Chapitre 15

Éléments de géométrie tridimensionnelle

Chapitre rédigé par Isabelle BLOCH et Henri MAÎTRE

Les images sont des représentations bi-dimensionnelles de l'espace tri-dimensionnel qui nous entoure. La structure des images est donc régie par les lois des transformations géométriques qui accompagnent la formation de l'image. Ces transformations ont fait l'objet d'études intensives ces dernières années [Faugeras, 1993, Mohr et al., 1994, Gallice, 2002], qui font intervenir des outils adaptés de représentation et de traitement de l'espace. C'est l'objet de ce chapitre de présenter ces outils, leur rôle dans la formation de l'image et les principaux résultats qui leurs sont attachés. Nous verrons tout d'abord la structuration de l'espace et des transformations de l'espace et introduirons l'espace projectif qui permet de traiter linéairement les transformations les plus utiles. Nous examinerons ensuite les diverses représentations possibles des rotations. Nous aborderons enfin la géométrie différentielle qui permet de décrire la surface des objets de l'espace.

15.1 Géométrie projective

Les principaux éléments de géométrie projective peuvent être trouvés dans [Faugeras, 1993].

15.1.1 Espace projectif et coordonnées homogènes

Un espace projectif de dimension n, noté $\mathcal{P}^n$ est un espace dans lequel un point x est représenté par un vecteur de $n+1$ coordonnées :

$$x = (x_1, ..., x_{n+1})^t \tag{15.1}$$

dans lequel au moins une coordonnée x_i est non nulle. Ces coordonnées sont appelées coordonnées homogènes.

Deux vecteurs $(x_1, ..., x_{n+1})^t$ et $(y_1, ..., y_{n+1})^t$ représentent le même point si et seulement si il existe un réel non nul λ tel que $\forall i, x_i = \lambda y_i$.

Un point pour lequel $x_{n+1} = 0$ est appelé point à l'infini.

Les transformations linéaires d'un espace projectif $\mathcal{P}^m$ dans un autre $\mathcal{P}^n$ sont appelées colinéations. Une colinéation est définie par une matrice H de taille $(m+1) \times (n+1)$ de déterminant non nul, à un facteur non nul près (H et λH définissent la même transformation).

Une base projective est un ensemble de $n+2$ points, tel que tous les $(n+1)$-uplets soient linéairement indépendants. La base projective standard est définie par :

$$\forall i \leq n+1, e_i = (0, ..., 1, ..., 0)^t \text{ et } e_{n+2} = (1, ..., 1)^t \tag{15.2}$$

où la i-ème coordonnée de e_i est égale à 1. Tout point x de $\mathcal{P}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de n'importe quel $(n+1)$-uplet de la base, par exemple :

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i. \tag{15.3}$$

Un changement de base est défini de manière unique par une colinéation, représentée par une matrice inversible de taille $(n+1) \times (n+1)$.

On peut montrer que l'espace projectif $\mathcal{P}^n$ est topologiquement équivalent à la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ repliée, c'est-à-dire dans laquelle on identifie les points aux antipodes. La source principale de ce résultat est qu'un point $x = (x_1, ..., x_{n+1})^t$ est un point de S^n si $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Un tel point est également un point de $\mathcal{P}^n$. Le point $-x$, aux antipodes de x, est également sur la sphère unité mais représente le même point de $\mathcal{P}^n$. Une des conséquences de ce résultat est que l'espace projectif $\mathcal{P}^n$ est compact, ce qui peut sembler surprenant puisqu'intuitivement on manipule dans $\mathcal{P}^n$ des points à l'infini. Les sphères S^1 et S^2 repliées (dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement) sont utilisées pour représenter des directions, et la sphère S^3 de $\mathbb{R}^4$ repliée pour représenter des rotations à l'aide de la notion de quaternions (nous y reviendrons plus loin). Le théorème d'équivalence permet de manipuler $\mathcal{P}^n$ plutôt que S^n, ce qui est plus simple.

15.1.2 Espaces projectifs $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ et $\mathcal{P}^3$

L'espace $\mathcal{P}^1$ est appelé droite projective. Sa base standard est composée des points $e_1 = (1,0)^t$, $e_2 = (0,1)^t$, $e_3 = (1,1)^t$. Ainsi tout point x de la droite projective peut s'écrire par exemple :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \tag{15.4}$$

avec $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$. Si l'on se restreint aux points tels que $x_2 \neq 0$, ce qui revient à exclure le point e_1, alors x s'écrit de manière équivalente comme :

$$x = \alpha e_1 + e_2 \tag{15.5}$$

avec $\alpha = \frac{x_1}{x_2}$. Le point e_1 est obtenu pour $\alpha = \pm\infty$ et est appelé point à l'infini.

L'espace $\mathcal{P}^2$ est appelé plan projectif. Il est très important pour la représentation d'une image. Un point x de $\mathcal{P}^2$ est défini par un triplet de coordonnées (x_1, x_2, x_3) non toutes nulles dans la base standard $(e_1, ..., e_4)$. Une droite d de $\mathcal{P}^2$ est également définie par un triplet de nombres (d_1, d_2, d_3) non tous nuls. Un point x appartient à la droite d si et seulement si :

$$d^t x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{3} d_i x_i = 0. \tag{15.6}$$

Cette équation de droite fait apparaître une dualité entre point et droite et il n'y a pas de différence formelle entre les deux. Cette équation représente également l'ensemble des droites qui passent par x.

Une droite passant par deux points x et y est représentée par le produit vectoriel $d = x \wedge y$. En effet, tout point z de la droite peut s'écrire $z = \alpha x + \beta y$ pour α et β quelconques, ce qui signifie que le déterminant de (z, x, y) est nul, soit encore $z^t(x \wedge y) = 0$. Par dualité, le point d'intersection de deux droites d et d' est représenté par le produit vectoriel $d \wedge d'$. On en déduit que deux droites s'intersectent toujours dans l'espace projectif $\mathcal{P}^2$.

La droite obtenue pour $x_3 = 0$ est appelée droite à l'infini.

L'espace projectif $\mathcal{P}^3$ a pour base standard $(e_1, ..., e_5)^t$ définie comme précédemment, et un point x de $\mathcal{P}^3$ est défini (toujours à un facteur non nul près) par 4 coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) non toutes nulles. Un plan π de $\mathcal{P}^3$ est également défini par quatre nombres non tous nuls $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ et l'équation du plan est :

$$\pi^t x = 0. \tag{15.7}$$

Cette équation fait apparaître une dualité entre point et plan cette fois, et représente également l'ensemble des plans qui passent par le point x.

Une droite de $\mathcal{P}^3$ peut être définie soit à partir de deux points, soit comme intersection de deux plans. Par dualité, une droite est donc transformée en une droite.

Le plan à l'infini est obtenu pour $x_4 = 0$. Tout plan intersecte le plan à l'infini selon une droite à l'infini.

15.1.3 Expression linéaire de problèmes géométriques

Un des intérêts de la géométrie projective est de permettre d'exprimer certains problèmes géométriques simplement par des équations d'algèbre linéaire. Nous en donnons ici quelques exemples.

Une conique[1] de $\mathcal{P}^2$ est définie par l'expression quadratique suivante :

$$x^t C x = 0 \tag{15.8}$$

où C est une matrice de taille 3×3 définie à un facteur non nul près (elle a donc 5 coefficients indépendants).

L'intersection d'une droite et d'une conique peut alors être exprimée facilement. Soit $x + \alpha y$ un point de la droite définie par les deux points x et y. Ce point appartient à la conique si et seulement si :

$$(x + \alpha y)^t C (x + \alpha y) = 0 \tag{15.9}$$

soit :

$$x^t C x + 2\alpha x^t C y + \alpha^2 y^t C y = 0 \tag{15.10}$$

et la résolution de cette équation en α donne les intersections de la droite et de la conique (deux solutions en général).

Dans le cas où le discriminant de l'équation est nul, les deux points d'intersection sont confondus et la droite est alors tangente à la conique. La tangente t à la conique au point x est alors donnée par :

$$t = Cx. \tag{15.11}$$

Le rang de la conique (rang de la matrice C) permet de classifier les coniques. Il est important de noter que ce rang est un invariant projectif, c'est-à-dire qu'il est indépendant de la base projective choisie. C'est donc bien une caractéristique intrinsèque de la conique. Les coniques non-dégénérées (de rang 3) sont les cercles, les ellipses, les paraboles et les hyperboles du plan. Les coniques dégénérées, de rang 2 ou 1, sont respectivement des paires de droites et des droites.

[1] Les coniques prendront une place importante en vision par ordinateur dans toutes les opérations de localisation et d'orientation des caméras à partir de points connus de la scène, par exemple lors de la recherche des formes fondamentales en section 15.3.2.

De manière similaire, une quadrique dans $\mathcal{P}^3$ est définie par une matrice Q de taille 4×4 (à un facteur non nul près) et l'équation suivante :

$$x^t Q x = 0. \tag{15.12}$$

Le plan π tangent à la conique au point x est donné par $\pi = Qx$.

Le rang de la matrice Q définit le rang de la quadrique et est un invariant projectif. Les quadriques non-dégénérées (de rang 4) sont les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes et les hyperboloïdes de l'espace. Une quadrique dégénérée de rang 3 est un cône, si le rang vaut deux c'est une paire de plans, et si le rang vaut 1 c'est un plan.

L'intersection d'un plan π et d'une quadrique est une conique de π. L'intersection d'une droite et d'une quadrique s'obtient en résolvant une équation du second degré similaire à celle obtenue pour une conique, en remplaçant C par Q.

15.1.4 Stratification, groupes de transformations et invariants

Le monde est en général considéré comme un espace euclidien tridimensionnel. C'est l'espace le plus complet. Souvent nous n'en avons qu'une représentation partielle, par exemple sous forme d'une image, et la structure réduite plus simple de l'espace projectif permet alors de manipuler cette représentation. Les espaces métriques et affines sont intermédiaires, ce qui permet de construire une stratification des espaces, comme le montre le tableau 15.1. A chaque niveau sont associés un groupe de transformations linéaires et des invariants. L'espace projectif étant le moins structuré, c'est aussi celui qui a le plus grand groupe de transformations et le plus petit nombre d'invariants. D'un niveau à l'autre, le groupe des transformations est un sous-groupe du groupe des transformations du niveau précédent. Ainsi les transformations euclidiennes forment le plus petit groupe.

Espace	Degrés de liberté	Forme des transformations linéaires	Invariants
Projectif	15	$T_P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$	bi-rapport
Affine	12	$T_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances relatives le long de directions, parallélisme
Métrique	7	$T_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & t_x \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & t_y \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances relatives, angles
Euclidien	6	$T_E = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances absolues

TAB. 15.1 – Stratification des espaces, du moins structuré au plus complet.

Dans l'espace projectif, le groupe des transformations est celui des colinéations, le groupe le plus général des transformations linéaires. Les seize coefficients d'une matrice 4×4 représentant une collinéation de $\mathcal{P}^3$ sont définies à un facteur non nul près, ce qui laisse 15 degrés de liberté.

Les invariants de $\mathcal{P}^3$ sont, outre les relations d'incidence, de colinéarité et de tangence, les bi-rapports, définis de la manière suivante. Soient quatre points colinéaires de paramètres λ_i. La droite portant ces points est par exemple définie par les points x et y et chacun des quatre points est représenté par $x + \lambda_i y$. Le bi-rapport des points est alors :

$$\frac{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4}}{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}} \tag{15.13}$$

et est un invariant projectif : il ne dépend pas des choix de x et y, et est invariant par toute transformation projective T_P.

Ces bi-rapports peuvent également être calculés pour 4 droites s'intersectant en un point ou 4 plans s'intersectant en une droite. Ce sont également des invariants.

Le passage de l'espace projectif à l'espace affine se fait en éliminant les points à l'infini. C'est la transformation qui fait passer de la projection perspective (où les fuyantes ont une point de fuite en commun) à la perspective cavalière (où les fuyantes sont parallèles), voir figure 15.1.

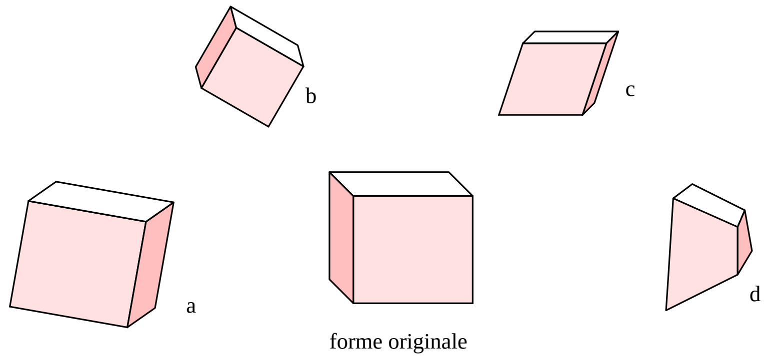

FIG. 15.1 – Dans une transformation euclidienne, le cube original se transforme : en a) par rotation et translation (transformation euclidienne) ; en b), par une transformation métrique ; en c), par une affinité (sous forme d'un parallélogramme) ; en d), par une projection perspective.

Par exemple, le passage de la droite projective à la droite affine se fait par une bijection pour $\alpha \neq \pm\infty$. De même le passage entre l'espace affine 3D et $\mathcal{P}^3$ se fait par la bijection suivante :

$$(x, y, z)^t \mapsto (x, y, z, 1)^t. \tag{15.14}$$

Le plan à l'infini de $\mathcal{P}^3$ peut être considéré comme les points limites de norme infinie, donc représentés par les coordonnées homogènes $(x_\infty, y_\infty, z_\infty, 0)^t$, qui n'ont pas d'équivalent dans l'espace affine.

En utilisant cette bijection, les transformations affines sont les transformations linéaires T_A dont la forme générale est donnée dans le tableau 15.1. Elles ont 12 degrés de liberté et laissent le plan à l'infini invariant.

Les invariants projectifs sont a fortiori des invariants affines. De plus, le parallélisme est un invariant des transformations affines, ainsi que les rapports des longueurs dans une direction donnée (correspondant au bi-rapport lorsque deux des points sont à l'infini).

Le groupe des transformations de l'espace métrique est le groupe des similarités (composées de rotations, translations et homothéties). La forme générale d'une transformation métrique T_M est montrée dans le tableau 15.1. En coordonnées cartésiennes, une telle transformation s'écrit comme la succession d'une rotation (matrice orthonormale 3×3), puis un produit par un facteur d'homothétie, puis une translation (vecteur de longueur 3). Les coordonnées homogènes permettent de regrouper ces trois termes dans une seule matrice.

Cette fois les distances relatives et les angles sont des invariants supplémentaires.

Dans l'espace euclidien, le facteur d'homothétie est fixé et les transformations euclidiennes sont donc les transformations rigides (6 degrés de liberté au lieu des 7 des transformations métriques). Les distances absolues sont donc cette fois des invariants.

L'ensemble des transformations linéaires de $\mathcal{P}^3$ forment donc un emboîtement de sous-groupes, appelé stratification, tel que représenté sur la figure 15.2.

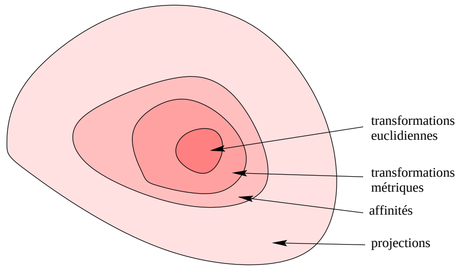

FIG. 15.2 – Les transformations d'espaces qui s'expriment linéairement en représentation projective forment un emboîtement appelé stratification.

15.2 Représentations des rotations de $\mathbb{R}^3$

15.2.1 Les angles d'Euler

Les rotations de $\mathbb{R}^3$ sont définies par des matrices R orthogonales (satisfaisant $RR^t = I$, où I est la matrice identité) et de déterminant égal à 1. Elles peuvent se décomposer sous la forme de trois rotations à 2 dimensions, autour de chacun des axes du repère. Soit α l'angle de la rotation autour de l'axe x (dans le plan yz), β l'angle de la rotation autour de y et γ l'angle de rotation autour de z. Ces angles sont appelés angles d'Euler de la rotation (figure 15.3).

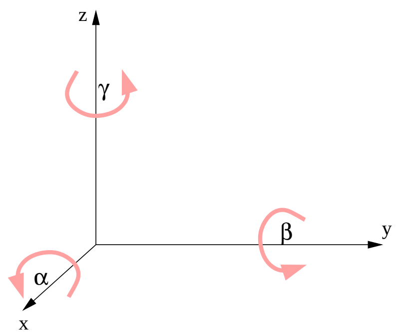

FIG. 15.3 – Représentation de la rotation par les angles d'Euler.

Si l'on note $R(\alpha, \beta, \gamma)$ une telle matrice, elle peut s'écrire :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(0, 0, \gamma) \circ R(0, \beta, 0) \circ R(\alpha, 0, 0)$$

où la loi de composition $\circ$ s'effectue de la droite à la gauche. On note que l'ordre dans lequel s'effectue ces rotations est important pour le résultat final.

Finalement $R = R(\alpha, \beta, \gamma)$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta & -\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma\cos\beta & -\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & -\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{15.15}$$

Inversement, la connaissance de la matrice de rotation R permet en théorie de retrouver les angles d'Euler. Posons $u = \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2}$. On a :
- si $u \neq 0$ alors : $\cos\alpha = R_{33}/u$, $\cos\beta = u$ et $\cos\gamma = R_{11}/u$,
- si $u = 0$ alors $\beta = \pm\pi/2$ et on ne peut connaître que $\alpha + \gamma$.

Mais cette déduction mathématique ignore totalement la présence possible de bruit sur les coefficients R_{ij} de la matrice R. La résolution doit en pratique prendre en compte la propriété de la matrice R d'être unitaire pour régulariser la solution.

Parallèlement à cette écriture classique, il existe d'autres formulations, souvent plus élégantes, qui sont souvent utilisées en traitement d'images et en vision par ordinateur [Faugeras, 1993], et que nous décrivons dans les paragraphes suivants.

15.2.2 Exponentielle d'une matrice anti-symétrique

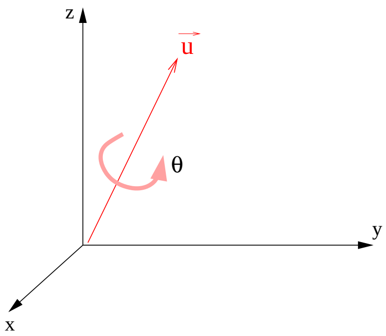

FIG. 15.4 – Représentation canonique de la rotation.

Une rotation de $\mathbb{R}^3$ laisse une droite invariante, appelée axe de la rotation. Elle peut alors être définie à partir de cet axe et d'un angle θ (figure 15.4). C'est la représentation dite canonique.

Etant donnée une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe quelconque, il est possible de la représenter à partir d'une matrice anti-symétrique, sans revenir à la décomposition en trois rotations selon les trois axes du repère.

Plus précisément, soit la matrice anti-symétrique

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.16}$$

On définit l'exponentielle de H par la somme :

$$e^H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!}. \tag{15.17}$$

On peut alors montrer que e^H est une matrice de rotation d'axe $\vec{u} = (a,b,c)^t$ et d'angle $\theta = \|\vec{u}\|\ [2\pi]$. La preuve de ce résultat peut être trouvée par exemple dans [Faugeras, 1993].

15.2.3 Forme canonique et théorème de Rodriguez

Le théorème de Rodriguez permet d'éviter le calcul de la somme infinie et de la ramener à la somme de trois termes uniquement. Ce théorème exprime la rotation R sous la forme suivante :

$$R = e^H = I + \frac{\sin\theta}{\theta} H + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} H^2. \tag{15.18}$$

On a ainsi une expression simple d'une rotation d'axe et angle quelconques. En effet, le calcul des puissances successives de H donne :

$$\begin{aligned}
H^2 &= \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}, \\
H^3 &= -(a^2+b^2+c^2) \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = -\theta^2 H, \\
H^4 &= -\theta^2 H^2, \\
H^5 &= \theta^4 H, \\
H^{2n} &= (-1)^{n-1}\theta^{2n-2} H^2 \quad \text{pour } n \geq 1, \\
H^{2n+1} &= (-1)^n \theta^{2n} H \quad \text{pour } n \geq 0.
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{n!}, \\
\cos\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{n!},
\end{aligned}$$

dont on déduit le théorème.

15.2.4 Quaternions

Les quaternions ont été introduits pour étendre les propriétés des nombres complexes (qui représentent élégamment les rotations du plan) à des espaces de dimension plus élevée. Ils sont définis comme des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, sur lesquels on définit une multiplication particulière, non commutative. Un quaternion $(q_1, q_2, q_3, q_4)^t$ peut être représenté de manière équivalente sous la forme (s, v), où s est un réel et v un vecteur de $\mathbb{R}^3$, avec $s = q_1$ et $v = (q_2, q_3, q_4)^t$. Par analogie avec les complexes, on appelle s la partie réelle du quaternion et v sa partie imaginaire. Un réel pur a alors la forme $(s, 0)$ et un imaginaire pur (ou quaternion vectoriel) a la forme $(0, v)$.

Le produit de deux quaternions $q = (s, v)$ et $q' = (s', v')$ est défini de la manière suivante :

$$q \times q' = (ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v \wedge v') \tag{15.19}$$

où $\cdot$ et $\wedge$ désignent les produits scalaire et vectoriel classiques de $\mathbb{R}^3$. En particulier, le produit de deux quaternions réels est le produit classique sur $\mathbb{R}$, alors que le produit de deux quaternions vectoriels est leur produit vectoriel.

Le conjugué d'un quaternion $q = (s, v)$ est le quaternion $\bar{q}$ défini par :

$$\bar{q} = (s, -v) \tag{15.20}$$

La norme d'un quaternion est définie de manière naturelle par :

$$|q|^2 = \bar{q} \times q = q \times \bar{q} = (s^2 + \|v\|^2, 0) = (\|q\|^2, 0), \tag{15.21}$$

où $\|q\|$ désigne la norme euclidienne de q dans $\mathbb{R}^4$. La norme d'un quaternion est un réel pur. Cette équation fait apparaître que la multiplication d'un quaternion avec son conjugué commute, mais ce n'est pas le cas du produit de deux quaternions quelconques.

La norme du produit de deux quaternions vaut simplement $|q \times q'| = |q||q'|$.

L'intérêt des quaternions ici réside dans leur lien avec les rotations de $\mathbb{R}^3$. En effet, une rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle θ peut être représentée par le quaternion (s, v) tel que :

$$s = \cos\frac{\theta}{2}, \tag{15.22}$$

et

$$v = \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}. \tag{15.23}$$

Notons que le quaternion $(-s, -v)$ représente la même rotation. Ce n'est pas surprenant puisque une rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle θ est équivalente à une rotation d'axe $-\vec{u}$ et d'angle $2\pi - \theta$.

Définissons la relation $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}(q, q') \Leftrightarrow q = -q'$. Cette relation est une relation d'équivalence. Soit $\mathcal{Q}_1$ l'ensemble des quaternions de norme 1. Muni du produit défini plus haut, c'est un groupe (non abélien). L'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ muni de la composition (produit des matrices de rotations) est également un groupe $\mathcal{R}^3$. On peut montrer que $\mathcal{R}^3$ est isomorphe au groupe quotient $\mathcal{Q}_1/\mathcal{R}$. Cet isomorphisme est établi par la relation entre (s, v) et $(\theta, \vec{u})$ exprimée plus haut, et par la préservation de la structure de groupe : si deux rotations r_1 et r_2 sont représentées par les quaternions q_1 et q_2 (en choisissant une des deux représentations possibles pour chaque rotation), alors leur composition $r_1 \circ r_2$ est représentée par $q_1 \times q_2$ (et $-q_1 \times q_2$).

Si maintenant une rotation est représentée sous forme matricielle R et si q est un des deux quaternions correspondants, on a pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$:

$$(0, Rx) = q \times (0, x) \times \bar{q} \tag{15.24}$$

ou sous forme simplifiée en identifiant un vecteur et un quaternion :

$$Rx = q \times x \times \bar{q}. \tag{15.25}$$

On peut alors exprimer les coefficients de R à partir de ceux de q. Soit $q = (s, v)$, avec $v = (l, m, n)^t$ et $l^2 + m^2 + n^2 + s^2 = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
q \times x \times \bar{q} &= (s, v) \times (0, x) \times (s, -v) \\
&= (-v \cdot x, sx + v \wedge x) \times (s, -v) \\
&= (-sv \cdot x + v \cdot (sx + v \wedge x) + (sx + v \wedge x) \wedge (-v)) \\
&= (0, 2(v \cdot x)v + (s^2 - v^2)x + 2sv \wedge x).
\end{aligned}$$

Le produit vectoriel peut s'écrire comme produit d'une matrice anti-symétrique et d'un vecteur. En effet, soit V la matrice définie à partir de v par :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $v \wedge x = Vx$. De même en posant $A = (lv, mv, nv)$ on peut écrire sous forme matricielle $(v \cdot x)v = Ax$. On a alors :

$$R = 2A + (s^2 - v^2)I + 2sV \tag{15.26}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 + l^2 - m^2 - n^2 & 2(lm - sn) & 2(ln + sm) \\ 2(lm + sn) & s^2 - l^2 + m^2 - n^2 & 2(mn - sl) \\ 2(ln - sm) & 2(mn + sl) & s^2 - l^2 - m^2 + n^2 \end{pmatrix}. \tag{15.27}$$

Faisons maintenant le lien avec l'espace projectif $\mathcal{P}^3$. L'ensemble des quaternions de norme 1, $\mathcal{Q}_1$, est de manière immédiate isomorphe à la sphère unité S^3 de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que le groupe quotient $\mathcal{Q}_1/\mathcal{R}$ est isomorphe à la sphère S^3 repliée, dans laquelle on identifie les points aux antipodes. On en déduit donc que le groupe des rotations $\mathcal{R}^3$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathcal{P}^3$.

En coordonnées homogènes, une rotation d'axe x et d'angle θ par exemple s'exprime dans $\mathcal{P}^3$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.28}$$

Une des applications typiques des quaternions est le recalage rigide, où l'on cherche à optimiser la transformation entre deux ensembles de points ou deux objets. Soient $X = \{x_i, i = 1...n\}$ et $Y = \{y_i, i = 1...n\}$ les deux ensembles de points à recaler, le point x_i correspondant au point y_i (on suppose ici que cette correspondence est connue). Soit (t, r) une transformation rigide formée d'une translation t et d'une rotation r. Le critère de recalage le plus souvent utilisé est celui des moindres carrés, et on cherche alors la transformation qui minimise :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \|x_i - (r(y_i) + t)\|^2. \tag{15.29}$$

On peut montrer facilement que la translation optimale est celle qui fait coïncider les centres de gravité de X et Y, et on supposera donc dans la suite que X et Y ont même centre de gravité ($\sum x_i = \sum y_i$) et que la translation est nulle.

Soit q un des deux quaternions représentant la rotation r. L'expression de E devient alors :

$$E = \sum_{i=1}^{n} |x_i - q \times y_i \times \bar{q}|^2. \tag{15.30}$$

En utilisant les propriétés des quaternions de norme 1, on a :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - q \times y_i \times \bar{q}|^2 |q|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i \times q - q \times y_i \times \bar{q} \times q|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i \times q - q \times y_i|^2. \end{aligned}$$

D'après la définition du produit de quaternions, l'expression $x_i \times q - q \times y_i$ est une fonction linéaire des quatre composantes de q, et on peut donc écrire E sous la forme :

$$E = \sum_{i=1}^{n} q^t A_i^t A_i q$$

où les A_i sont des matrices 4×4 ne dépendant que de x_i et y_i. La rotation optimale s'obtient en calculant les valeurs propres de la matrice A de taille 4×4 suivante :

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i.$$

La solution du problème de minimisation aux moindres carrés est alors le quaternion qui est le vecteur propre de norme 1 correspondant à la plus petite valeur propre de A.

15.3 Géométrie différentielle

Dans cette partie, nous rappelons quelques éléments de géométrie différentielle, utiles en particulier pour le traitement d'images et de données tridimensionnelles. L'ouvrage [Carmo, 1976] est une bonne référence dans ce domaine.

15.3.1 Courbes, repère de Frenet

Soit une courbe de l'espace paramétrée par u. Un point P de la courbe est repéré par rapport à l'origine de l'espace par le vecteur $r(u) = \vec{OP}$ et par rapport à un point de référence sur la courbe par l'abscisse curviligne s représentant la longueur de la courbe entre le point de référence et P :

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \|r'(u)\| du \tag{15.31}$$

où u_0 est le paramètre du point de référence sur la courbe.

La tangente à la courbe en P est définie par le vecteur :

$$T = \frac{dr}{ds}. \tag{15.32}$$

D'après la définition de s, on a :

$$\frac{ds}{du} = \|r'(u)\|$$

et donc

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{du}\frac{du}{ds} = \frac{r'(u)}{\|r'(u)\|}$$

dont on déduit que le vecteur tangent T est unitaire.

La dérivée de la tangente par rapport à l'abscisse curviligne définit un vecteur unitaire N appelé normale à la courbe en P et un réel k appelé courbure de la courbe au point P :

$$\frac{dT}{ds} = kN. \tag{15.33}$$

Le vecteur N est effectivement normal à T, puisqu'en dérivant l'expression $T \cdot T = 1$ (T est unitaire) on obtient $T \cdot \frac{dT}{ds} = 0$.

Le cercle osculateur, tangent à la courbe en P, a pour rayon $\frac{1}{k}$. Le plan défini par le point P et les vecteurs T et N est appelé plan osculateur à la courbe en P et contient le cercle osculateur.

La binormale est définie par :

$$B = T \wedge N \tag{15.34}$$

et est donc un vecteur unitaire orthogonal à T et à N.

Le triplet (T, N, B) définit un repère orthonormé, local en P, appelé repère de Frenet.

Les formules de Frenet-Serret donnent les dérivées des vecteurs introduits ci-dessus par rapport à l'abscisse curviligne dans le repère de Frenet :

$$\frac{dr}{ds} = T \tag{15.35}$$

$$\frac{dT}{ds} = kN \tag{15.36}$$

$$\frac{dN}{ds} = \tau B - kT \tag{15.37}$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N \tag{15.38}$$

où τ est appelé la torsion de la courbe en P. Ces équations s'obtiennent facilement en dérivant les expressions suivantes :

$$T \cdot T = 1 \quad N \cdot N = 1 \quad B \cdot B = 1$$

et

$$T \cdot N = 0 \quad N \cdot B = 0 \quad B \cdot T = 0.$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous forme condensée :

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{15.39}$$

En pratique, il est souvent plus facile de manipuler les expressions qui dépendent d'un paramètre u (qui peut être quelconque) plutôt que des expressions qui dépendent de l'abscisse curviligne (qui peut être difficile à calculer). On a alors :

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \tag{15.40}$$

$$T = \frac{\dot{r}}{\dot{s}} \tag{15.41}$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{du} = |\dot{r}| \tag{15.42}$$

$$kB = \frac{\dot{r} \wedge \ddot{r}}{\dot{s}^3} \tag{15.43}$$

$$N = B \wedge T \tag{15.44}$$

$$\tau = \frac{\dot{r}(\ddot{r} \wedge \dddot{r})}{\dot{s}^6 k^2} \tag{15.45}$$

Dans ces équations, les points au-dessus des symboles désignent les dérivées par rapport à u.

15.3.2 Courbes sur une surface, formes fondamentales

Considérons maintenant une surface S, paramétrée par (u, v). Un point P sur la surface est repéré par le vecteur $r(u, v) = \vec{OP}$. Le plan tangent à la surface en P est le plan $T_P(S)$ défini par les deux vecteurs suivants :

$$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u, \tag{15.46}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = r_v. \tag{15.47}$$

La normale à la surface en P est le vecteur unitaire orthogonal à $T_P(S)$:

$$n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}. \tag{15.48}$$

On appelle souvent sphère de Gauss la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle un point représente un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. L'application qui à tout point P de la surface associe le point correspondant à n sur la sphère de Gauss est appelée application de Gauss. Nous verrons par la suite l'intérêt de cette application et de sa différentielle.

Soit une courbe sur la surface, paramétrée par t, dont les points s'écrivent $U = (u(t), v(t))^t$. La dérivée de r par rapport à t, vecteur tangent à la courbe, vaut :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt} = A\dot{U} \tag{15.49}$$

où $\dot{U}$ est le vecteur des dérivées de U par rapport à t et A est la matrice 2×2 dont les colonnes sont les vecteurs représentant les dérivées partielles de r par rapport à u et v respectivement :

$$A = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\Big|\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

La longueur de ce vecteur tangent est :

$$\dot{s}^2 = |\dot{r}|^2 = \dot{U}^t A^t A \dot{U} = \dot{U}^t G \dot{U} \tag{15.50}$$

où s désigne toujours l'abscisse curviligne sur la courbe, et G est la matrice

$$G = A^t A = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{15.51}$$

appelée première forme fondamentale. Elle mesure le déplacement dr sur la surface au point de paramètres (u, v) pour des variations (du, dv) de ces paramètres.

Le vecteur tangent unitaire à la courbe peut alors s'écrire en fonction des matrices A et G sous la forme :

$$T = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \frac{A\dot{U}}{(\dot{U}^t G \dot{U})^{1/2}}$$

et l'abscisse curviligne :

$$s = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} (\dot{U}^t G \dot{U})^{1/2} dt.$$

Examinons maintenant les dérivées secondes de r. Soient N la normale à la courbe (définie à partir de la dérivée de T comme nous l'avons vu plus haut), et n la normale à la surface. La dérivée de l'expression $\dot{r} = \dot{s}T$ (sur la courbe) peut s'exprimer par les deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{s}T + \dot{s}^2 kN & (15.52) \\ &= \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \frac{\partial r}{\partial u}\ddot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\ddot{v}. & (15.53) \end{aligned}$$

Le long de la normale à la surface, on a :

$$\ddot{r} \cdot n = \dot{s}^2 kN \cdot n = \dot{U}^t D \dot{U} \tag{15.54}$$

où k est la courbure de la courbe, et D est la matrice

$$D = \begin{pmatrix} n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \\ n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \end{pmatrix} \tag{15.55}$$

appelée deuxième forme fondamentale.

15.3.3 Courbures sur des surfaces

Introduisons maintenant les notions de courbures de surface. Contrairement au cas d'une courbe où l'on définit une courbure, plusieurs types de courbure peuvent être définis pour une surface.

Le vecteur tangent $\dot{r} = A\dot{U}$ et la normale à la surface n définissent un plan, dont l'intersection avec la surface est une courbe. On appelle courbure normale k_n de la surface dans la direction $A\dot{U}$ la courbure de cette courbe. C'est la longueur (signée) de la projection de kN sur n, et on a (figure 15.5) :

$$k_n = kN \cdot n \tag{15.56}$$

qui est donc positive si la courbe est tournée du côté positif de n et négative sinon.

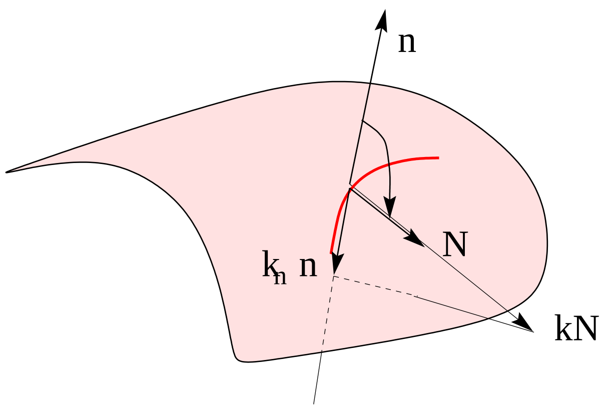

FIG. 15.5 – Courbe sur une surface, normale N à la courbe et normale n à la surface, courbure k de la courbe et courbure normale k_n de la surface dans la direction de la tangente à la courbe.

La courbure normale peut également être exprimée en fonction des formes fondamentales :

$$k_n = kN \cdot n = \frac{\ddot{r} \cdot n}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{U}^t D \dot{U}}{\dot{U}^t G \dot{U}}. \tag{15.57}$$

Les courbures principales k_1 et k_2 sont définies comme les valeurs minimale et maximale de k_n, et les directions associées sont appelées directions principales. On appelle point ombilic un point pour lequel $k_1 = k_2$ (c'est-à-dire que toutes les courbes sur la surface passant par ce point ont la même courbure).

Deux courbures particulières sont souvent utilisées, la courbure gaussienne définie par :

$$K = k_1 k_2 = \frac{|D|}{|G|}, \tag{15.58}$$

et la courbure moyenne :

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{15.59}$$

La courbure gaussienne est le déterminant de la différentielle de l'application de Gauss, et la courbure moyenne est proportionnelle à sa trace. Ces deux valeurs sont utilisées pour caractériser localement des surfaces, en reconnaissance d'objets 3D, etc.

Ces utilisations sont possibles car les courbures gaussienne et moyenne sont des propriétés intrinsèques de la surface et sont invariantes par changement de paramétrisation. En effet, soit une autre paramétrisation (u', v') de la surface, définie par la matrice de changement de paramétrisation P par rapport à (u, v) :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}.$$

Les matrices A, G et D deviennent alors :

$$A' = AP \quad G' = P^t G P \quad D' = P^t D P$$

et donc n, les directions et courbures principales, les courbures gaussienne et moyenne sont invariantes par changement de paramétrisation.

15.3.4 Une notation fréquente

Une autre notation, fréquemment rencontrée, consiste à écrire la première forme fondamentale sous la forme :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{15.60}$$

et la deuxième forme fondamentale sous la forme :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{15.61}$$

Les courbures principales sont alors les valeurs propres de :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

et les courbures gaussiennes et moyennes sont données par :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{LG + EN - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

15.3.5 Interprétations géométriques

Plusieurs mesures géométriques peuvent s'exprimer de manière simple en fonction de r et de ses dérivées. Ainsi, la longueur d'une courbe $r(u)$ entre les points de paramètres u_0 et u_1 est donnée par :

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \dot{s} du = \int_{u_0}^{u_1} |\dot{r}(u)| du. \tag{15.62}$$

Dans le cas d'une courbe plane, on peut calculer l'aire définie par la courbe entre deux points de paramètres u_o et u_1 et les segments joignant chacun de ces points à l'origine O (figure 15.6) par :

$$A = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} r(u) \wedge \dot{r}(u) du. \tag{15.63}$$

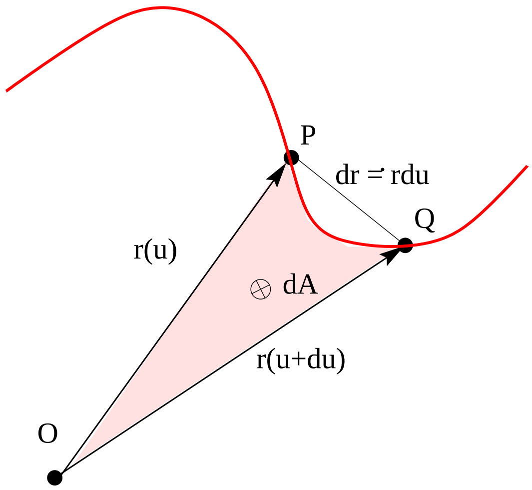

FIG. 15.6 – Le repère local et la courbure le long d'une courbe

Plaçons nous maintenant dans le cas d'une surface, et considérons le morceau de surface défini par le point A de paramètres (u, v), et les points $B(u + du, v)$, $C(u, v + dv)$ et $D(u + du, v + dv)$. La surface de ce morceau élémentaire est :

$$|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}| dudv = |G|^{1/2} dudv, \tag{15.64}$$

et donc la surface totale de S (obtenue pour des paramètres variant dans un ensemble R) est :

$$\int \int_R |G|^{1/2} dudv. \tag{15.65}$$

Le volume de la portion d'espace limitée par le morceau de surface et les segments joignant chacun des quatre points à l'origine O vaut :

$$\frac{1}{3} r \cdot (\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}) dudv \tag{15.66}$$

et donc le volume total défini par O et S vaut :

$$\frac{1}{3} \int \int_R r \cdot (\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}) dudv. \tag{15.67}$$

L'application de Gauss permet d'interpréter la courbure gaussienne. Soit un élément dS de la surface. Si l'on calcule les normales à la surface en tout point de dS, l'application de Gauss transporte dS sur un élément de surface dA de la sphère unité. La courbure gaussienne est alors le rapport de ces deux surfaces (figure 15.7) :

$$K = \frac{dA}{dS}. \tag{15.68}$$

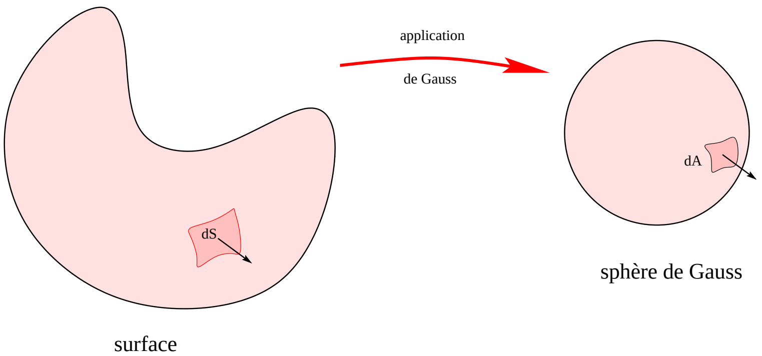

FIG. 15.7 – Application de Gauss : l'aire de surface est projetée sur la sphère unité. La courbure gaussienne de la surface est égale à $K = \frac{dA}{dS}$.

Le signe des courbures gaussienne et moyenne permet de classifier les surfaces (localement) [Besl et Jain, 1986]. On distingue ainsi :

- un surface elliptique, pour laquelle $K > 0$, le signe de H déterminant le sens dans lequel est tournée la surface par rapport à l'origine (figure 15.8) ;
- une surface hyperbolique, pour laquelle $K < 0$ (en forme de selle) (figure 15.9) ;
- une surface parabolique pour laquelle $K = 0$ (c'est-à-dire qu'une des deux courbures principales est nulle), et $H \neq 0$, le signe de H déterminant le sens dans lequel est tournée la surface (figure 15.10) ;
- une surface plane pour laquelle $K = H = 0$ (c'est-à-dire que les deux courbures principales sont nulles) (figure 15.11).

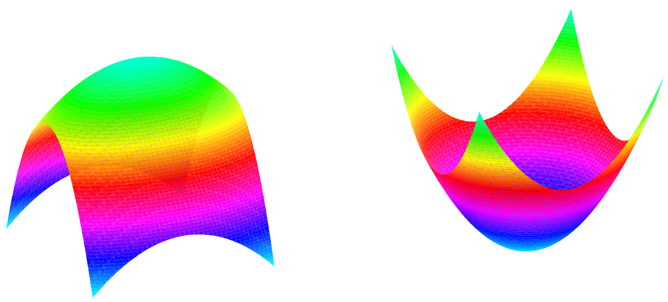

FIG. 15.8 – Surfaces elliptiques : $K > 0$; à gauche $H < 0$, à droite $H > 0$.

Considérons un cycle de points sur un morceau de surface elliptique ($K > 0$), auquel on donne un sens de parcours. Le cycle de points correspondants sur la sphère de Gauss, obtenu par l'application de Gauss,

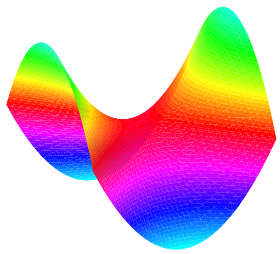

FIG. 15.9 – Surface hyperbolique : $K < 0$.

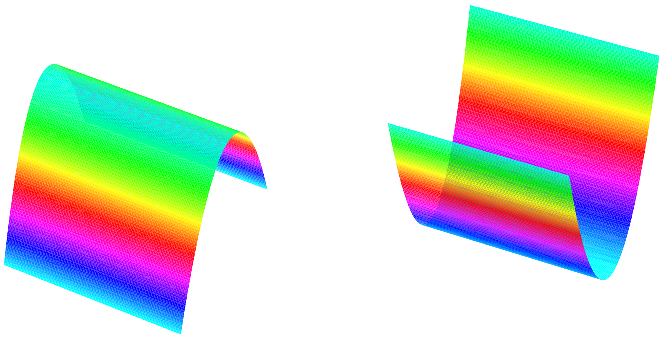

FIG. 15.10 – Surfaces paraboliques : $K = 0$ et $H \neq 0$; à gauche $H < 0$, à droite $H > 0$.

a le même sens. L'application de Gauss préserve donc l'orientation dans le cas d'une surface elliptique. Au contraire, dans le cas d'une surface hyperbolique ($K < 0$), le sens est inversé sur la sphère de Gauss.

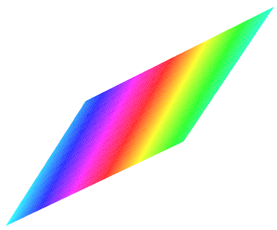

FIG. 15.11 – Surface plane : $K = H = 0$.

15.3.6 Principales méthodes de calcul des courbures

En général en traitement d'images et vision on ne connaît qu'un échantillonnage de la surface. Les principales méthodes de calcul des courbures se divisent en deux classes : les méthodes analytiques et les méthodes discrètes.

Les méthodes analytiques nécessitent de transposer les points échantillonnés sur la surface en une forme analytique, au moins localement. Le principe le plus courant consiste à approcher localement la surface par une surface paramétrée, une quadrique par exemple, dont on calcule les paramètres pour minimiser une fonction d'ajustement (moindres carrés typiquement). Le calcul des courbures peut alors se faire analytiquement, en appliquant directement les équations vues plus haut.

Donnons maintenant quelques exemples de méthodes discrètes, qui utilisent directement les points échantillonnés sur la surface :

- méthode par dérivation numérique : les dérivées sont calculées par différences finies entre points voisins afin de définir des équations approchées des équations analytiques ;
- méthode de dérivation de la normale : soient P et Q deux points proches sur la surface, et n_P et n_Q les normales à la surface en ces points, alors la courbure gaussienne est donnée par :

$$K = \sigma \frac{|n_P - n_Q|}{|PQ|} \tag{15.69}$$

  avec $\sigma = 1$ si $|PQ| < |(P + n_P) - (Q + n_Q)|$, et $\sigma = -1$ sinon ;
- calcul par déficit angulaire : pour calculer la courbure gaussienne en un point P, on triangule la surface autour de P, en construisant des triangles formés de P et de deux voisins P_i et P_{i+1} de P, dont on calcule l'angle θ_i en P et la surface S_i ; on a alors :

$$K = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{\frac{1}{3}\sum_i S_i}, \tag{15.70}$$

  cette équation correspondant à l'interprétation de K en termes d'application de Gauss.

15.3.7 Géométrie différentielle dans des volumes numériques

Dans le cas d'images volumiques $I(x, y, z)$, on peut calculer directement les deux formes fondamentales (et donc les courbures principales, gaussienne et moyenne) pour toute isosurface $I(x, y, z) = I_0$ sans exprimer cette surface explicitement. Pour cela, la surface est paramétrée par $u = x$ et $v = y$. La coordonnée z est alors une fonction implicite de u et v, notée $\Phi(u, v)$ et on a :

$$r(u, v) = (u, v, \Phi(u, v))^t. \tag{15.71}$$

Le théorème des fonctions implicites permet de relier les dérivées de Φ par rapport à u et v aux dérivées de l'image I par rapport à x, y et z :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{I'_x}{I'_z} \tag{15.72}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{I'_y}{I'_z} \tag{15.73}$$

où I'_x, I'_y, I'_z désignent les dérivée partielles de I par rapport a x, y et z respectivement. On a alors :

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{15.74}$$

et on peut alors calculer les coefficients des formes fondamentales :

$$E = \|\frac{\partial r}{\partial u}\|^2 = 1 + (\frac{\partial \Phi}{\partial u})^2 = \frac{{I'_x}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2} \tag{15.75}$$

$$F = \frac{I'_x I'_y}{{I'_z}^2} \tag{15.76}$$

$$G = \frac{{I'_y}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2} \tag{15.77}$$

$$L = \frac{2I'_x I'_z I''_{xz} - {I'_x}^2 I''_{zz} - {I'_z}^2 I'_{xx}}{H {I'_z}^3} \tag{15.78}$$

$$H^2 = \frac{{I'_x}^2 + {I'_y}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2} \tag{15.79}$$

etc.

En pratique, les dérivées de l'image se calculent de manière discrète, par exemple :

$$I'_x = \frac{\partial I}{\partial x}(x, y, z) = \frac{I(x+1, y, z) - I(x-1, y, z)}{2},$$

ou par convolution avec les dérivées d'un filtre gaussien ou de Deriche (on calcule ainsi les dérivées de l'image filtrée), ce qui permet d'avoir des dérivées moins sensibles au bruit de l'image.