubérances de toutes tailles qu'elle apparaît finalement remplir tout l'espace : tout le poumon n'est que surface intérieure vers le système sanguin, extérieure vers les bronches et l'atmosphère (cf. figure 3.9).

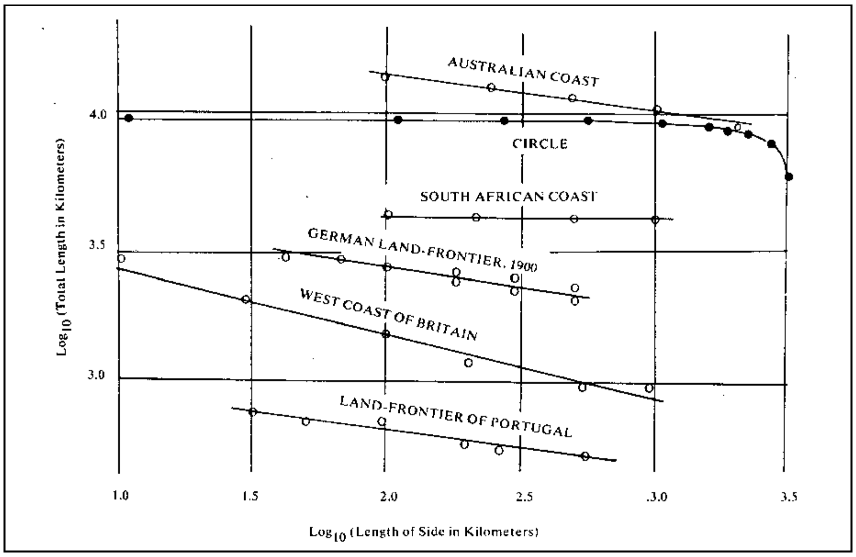

FIG. 3.7 – Évolution de la longueur de quelques frontières et côtes en fonction de la mesure utilisée pour calculer cette longueur (d'après [Richardson, 1961] citée dans [Mandelbrot, 1977]) - échelles logarithmiques.

Cette propriété d'une surface de remplir tout un volume n'est pas sans rappeler les courbes " pathologiques " de Peano ou de Von Koch (fig. 3.8). C'est cette analogie avec ces courbes célèbres que Mandelbrot utilise pour définir deux qualités qui seront pour nous précieuses : la dimension fractale et l'homothétie interne.

De la même façon un phénomène, apparemment ponctuel, pourra avoir une dimension plus grande que 0, et une surface dans l'espace pourra avoir une dimension supérieure à 2.

3.4.1 La dimension fractale

Elle exprime la propriété (soulignée plus haut) d'une courbe qui passe plus ou moins par tous les points d'un plan. On connaît de longue date les dimensions 1, 2, ou 3 attachées respectivement aux courbes, aux surfaces, ou aux volumes. Mandelbrot postule qu'il existe des courbes de dimension intermédiaire entre 1 et 2, des surfaces de dimension supérieure à 2, et que ces objets possèdent justement la propriété de n'avoir pas de longueur ou de surface précise, pas plus qu'un volume n'a de surface, ou un carré de longueur. Cette dimension, intermédiaire entre les valeurs entières, a été baptisée du néologisme " fractale " afin qu'aucune confusion ne soit faite entre une surface classique (de dimension $D = 2$). L'une et l'autre passent, par exemple, par tous les points d'un plan, mais si l'une est une vraie fonction de deux variables, l'autre n'est que fonction d'une seule variable (ensemble totalement ordonné).

Comment mesure-t-on une dimension, classique ou fractale ? Tout d'abord, conformément à la démarche mathématique, il nous faut nous munir d'une mesure. C'est une opération en apparence délicate, mais en pratique très simple. Elle est discutée dans [Mandelbrot, 1977], et nous n'en reprendrons pas les termes ici. Disons simplement que si nous disposons, par exemple, d'une famille de confettis de rayons décroissants, alors nous sommes à même d'évaluer aussi bien des longueurs ou des surfaces classiques, que des courbes

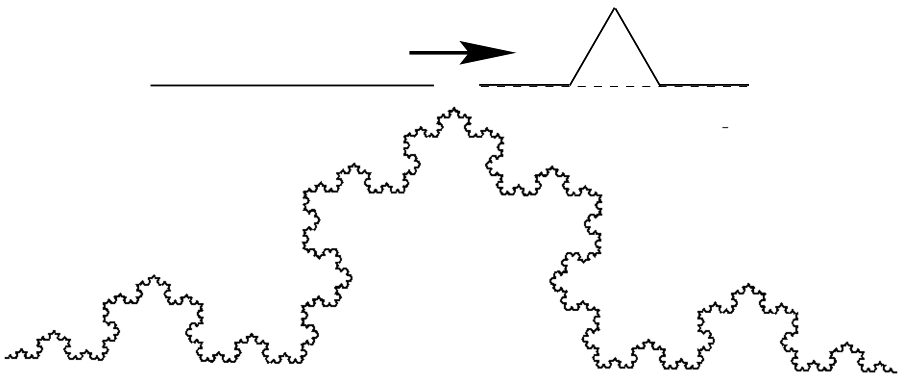

FIG. 3.8 – La courbe de von Koch est un cas d'école de courbe fractale. Elle se construit à partir d'un segment de droite qui est divisé en 3 et remplacé par 4 segments de taille 1/3. La dimension fractale vaut alors $D = \log 4/\log 3$.

fractales. Pour cela, ayant confronté à un étalon universel la taille du confetti (nous le dénoterons η), il ne nous reste plus qu'à recouvrir la courbe de ces confettis, de façon qu'aucun point de la courbe ne soit plus visible. Le produit du nombre de confettis $N(\eta)$ par la taille élémentaire η : $L(\eta) = \eta.N(\eta)$ est une bonne mesure de la grandeur qui nous intéresse lorsque η tend vers 0 : longueur ou surface par exemple. Mesurons ainsi un segment de droite ou une courbe classique. Si l'on divise η par 10, $N(\eta)$ est multiplié par 10 et la longueur totale est constante. Cette variation, linéaire, de η et $N(\eta)$ est caractéristique des dimensions 1. Si l'on mesure l'aire d'un carré, chaque fois que η est divisé par 10, il faut 100 fois plus de confettis pour recouvrir la surface. La dépendance quadratique indique une dimension 2. Répétée sur une courbe fractale, l'expérience mettra en évidence une dimension intermédiaire entre 1 et 2 : par exemple, $log4/log3 = 1,26$ pour la courbe de Von Koch de la figure 3.8, ou bien 1,25 pour la courbe de l'Angleterre conformément à la figure 3.7.

Ainsi, la dimension fractale est déterminée par le graphe de $\log(L(\eta)) = f(\log(\eta))$. Si ce graphe est linéaire la dimension D est donnée par :

$$\log L(\eta) \propto (1 - D) \log \eta \tag{3.4}$$

sinon par son asymptote :

$$\lim_{\eta \to 0} D = 1 - \frac{\log L(\eta)}{\log \eta} = \frac{-\log N(\eta)}{\log \eta}. \tag{3.5}$$

3.4.2 L'homothétie interne

L'homothétie interne est une idée assez intuitive que certaines formes se retrouvent identiques à elles-même lorsqu'on les observe à des échelles différentes :

- 1 m^3 de nuage est identique à 1 km^3,
- la côte de Bretagne est un massif granitique de quelques centaines de km de long, mais la Pointe du Finistère qu'elle contient semble posséder les mêmes propriétés, de même qu'un rocher isolé de cette Pointe ou un morceau de granit de ce rocher,

- la courbe de von Koch (figure 3.8) est exactement identique à elle même lors d'une division d'échelle de 3.
- un mouvement brownien observé pendant 1 s ou pendant 10 s semble le même.

L'homothétie interne peut être exacte (géométriquement comme pour la courbe de von Koch, ou en loi statistique comme pour le mouvement brownien), ou approchée, comme pour beaucoup de phénomènes physiques. Lorsque plusieurs homothétie s'appliquent à une même structure, on emploie le terme de cascade d'homothéties (comme par exemple pour la courbe de von Koch).

La dimension (fractale) de l'objet D et le nombre N de structures nécessaires pour reconstruire un objet d'une taille donnée à partir d'une réplique k fois plus petite sont liés par la relation :

$$N = k^D. \tag{3.6}$$

Par exemple, un segment de droite est identique à k segments k fois plus petits mis bout à bout, un carré est semblable à k^2 carrés de côté k fois plus petit judicieusement assemblés, et il faut $N = 4$ segments de taille $k = 3$ fois plus petite pour reconstruire un flocon de von Koch.

3.4.3 Que faire de la théorie fractale ?

Voyons maintenant de quelle façon ces surprenantes propriétés interviennent lors de l'étape d'échantillonnage d'une image.

Tout d'abord, l'existence de formes fractales conforte notre opinion que l'approche de Nyquist-Shannon est parfois impuissante à rendre compte de la structure d'un objet, par le simple fait qu'il n'y a pas de fréquence limite qui le caractérise de façon certaine. Á quelle résolution faudra-t-il en effet analyser une coupe de poumon pour évaluer la surface des échanges d'oxygène ? Les seules réponses rigoureuses seraient, là-encore, des majorants bien incompatibles avec nos moyens de traitement : par exemple les plus grosses structures moléculaires, ou bien les plus fines structures cellulaires. C'est pourquoi, dans de nombreuses études (en biologie, métallurgie, ou même télédétection des ressources terrestres), des travaux identiques, menés sur des échantillonnages différents conduisent à des résultats discordants. Le dépouillement automatique des données entraîne souvent une confiance trop grande dans les résultats pour qu'une remise en question des hypothèses fondamentales soit consentie.

En second point, lorsqu'elle est clairement perçue, la notion de forme fractale permet de réaliser une économie de temps d'analyse et de traitement.

Pour cela, il nous faut connaître d'une part la dimension fractale de l'objet, d'autre part l'existence et la limite de son homothétie interne. Cette dernière connaissance est un des points-clefs de l'analyse et sa connaissance nous est habituellement enseignée par le spécialiste : biologiste, métallurgiste, etc. On sait que l'architecture intime de l'univers est hétérogène : les constructions nucléaires précèdent les structures atomiques, qui elles-mêmes engendrent les édifices moléculaires, et ainsi de suite. Clairement, de cette architecture découlent les discontinuités dans les diverses structures, et donc dans les dimensions fractales. La limite d'homothétie est issue de cette double notion de discontinuité ; elle nous informe que, jusqu'à une certaine échelle de résolution, la fonction des structures est bien celle qui nous concerne (échanges gazeux dans le cas des poumons). Nous choisissons alors un pas grossier d'échantillonnage δx, très supérieur à la limite $\delta' x$ qui serait nécessaire pour rendre compte de la totalité du phénomène. De la mesure m faite à cette échelle (exprimée en unité δx), et de la dimension fractale D, nous déduisons alors la valeur vraie m' (exprimée en unités $\delta' x$) par la relation :

$$m' = m \left[\frac{\delta x}{\delta' x} \right]^D \tag{3.7}$$

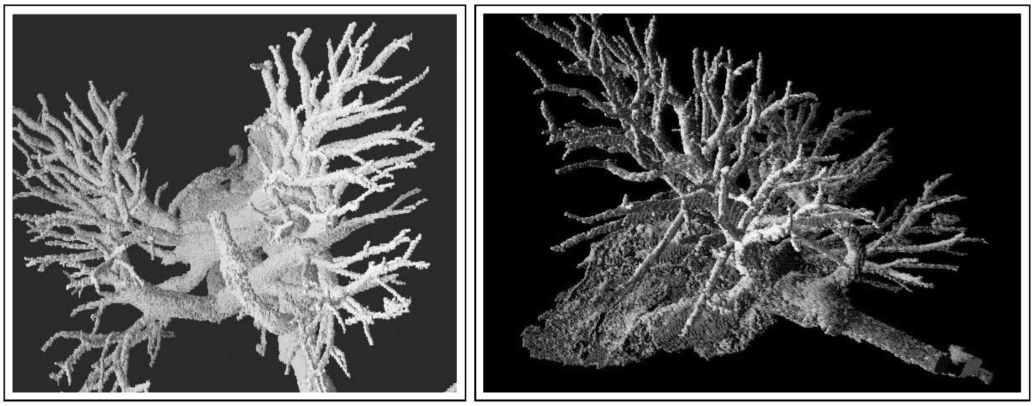

FIG. 3.9 – Quelques exemples de fractales : arbre bronchique de l'homme recalculé à partir du corps du Human Visual Project par Jorge Marquez.

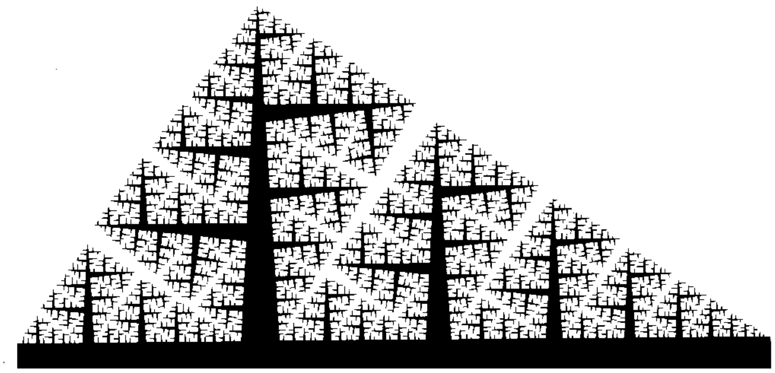

FIG. 3.10 – La forêt étagée de Peano, une forêt fractale artificielle.

Soulignons à ce point la propriété remarquable du pixel (point élémentaire d'image) de fournir une mesure universelle (au sens où nous l'avons entendu au paragraphe 3.4.1). Contrairement au double

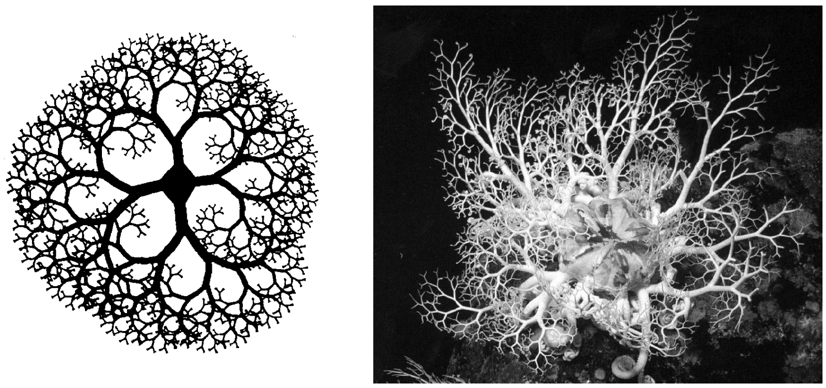

FIG. 3.11 – Corail synthétique et naturel

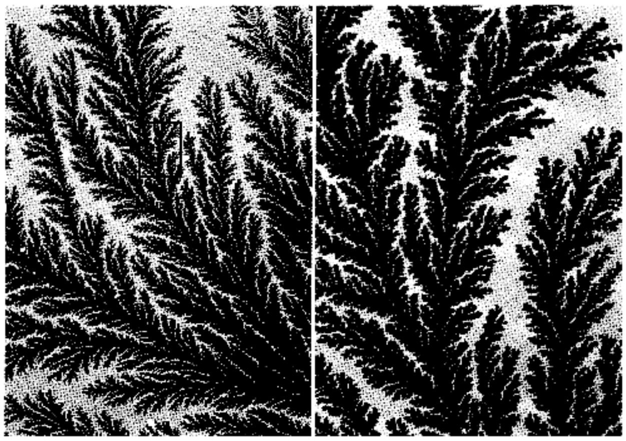

FIG. 3.12 – Electrodéposition de cuivre, c'est un exemple de percolation fractale. La cascade d'homothétie est illustrée par la petite fenêtre de l'image gauche, agrandie sur l'image droite (d'après [Bunde et Havlin, 1994]).

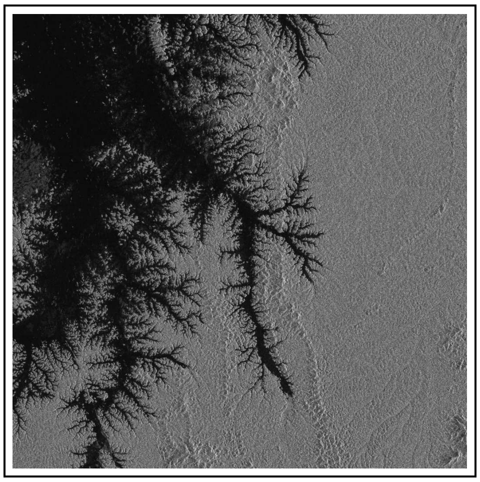

FIG. 3.13 – Un lac en forêt guyanaise vu par le satellite radar ERS-1 ©ESA.

décimètre, le pixel permet de mesurer non seulement des longueurs ($D = 1$), mais aussi des surfaces ($D = 2$) ou des volumes ($D = 3$). Et l'équation 3.5 demeure valable, tant pour des formes classiques que fractales pour D variant de 0 à 3. Ainsi cette notion de forme fractale mérite-t-elle une attention particulière ; elle bouleverse nos schémas traditionnels de l'univers peuplé de " bonnes " fonctions, continues, dérivables, mesurables, etc. Elle se montre néanmoins un outil remarquable pour représenter beaucoup des objets rencontrés chaque jour. Elle s'est montrée particulièrement précieuse pour décrire les objets de la géomorphologie : rivières, lignes de crêtes, etc.

Enfin les approches fractales ont prêté leur nom à des outils de compression et de codage d'images (le codage fractal). Ces techniques utilisent les propriétés du point fixe de certaines transformations contractantes du plan (généralement des combinaisons d'homothéties, de rotations et de changements de contraste) [Fisher, 1995]. Cela permet de ne transmettre, pour chaque imagette issue de la scène à transmettre, que la seule transformation qui permet d'obtenir cette imagette à partir d'une autre plus

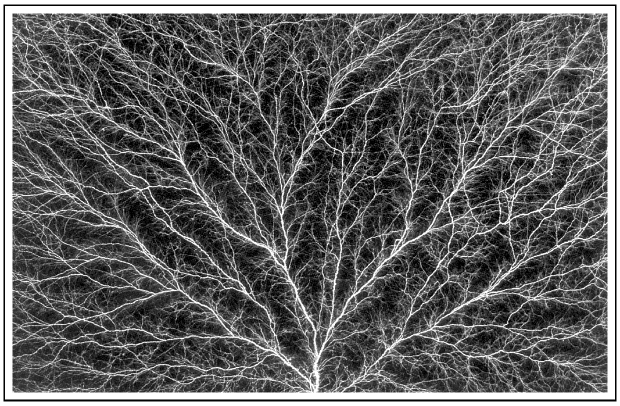

FIG. 3.14 – Décharge électrique claquant un diélctrique (d'après [Bunde et Havlin, 1991]).

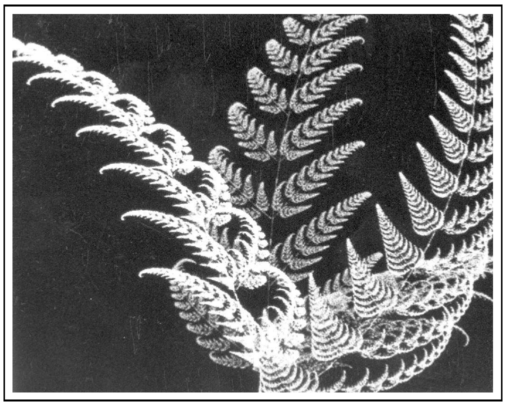

FIG. 3.15 – Fougère simulée par 5 attracteurs superposés (d'après [Peitgen et Saupe, 1988]).)

grande issue d'une autre partie de l'image (cascade interne).