Notes de Cours d'ALGEBRE LINEAIRE.

B. Landreau, D. Schaub
Département de Mathématiques
Université d'Angers

Introduction

L'algèbre linéaire est présente dans tout problème scientifique ne fût-ce que dans la résolution d'un système d'équations linéaires. Mais aussi la plupart des problèmes s'expriment, en première - et souvent très grossière - approximation en termes linéaires (graphes de fonctions, solutions approchées d'équations différentielles, etc...). On peut aussi évoquer - pour des géographes - la nécessité de repères ; un tel repérage se fait en fixant d'abord une origine, puis en choisissant deux directions : c'est ce que nous appellerons une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Note

Ce recueil est constitué des notes du cours d'Algèbre Linéaire de L1 MPCIE donné au 2e semestre de l'année universitaire 2014/2015. Il ne remplace évidemment pas un manuel comme on peut en trouver à la bibliothèque universitaire et ne prétend pas à l'exhaustivité. Malgré une relecture, des coquilles peuvent encore subsister ici ou là, merci de nous les signaler s'il y a lieu.

1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

1.1 Généralités

Nous ne nous occuperons que de travailler sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, même si nous pourrons, ici ou là, travailler sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Un ensemble E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ si E est muni*
• *d'une opération interne, notée $+$ ayant les propriétés suivantes, pour tous $v, v', v'' \in E$:*
(1) associativité : $v + (v' + v'') = (v + v') + v''$;
(2) commutativité : $v + v' = v' + v$;
(3) élément neutre : il existe $e \in E$ tel que $v + e = e + v = v$ (on le note 0) ;
(4) éléments symétriques : il existe $w \in E$ tel que $v + w = w + v = e$ (notant e par 0, on notera w par $-v$) ;
• *d'une multiplication par les réels ayant les propriétés suivantes, pour tous $v, v' \in E$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$:*
(5) $1 \cdot v = v$;
(6) $a \cdot (v + v') = a \cdot v + a \cdot v'$;

(7) $(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$ *;*
(8) $a\cdot(b\cdot(v) = (ab)\cdot v$.

Les éléments de E seront appelés *vecteurs*. Ceux de $\mathbb{R}$ sont appelés *scalaires*.

Exemples : 1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est muni d'une loi interne $+$, mais aussi d'une multiplication *externe* (ne pas confondre avec une multiplication *interne* comme dans la définition ci-dessus) avec les éléments $a \in \mathbb{R}$. Montrons certaines propriétés de "$\mathbb{R}$-espace vectoriel".

Faire la même chose pour $\mathbb{R}^n$ (avec n "petit"). On remarquera que tout ev (de dimension finie) est essentiellement de ce type.

2. L'espace des suites réelles est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. L'espace des matrices réelles à n lignes, m colonnes est un espace vectoriel (c'est en fait $\mathbb{R}^{nm}$).

4. L'espace $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on précisera les opérations).

5. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une variable sur $\mathbb{R}$, autrement dit l'ensemble des expressions formelles du type $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$ où $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, un espace vectoriel en le munissant d'une addition : $A(X)+B(X)$ est le polynôme obtenu en additionnant les coefficients des termes en X^i de $A(X)$ et de $B(X)$ en considérant que si un terme X^k n'apparaît pas dans A ou dans B, on peut considérer le coefficient comme nul. La multiplication de $A(X)$ par un réel λ consiste à multiplier tous les coefficients de $A(X)$ par λ.

Exercice 1.1 $\mathbb{R}$ *est-il un ev sur* $\mathbb{R}$ *?* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 1.2 *a) montrer qu'on peut munir* $\mathbb{R}^n$ *d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mathbb{C}$ *peut être muni d'une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

c) Montrer que $0\cdot v = 0$ *et que* $(-1)\cdot v = -v$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Dans le *plan* $\mathbb{R}^2$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, peut-on trouver des sous-ensembles F qui sont *stables* par addition et multiplication externe ? (autrement dit, tels que $v, v' \in F \Rightarrow v+v' \in F$ et $(v \in F, a \in \mathbb{R}) \Rightarrow a\cdot v \in F$?) Donner des exemples : dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{(0,0\}$, $F = \{(x,y); x=0\}$, $F = \{(x,y); x+y=0\}$, $F = \{(x,y); x+y=1\}$, $F = \{(x,y); x^2+y^2=0\}$, $F = \{(x,y); x^2+y^2=1\}$,...

Définition 1.2 *Un sous-ensemble, non vide,* F *d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel si*

(i) pour tous $v, v' \in F$, $v+v' \in F$ *;*

(ii) pour tout $v \in F$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$, $a\cdot v \in F$.

Remarque 1.1 *1. Tout espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de lui-même.*

2. Un sous-espace vectoriel F *d'un espace vectoriel* E *est un espace vectoriel (le montrer). Les opérations sur* F *sont en fait induites par les opérations sur* E.

Lemme 1.1 *Les conditions (i) et (ii) précédentes sont équivalentes à la conditions (iii) pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$*, et tous* $v, v' \in F$*,* $a \cdot v + b \cdot v' \in F$*.*

La preuve est immédiate.

Exercice 1.3 *a) Soient* $a, b \in \mathbb{R}$*, montrer que l'ensemble* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*, appelé "droite". Faire de même dans* $\mathbb{R}^3$ *pour parler de "plan". Qu'est une droite de* $\mathbb{R}^3$ *?*

b) Faire la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$*.*

c) Dans les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$*, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :* $F = \{(x, y, z); 2x+y+z = 0\}$, $G = \{(x, y, z); 3x-y+z = 3\}$, $H = \{(x, y, z); (2x+y+z)^2 = 0\}$.

Lemme 1.2 *Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Preuve : Démontrons le pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels. Soit donc F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $x, y \in F$, d'où, puisque F est un sev, $\lambda x + \mu y \in F$. De manière analogue, $x, y \in \mathbb{G} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in G$. D'où $\lambda x + \mu y \in F \cap G$. D'où le résultat. Pour un nombre quelconque de sev, la démonstration est similaire. $\square$

2 Familles de vecteurs génératrices, libres ; bases

Les notions abordées dans cette section sont centrales pour toute l'algèbre linéaire. Ce sont les notions de familles génératrices, de familles libres, et donc de *bases*, qui donnent tout son intérêt à l'algèbre linéaire.

2.1 Parties génératrices

Définition 2.1 *Etant donné un ensemble de vecteurs* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E*, on appelle combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathcal{V}$ *ou des vecteurs* $v_1, \ldots, v_n$ *toute expression de la forme* $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ *où* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *(éventuellement nuls).*

Exemple 2.1 *1. Soient* $e_1 = (1, 0)$ *et* $e_2 = (0, 1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$*. Tout vecteur* $v = (a, b)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *peut alors s'écrire comme combinaison linéaire de* e_1 *et* e_2*. En effet, clairement,* $v = ae_1 + be_2$*.*

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ *et les trois vecteurs* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$*. Alors tout vecteur* $v = (x, y, z)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *peut s'écrire* $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$*. Le vecteur* v *est donc combinaison linéaire de* e_1, e_2, e_3*. Comme c'est le cas pour tout vecteur de* $\mathbb{R}^3$*, on en conclut que la famille* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *engendre tout* $\mathbb{R}^3$*, on dira que c'est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 2.1 *Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments d'une famille de vecteurs* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *forme un sous-espace vectoriel de* E*.*

On appelle ce sous-espace vectoriel *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. On le notera $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. En particulier,

Définition 2.2 *Si Vect($v_1, \ldots, v_n$)= E, on dira que $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille génératrice ou un système de générateurs de E.*

Exemple 2.2 $\{1\}$ *engendre* $\mathbb{R}$ *;* $\{(1,0),(0,1)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^2$*. Qu'en est-il de* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ *?*

Exercice 2.2 *1. Montrer que, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles de vecteurs telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors Vect($\mathcal{A}$) est un sous-espace vectoriel de Vect($\mathcal{B}$).*

2. Montrer que si F est un sev de E, alors Vect(F)= F.

3. Montrer que, si V = Vect($v_1, \ldots, v_n$), V est le plus petit sev de E contenant $v_1, \ldots, v_n$. En déduire que

$$V = \bigcap_{\substack{W \text{ sev de} E \\ W \ni v_1, \ldots, v_n}} W.$$

Remarque 2.1 *En général, la réunion de 2 sev n'est pas un sev. Soient V et W deux sev d'un ev E. Alors, la réunion $V \cup W$ est un sev de E si et seulement si $V \subset W$ ou $W \subset V$ (exercice).*

Cette remarque conduit à la

Définition 2.3 *Soient V, W deux sev d'un ev E. Alors $V+W$ est le sous-espace engendré par V et W (autrement dit c'est le plus petit sev qui contient à la fois V et W).*

2.2 Familles liées, familles libres

Définition 2.4 *Une famille de vecteurs $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est linéairement dépendante ou liée s'il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0. \tag{1}$$

Autrement dit, s'il existe une combinaison linéaire "non triviale" des v_j qui est nulle.Une telle relation est une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs. On dit aussi que les vecteurs de $\mathcal{V}$ sont linéairement dépendants.

Dans le cas où il n'existe pas de relation de dépendance linéaire, on dit que la famille $\mathcal{V}$ est libre ou linéairement indépendante ou encore que les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ forment un système libre. On dit alors aussi que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Lemme 2.1 *Le famille $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre si et seulement si*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{2}$$

Remarque 2.2 *1. Par convention, on dira que la famille vide est libre.*

2. On notera aussi que la famille $\{0\}$ est liée.

Lemme 2.2 *La famille $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs v_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*

Preuve laissée en exercice.

Lemme 2.3 *Si la famille $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est liée, pour tout vecteur $w \in E$, la famille $\mathcal{V}' = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$ est liée. En particulier, toute famille qui contient le vecteur nul est liée.*

Preuve laissée en exercice.

2.3 Bases

Définition 2.5 *Un système de vecteur $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E s'il est à la fois libre et générateur de E.*

Proposition 2.1 *Si un espace vectoriel E est engendré par un système de n vecteurs, alors tout système de vecteurs de $n+1$ vecteurs de E est lié.*

Preuve : la démonstration se fait par récurrence sur n.

Traitons le cas $n = 1$. Dans ce cas, il existe un vecteur u tel que $E = \mathrm{Vect}(u)$. Soit alors n'importe quel système de deux vecteurs $\{v, w\}$. Comme $v \in E$, v peut s'écrire $v = \alpha u$, de même, $w = \beta u$. Si l'un de ces deux vecteurs, v, w était nul, le système $\{v, w\}$ contenant O serait lié (puisque n'importe quel système contenant le vecteur nul est lié). Auquel cas, le résultat est vrai. On peut donc supposer $v \neq 0$ et $w \neq 0$, d'où évidemment $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Mais clairement

$$\beta v - \alpha u = \beta(\alpha u) - \alpha(\beta u) = 0.$$

D'où une combinaison linéaire non triviale ($\alpha \neq 0$) entre v et w qui est nulle : donc $\{v, w\}$ est un système lié.

Supposons maintenant (hypothèse de récurrence) que, pour tout espace vectoriel E admettant un système de générateurs de $n-1$ vecteurs, tout système de n vecteurs de E est lié.

Considérons alors F un espace vectoriel admettant un système de générateurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ de n vecteurs et considérons un système de $n+1$ vecteurs $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Comme, pour tout $i = 1, \dots, n+1$, $v_i \in E$, on peut écrire $v_i = \lambda_{i1} u_1 + \cdots + \lambda_{in} u_n$. Mais, pour tout $i = 2, \dots, n+1$, le vecteur $w_i = \lambda_{in} v_1 - \lambda_{1n} v_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ car la différence élimine à chaque fois u_n. Nous avons donc n vecteurs $w_2, \dots, w_{n+1}$ dans l'espace vectoriel engendré par les $n-1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une combinaison linéaire non triviale

$$\alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_{n+1} w_{n+1} = 0.$$

En utilisant la définition de w_i, on peut réécrire cette relation qui donne :

$$\begin{aligned} \alpha_2(\lambda_{21} v_1 - \lambda_{1n} v_2) + \cdots + \alpha_{n+1}(\lambda_{n+1,1} v_1 - \lambda_{1n} v_{n+1}) &= \\ (\alpha_2 \lambda_{21} + \cdots + \alpha_{n+1,1} \lambda_{n+1,1}) v_1 - \alpha_2 \lambda_{1n} v_2 - \cdots - \alpha_{n+1} \lambda_{1n} v_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Comme on peut supposer que, au moins un des $\lambda_{in} \neq 0$ (sinon tous les vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ et le système est déjà lié par récurrence) et que les α_j ne sont pas tous nuls, la relation précédente est une relation de dépendance linéaire. Ce qui finit la preuve. □

Une conséquence importante est le

Théorème 2.1 *Si E admet une base formée de n vecteurs, alors toute base de E sera composée de n vecteurs.*

Preuve : Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$ deux bases de E. Alors, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ libre $\Rightarrow m \leq n$ et de même dans l'autre sens.

2.4 Dimension ; théorème de la base incomplète

Définition 2.6 *On dit qu'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ est de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.*

Dans toute la suite, on ne considérera que des espaces vectoriels de dimension finie, sauf mention expresse du contraire.

Proposition 2.2 *Un espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.*

Preuve : Si E est de dimension finie, alors E admet une famille génératrice $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Rappelons qu'alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Construisons un système libre de la manière suivante.

Soit $u_1 \neq 0$ un vecteur. Le système constitué $A_1 = \{u_1\}$ de ce seul vecteur est libre. Si $\mathrm{Vect}(u_1) = E$, ce système est libre et générateur, donc constitue une base de E.

Si $\mathrm{Vect}(u_1) \neq E$, alors, il existe $u_2 \in E$ tel que le système $\{u_1, u_2\}$ soit libre. Encore une fois, deux cas se présentent : soit $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = E$, auquel cas ce système constitue une base de E, soit $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subsetneqq E$, auquel cas, il existe un vecteur $u_3 \in E$ tel que le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit libre. Et on recommence pour construire ainsi $u_4, u_5, \ldots, u_t$. Le processus s'arrête parce que, chaque fois que le système libre construit n'engendre pas E, on peut rajouter un vecteur. Le nombre total de vecteurs qu'on peut ajouter est limité par n. Si donc, à un moment, on ne peut plus ajouter de vecteur, c'est que, nécessairement, le premier terme de l'alternative est vrai, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_s) = E$. Ce système constitue alors une base de E. Au passage, on note que $s \leq n$. □

Définition 2.7 *La dimension de E est le nombre de vecteurs (ou cardinal) d'une base de E (rappelons que toutes les bases ont même nombre d'éléments).*

Remarque 2.3 *Lorsque l'on parle de familles de vecteurs libres ou liées, l'ordre des vecteurs n'a pas d'importance (le montrer). Par contre, s'agissant de bases, on considérera que deux systèmes constitués des mêmes vecteurs, écrits dans un ordre différent, sont deux bases distinctes. C'est pourquoi, on préférera noter une base sous la forme $(v_1, \ldots, v_n)$ plutôt que $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Théorème 2.2 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, pour tout élément u de E, il existe un unique n-uplet de nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout i, λ_i est la i-ème coordonnée de u dans $\mathcal{B}$.

Preuve : Le fait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice assure l'existence des λ_i. La seule chose à montrer est donc l'unicité de ce n-uplet. Pour cela, supposons qu'il y ait deux tels n-uplets : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'une part, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ d'autre part.

On peut donc écrire $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$, d'où, en faisant tout passer dans un membre :

$$(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0.$$

Utilisant maintenant le fait que la famille $\mathcal{B}$ est libre, on en déduit que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i = \mu_i$. $\square$

Exemple 2.3 *On a* $\dim(\{0\}) = 0$ *;* $\dim(\mathbb{R}) = 1$ *et, plus généralement,* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^n = n$ *(le prouver en exhibant une base de chacun de ces espaces).*

Le théorème suivant a, de par ses applications, une importance primordiale :

Théorème 2.3 *de la base incomplète : Supposons E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, A' une partie génératrice finie de E, A une partie libre de E, $A \subset A'$. Alors, il existe une partie libre et génératrice (base) B de E telle que $A \subset B \subset A'$.*

Preuve : (peut être admis) Soient donc A une partie libre de E et A' une partie génératrice de E, $A \subset A'$.

Ecrivons $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ les vecteurs de A. Evidemment, $\forall i = 1, \ldots, s$, $v_i \in A'$.

Alors, soit tout vecteur de A' appartient à $\mathrm{Vect}(A)$, auquel cas $A' \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc $E = \mathrm{Vect}(A') \subset \mathrm{Vect}(A) \subset E$ et c'est fini.

Sinon, il existe un vecteur $w_1 \in A'$ tel que $w_1 \notin \mathrm{Vect}(A)$. Mais cela signifie que le système $A \cup \{w_1\}$ est libre. Nous avons donc construit un nouveau système libre B_0 tel que $A \subset B_0 \subset A'$.

On réédite alors le processus avec B_0 jouant le rôle de A. Autrement dit, soit $\mathrm{Vect}(B_0) = \mathrm{Vect}(A') = E$ et, en posant $B = B_0$, la question est résolue. Sinon, il existe un vecteur $w_2 \in A'$ tel que le système $B_1 = B_0 \cup \{w_2\}$ est libre.

On est sûr qu'au bout d'un nombre fini de pas, le processus s'arrête parce que, $s = card(A) \lneqq card(B_0) \lneqq card(B_1) \leq \dim(E) = n \leq card(A')$. $\square$

Proposition 2.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

i) Si $\mathcal{L}$ est un système libre de n vecteurs de E, alors $\mathcal{L}$ constitue une base de E.

ii) Si $\mathcal{G}$ est un système de générateurs de E constitué de n vecteurs, alors il constitue une base de E.

Preuve : i) Si $\mathcal{L}$ n'était pas une base, on pourrait la prolonger en une base dont le cardinal serait alors strictement supérieur à n, ce qui contredit le fait que la dimension de E est n.

ii) Si $\mathcal{G}$ n'est pas un système libre, on peut trouver un vecteur $v \in \mathcal{G}$ qui est combinaison linéaire des autres (pourquoi ?), on peut donc le retirer et le système $\mathcal{G} \setminus \{v\}$ est un système générateur de E. Alors, soit le nouveau système est libre, soit on peut encore retirer un vecteur et on poursuit jusqu'à ce que le système obtenu soit libre et générateur, donc une base. Mais, par construction, cette base aura strictement moins de n vecteurs, ce qui est impossible. □

Remarque 2.4 *On peut donc remarquer les équivalences pour un système de vecteurs $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ d'un espace vectoriel de dimension n :*

$\mathcal{V}$ est un système libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}$ est une famille génératrice $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}$ est une base de E.

On peut encore noter une façon équivalente de lire ces résultats :

Proposition 2.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

(1) Le cardinal d'une famille libre est $\leq n$.

(2) le cardinal d'une famille génératrice est $\geq n$.

2.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.8 *La dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est sa dimension comme espace vectoriel.*

Théorème 2.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $\dim F \leq \dim E$ et $\dim F = \dim E$ ssi $F = E$.*

Preuve : La dimension de F est le nombre d'éléments d'une base de F. Considérons une telle base $\mathcal{B}$. D'après le théorème de la base incomplète, s'agissant d'un système libre de vecteurs de E, on peut la prolonger en une base $\mathcal{B}'$ de E, le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}'$ est donc supérieur au nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$, d'où $\dim F \leq \dim E$.

Si $E = F$, le résultat est clair. Si $\dim F = \dim E$, alors F admet une base $(b_1, \ldots, b_n)$, donc un système libre de n vecteurs, mais alors ce système de vecteurs, étant un système libre de n vecteurs est aussi une base de E. Donc $E = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_n) = F$.

2.6 Rang d'une famille de vecteurs, forme échelonnée

Définition 2.9 *Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. On appelle rang de $\mathcal{F}$, on note $rg(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$, ie. $rg(\mathcal{F}) = \dim$ Vect($\mathcal{F}$).*

Proposition 2.5 *Si $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_r\}$, alors $rg(\mathcal{F}) \leq r$. De plus, $rg(\mathcal{F}) = r$ ssi $\mathcal{F}$ est une famille libre.*

Preuve : La famille $\mathcal{F}$ étant une famille génératrice, tout système de plus de r vecteurs est lié, d'où $rg(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \leq r$ (cf. Proposition 2.1).

Inversement, si $\mathcal{F}$ est une famille libre, $rg(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \geq r = card(\mathcal{F})$ par la proposition 2.4 (1), d'où l'égalité. S'il y a égalité, le système est nécessairement aussi libre, donc est une base, d'où le résultat. □

Exemple 2.4 • *Le rang du système $\{u\}$ est 0 si $u = 0$ et 1 sinon.*

• *Le rang du système $\{u, v\}$ est 0 si $u = v = 0$ et 1 si la famille est liée (en effet, dans ce cas, soit l'un des vecteurs est nul et on se ramène au cas d'un seul vecteur, soit les 2 vecteurs sont colinéaires, d'où Vect$(u, v) =$ Vect$(u) =$ Vect(v). Enfin si les 2 vecteurs sont linéairement indépendants, $\{u, v\}$ forme une base de Vect(u, v), donc* $\dim(\textit{Vect}(u, v)) = 2$.

Proposition 2.6 *Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.*

On ne change pas le sev engendré par $\mathcal{F}$ et donc pas $rg(\mathcal{F})$,

- si on remplace un vecteur v_i par λv_i ($\lambda \neq 0$) et en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$;

- si on supprime les vecteurs nuls éventuels ;

- si on intervertit deux vecteurs.

Preuve : Faisons-le pour $i = 1$ par simplicité (on peut toujours renuméroter pour ce ramener à ce cas).

Soit alors $v_1' = \lambda v_1 + \sum_{j=2}^{r} \mu_j v_j$ avec $\lambda \neq 0$. Je prétends qu'alors $\mathrm{Vect}(v_1', v_2, \ldots, v_r) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$. Comme, par construction, $v_1' \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$, l'inclusion $\mathrm{Vect}(v_1', v_2, \ldots, v_r) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ est claire. Mais, d'un autre côté, $v_1 = (1/\lambda)v_1' - \sum_{j=2}^{r} \mu_j v_j$, d'où $v_1 \in \mathrm{Vect}(v_1', v_2, \ldots, v_r)$, d'où l'inclusion inverse est vérifiée (au passage, on voit pourquoi on doit prendre $\lambda \neq 0$).

Par ailleurs, supprimer des vecteurs nuls ne change évidemment rien au sev engendré, de même que le fait d'intervertir 2 vecteurs. □

Les opérations de ce type s'appellent **opérations élémentaires**. En les réitérant, on peut aboutir à une nouvelle famille, libre, $\mathcal{F}' = \{v_1', \ldots, v_s'\}$, $s \leq r$, telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$ et donc $rg(\mathcal{F}) = s$ et $(v_1, \ldots, v_s)$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Pour cela, on élimine successivement chaque vecteur qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des précédents (cf. preuve du (ii) de la proposition 2.3).

Détermination pratique du rang d'un système de vecteurs

Définition 2.10 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E, de dimension n, et $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E. On peut alors écrire chaque vecteurs v_i, de manière unique, comme combinaison linéaire des e_i :*

$$v_i = a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + \cdots + a_{n,i}e_n$$

où $a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}$ sont les coordonnées du vecteur v_i dans la base $\mathcal{B}$. La colonne constituée de ces coordonnées est la représentation matricielle du vecteur v_i dans la base $\mathcal{B}$.

Faisant cela pour tous les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$, on obtient un tableau qu'on appellera la matrice représentant la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. *C'est un tableau, constitué de n lignes et p colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Notons que les opérations élémentaires sur les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ reviennent à faire des opérations sur les colonnes de la matrice représentant les v_i dans la base :

* multiplier une colonne par un réel non nul λ ;

* ajouter à une colonne une autre colonne multipliée par un réel ;

* permuter des colonnes.

on peut transformer une matrice A du type ci-dessus, donc le système de vecteurs $v_1, \dots, v_p$, pour aboutir à une matrice du type "triangulaire" suivant, en supposant que le premier élément d'au moins une des colonnes est non nul :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode pour y aboutir s'appelle **méthode du pivot de Gauss ou élimination de Gauss-Jordan**). On commence par choisir une colonne où l'élement de la 1ère ligne est non nul : cet élément est appelé **pivot** (en fait, en divisant, on peut toujours ramener tous les pivots à être égaux à 1).

En supposant que $a_{11} \neq 0$, on divise toute la 1ère colonne par a_{11} (remarquons qu'on ne change pas le sev engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_s$ puisque l'on s'est contenté de remplacer v_1 par le vecteur $v_1' = \frac{1}{a_{11}} v_1$ qui est colinéaire à v_1). Le nouvel élément (la première coordonnée de v_1' est maintenant 1. On le choisit comme *pivot*. On va ensuite modifier les colonnes 2 à s du tableau de la manière suivante : pour $i = 2, \dots, s$, on remplace v_i par la combinaison linéaire $v_i' = v_i - a_{1,i} v_1$. Ainsi, on ne change pas le sev engendré (on a $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_s) = \mathrm{Vect}(v_1', \dots, v_s')$), mais la première coordonnée de chacun des v_i', $i = 2, \dots, s$ est 0. autrement dit la première ligne du tableau représentant $v_1', \dots, v_s'$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

On a donc remplacé le tableau A de départ par le tableau

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & A' & \\ * & & & \end{array}\right).$$

Comme toute la première ligne de ce tableau est constituée de 0 (en dehors du premier élément), toute opération élémentaire sur les colonnes 2 à s ne modifiera pas la première ligne et constitue une opération élémentaire sur A'. On recommence alors le processus avec A' à la place de A et on aboutit à la forme "triangulaire" voulue.

En fait, plus généralement, on aboutit à une matrice dite *sous forme échelonnée colonne* où, par définition, une matrice est sous forme échelonnée colonne lorsque les colonnes sont rangées par le nombre croissant de zéros en début de colonne, que, dans toute colonne, le premier élément non nul est 1, cet élément sera appelé **pivot**, et que, dans le reste d'une ligne qui contient un pivot, il n'y a à sa droite que des zéros.

On peut aussi introduire une notion plus restrictive, celle de **forme échelonnée réduite**. On demande que cette matrice soit sous forme échelonnée colonne et que, dans toute ligne contenant un pivot, tous les éléments de la ligne sauf le pivot sont nuls.

A l'inverse de la forme échelonnée, cette dernière est indépendante du procédé utilisé : il y a unicité de la forme échelonnée réduite d'une matrice donnée. Pour obtenir cette forme, on poursuit le processus précédent pour n'obtenir que des zéros à gauche du pivot dans le reste de la ligne.

Le rang est alors donné par le nombre r de colonnes non nulles de la matrice échelonnée (réduite ou non) obtenue. Les vecteurs $v'_1, \ldots, v'_r$ dont les coordonnées correspondent à ces r premières colonnes constituent alors une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Exemple 2.5 *Soit $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $u = (3, 4, 1)$, $v = (2, 3, 2)$, $w = (5, 6, -1)$. Ecrivons la matrice M des coordonnées de ces 3 vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On met cette matrice sous forme échelonnée colonne par des opérations élémentaires successives de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que le rang de cette matrice est 2, donc la dimension de $P = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est 2. Il s'agit donc d'un plan de $\mathbb{R}^3$.

Un plan de $\mathbb{R}^3$ peut être donné par un système de générateurs, c'est ainsi que nous l'avons obtenu. On peut en extraire une base en choisissant 2 des vecteurs dont les coordonnées sont les colonnes (non nulles) de la matrice échelonnée, donc $u' = (1, 1, -1)$ et $v' = (0, 1, 4)$.

Mais un plan peut aussi être donné par une équation. Pour trouver une telle équation, on poursuit le processus précédent pour arriver à la forme échelonnée réduite. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation est obtenue alors en "lisant" la dernière ligne comme $z = -5x + 4y$ Pour le prouver, il suffit d'écrire qu'un vecteur de coordonnées (x, y, z) appartient à P si et seulement s'il est combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 0, -5)$ et $v_1 = v' = (0, 1, 4)$, ie. $(x, y, z) = \lambda(1, 0, -5) + \mu(0, 1, 4)$.

Ce qui se traduit par le système : qui donne une condition pour que le système ait une solution :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \mu \\ z & = & -5\lambda + 4\mu \end{array} \right. ,$$

d'où la condition $z = -5x + 4y$.

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$; équations linéaires

3.1 Sous-espace de $\mathbb{R}^2$

Nous avons déjà vu que les sev de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même. Listons les sev de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.1 *Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :*

- $\{0\}$*, il est de dimension 0*
- *les droites vectorielles, càd. les sev pouvant être engendrés par un seul vecteur non nul, Vect(u), où $u \neq 0$; ils sont de dimension 1 ;*
- $\mathbb{R}^2$ *qui est de dimension 2.*

Preuve : Les trois types proposés sont bien des sev. Il suffit alors de montrer que si F est un sev qui contient strictement une droite vectorielle, il est nécessairement $\mathbb{R}^2$. Or, si F contient la droite $\mathrm{Vect}(u)$ ($u \neq 0$), cela signifie qu'il existe $v \in F$, $v \notin \mathrm{Vect}(u)$. Mais alors le système $\{u, v\}$ est libre, donc $\dim \mathrm{Vect}(u, v) = 2$, donc $\mathrm{Vect}(u, v) \subset F \subset \mathbb{R}^2$ et, par égalité des dimensions, ces trois espaces sont égaux.

3.2 Sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Proposition 3.2 *Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :*

- $\{0\}$*, de dimension 0 ;*
- *les droites vectorielles, càd. les sev pouvant être engendrés par un seul élément non nul non, ils sont de dimension 1 ;*
- *les plans vectoriels ; ils peuvent être engendrés par une famille génératrice de 2 vecteurs non colinéaires ; la dimension en est 2 ;*
- $\mathbb{R}^3$*, qui est de dimension 3.*

Preuve : les 4 types proposés sont bien des sev.

Tout sev non réduit à $\{0\}$ admet une base constituée de 1, 2 ou 3 vecteurs (pourquoi ?). Si F admet une base constitué de 3 vecteurs, il est de dimension 3, donc égal à $\mathbb{R}^3$. Soit donc F un sev muni d'une base de 2 vecteurs : il est de dimension 2 et ne peut être engendré par un seul vecteur, nous sommes donc dans le cas d'un plan vectoriel. Si F admet une base constituée d'un seul vecteur, il est de dimension 1 et nous sommes dans le cas des droites vectorielles. □

Exercice 3.1 *1. Tracer dans $\mathbb{R}^2$ le sev V engendré par le vecteur $v = (1, 1)$, le sev W, engendré par le vecteur $w = (1, 3)$. Quelle est l'intersection $V \cap W$? Quelle est la réunion $V \cup W$? Quelle est la somme $V + W$?*

2. On considère les trois vecteurs $u = (1, 0)$, $v = (1, 1)$, $w = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Représenter les droites engendrées par chacun de ces vecteurs. Montrer que ces vecteurs sont deux à deux non colinéaires. Le système $\{u, v, w\}$ est-il libre ?

3. Tracer dans $\mathbb{R}^3$, le sev U engendré par $u = (1, 1, 1)$ et le sev V engendré par $v = (1, 0, 1)$. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Considérer le sev P engendré par u et v. De quelle dimension est-il ?

Soit à présent, Q les sev engendré par les vecteurs $u' = (1, -1, 1)$ et $v' = (0, 0, 1)$. Quelle est sa dimension ? Tracer l'intersection $P \cap Q$.

3.3 Equations linéaires

Définition 3.1 *On appelle équation linéaire aux variables $x_1, \ldots, x_n$ une équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Une collection de r équations linéaires simultanées dans les variables $x_1, \ldots, x_n$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \cdots + a_{r,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

est un système de r équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$.

Proposition 3.3 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.*

i() L'ensemble

$$F = \{x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \text{ tq. le } n\text{-uplet } (x_1, \ldots, x_n) \text{ vérifie } (S)\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E peut être défini par un système d'équations linéaires.

Preuve : (i) se vérifie immédiatement pour une équation, puis on utilise le fait qu'une intersection de sev est un sev.

(ii) C'est une conséquence du théorème de la base incomplète. En effet, soit $FubsetE$ un sev et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de F (où $\dim F = r$). On peut alors prolonger $\mathcal{B}$ en une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E par $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Si on désigne par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur $v \in E$, F est l'ensemble

$$F = \{v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

F est donc bien défini par un système linéaire (de $n - k$ équations qui ici sont triviales).

3.4 Résolution des systèmes linéaires

On veut résoudre le système linéaire (S) d'équations

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \cdots + a_{r,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour cela, la méthode, dite du pivot de Gauss, ou de l'échelonnement, consiste à mettre la matrice $A = (a_{ij})$ sous forme échelonnée ligne.

Une matrice est sous forme échelonnée ligne lorsque, pour toute ligne i, tous les éléments de la ligne dont l'indice de colonne est $< i$ sont nuls et si le premier élément non nul de cette ligne est 1. Cet élément est appelé **pivot**.

On peut de même que pour les colonnes définir une notion de forme échelonnée réduite ligne en demandant que tous les éléments de la colonne au-dessus d'un pivot soient nuls.

Commençons par un exemple, puis on montrera que, en général, on ne change pas l'ensemble des solutions d'un système par les opérations, dites opérations élémentaires sur les lignes, qui permettent d'échelonner la matrice.

Exemple 3.1 *On cherche à déterminer le sev de $\mathbb{R}^5$ satisfaisant au système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} (L_1) & x+y \quad\quad +t+u = 0 \\ (L_2) & x+y+z+2t+2u = 0 \\ (L_3) & x+y+3z+4t+4u = 0 \end{cases}$$

où on a noté $L1, L2, L3$ les lignes.

Remplaçons ce système par celui obtenu en conservant la première ligne et en remplaçant la deuxième par $L_2' = L_2 - L_3$ et le troisième par $L_3' = L_3 - L_1$, ce qui donne

$$\begin{cases} (L_1' = L_1) & x+y \quad\quad +t+u = 0 \\ (L_2') & z+t+u = 0 \\ (L_3') & 3z+3t+3u = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne est 3 fois la deuxième, on n'a donc pas à la répéter. Le système devient alors un système de é équations à 3 inconnues qui a pour solutions (aucune condition ne limite y, t, u) :

$$\begin{cases} x = -y-t-u \\ z = -t-u \end{cases}$$

On obtient alors 3 vecteurs du sev en faisant $y = 1, t = u = 0$, $v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, puis $y = u = 0, t = 1$, $v_2 = (-1, 0-1, 1, 0)$, et $y = t = 0, u = 1$, $v_3 = (-1, 0, -1, 0, 1)$. Clairement, ces vecteurs forment une famille génératrice du sev puisque, pour tout vecteur v du sev, ses coordonnées vérifient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

autrement dit $v = yv_1 + tv_2 + uv_3$.

On peut facilement vérifier que ces trois vecteurs forment une base du sev (par exemple en échelonnent - par colonne - la matrice de leurs coordonnées).

On constate alors que la dimension du sev F est alors $\dim F = \dim \mathbb{R}^5 - 2 = 3$ où 3 est le nombre d'équations indépendantes (obtenues après échelonnement).

Proposition 3.4 *On ne change pas l'ensemble F des solutions d'un système (S) d'équations linéaires en lui appliquant les opérations élémentaires sur les lignes :*

- multiplier une équation par une constante non nulle

- ajouter à une équation une autre équation multipliée par un scalaire (ce qui permet aussi d'éliminer les lignes identiques !)

- permuter deux équations.

Le nombre d'équations non triviales (autrement dit, ne s'écrivant pas $0 = 0$*) d'un système obtenu après échelonnement est appelé le rang* $rg(S)$ *du système. On a* $\dim F = \dim E - rg(S)$.

Preuve : admis (on formalise le constat fait dans l'exemple ci-dessus). En réalité, les opérations 1 et 3 sont évidentes. Quant à remplacer une ligne par elle-même à qui on ajoute un multiple d'une autre ligne, il est bien clair qu'on récupère le même système puisque, par un procédé inverse on peut revenir au système initial. Ces opérations permettent de ramener la matrice à une matrice échelonnée ligne.

Pour déterminer une base, dans le cas, général, on utilise les k équations restantes du système échelonné. Cela permet d'exprimer k variables en fonction des $n - k$ autres qu'on prend comme paramètres (on part du bas et on remonte). La famille obtenue est nécessairement libre (voir le cas de l'exemple).

Remarque 3.1 *Un sev de dimension* k *dans un ev de dimension* n *est déterminé par* $n - k$ *équations indépendantes. En particulier, un sev déterminé par une seule équation non triviale est de dimension* $n - 1$.

3.5 Equations d'un sous-espace défini par une famille génératrice

On se pose maintenant la question inverse. On part d'un sev déterminé par une famille génératrice et on veut déterminer F à l'aide d'un système d'équations linéaires, ce qui, on l'a vu plus haut, est toujours possible.

En fait, on peut procéder empiriquement ou de façon systématique. Empiriquement, si le sev F est engendré par la famille $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_s\}$, tout vecteur de F peut s'écrire

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_s x_{1s} \\ \cdots & & \cdots \\ x_n & = & \lambda_1 x_{n1} + \cdots + \lambda_s x_{ns} \end{array} \right.$$

De tels $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ n'existent pas toujours : pour un vecteur $v \in E$ qui n'est pas dans F, il n'en existe pas. Pour que ceux-ci existent, il faut certaines relations entre les coordonnées de v qui expriment que $v \in F$. Ces relations sont obtenues en éliminant les λ_i entre les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de v. Dans le cas où $F = E$, il n'y a pas de telles conditions entre les coordonnées de v.

Exemple 3.2 *Considérons le sev* F *de* $\mathbb{R}^3$ *déterminé par les deux vecteurs* $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 4)$. *On veut déterminer la(es) équation(s) de* F.

Ecrire que $v = (x, y, z)$ *appartient à* F *se traduit par*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda_1 \\ y & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z & = & 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & x \\ \lambda_2 & = & y - 2x \\ z & = & 3x + 4(y - 2x) = -5x + 4y \end{array} \right.$$

D'où une condition qui doit être vérifiée pour que le système ait des solutions, l'équation : $5x - 4y + z = 0$. *Remarquons que, pour n'importe quel triplet* (x, y, z) *qui vérifie cette condition,* λ_1 *et* λ_3 *sont déterminés par le triplet.*

Dans cet exemple, il s'agit de 2 vecteurs (linéairement indépendants) dans un espace de dimension 3, on peut donc raisonnablement prévoir qu'il y aura une relation entre les coordonnées.

Une démarche plus systématique consiste à mettre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ sous forme échelonnée **réduite**. Sous une telle forme échelonnée réduite, on peut *lire* les équations comme étant les dernières lignes de la matrice. Voyons la pratique de cette méthode sur l'exemple ci-dessus :

Exemple 3.3 *1. La matrice des coordonnées des vecteurs* v_1, v_2 *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne "se lit" $z = -5x + 4y$.

2. Faisons un exemple plus élaboré : on se donne 3 vecteurs v_1, v_2, v_3 *dans* $\mathbb{R}^4$ *(a priori si les 3 vecteurs étaient indépendants, on obtiendrait une seule relation). On prend* $v_1 = (1, 1, 3, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (2, 3, 3, 1)$. *On met sous forme échelonnée réduite. On obtient*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Applications linéaires

4.1 Définition et premières propriétés

Rappelons qu'une *application* $f : E \to F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément $x \in E$ un élément *et un seul* $y \in F$.

En termes de "structures", seules sont *intéressantes* les applications qui, en un sens à préciser, *préservent la structure.*

Dans notre cas, si E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{R}$, pour qu'une application présente un intérêt, il faut que l'image de la somme de 2 éléments soit la somme de leurs images et que l'image du produit d'un vecteur $v \in E$ par un scalaire $a \in \mathbb{R}$ soit le produit de a par l'image de v par f. Précisément :

Définition 4.1 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$. *Une application* $f : E \to F$ *est linéaire si*

(1) pour tous $u, v \in E$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ *;*

(2) pour tout $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $u \in E$, $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$.

Remarque : les 2 conditions peuvent être groupées en une seule (3) pour tous $a, b \in k$ et tous $u, v \in E$, $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$.

Propriétés Si $f : E \to F$ est linéaire, alors
(i) $\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u)$;
(ii) $f(0) = 0$;
(iii) $\forall u_1, \ldots, u_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$.

Les preuves sont laissées en exercice.

Exemple 4.1 *1) Id_E, projections, $(x, y) \mapsto (y, x)$ sont des applications linéaires.*
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ est linéaire ;
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est linéaire ;
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire.

Vocabulaire

• Une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même est appelé *endomorphisme*.

• Une application linéaire bijective d'un espace vectoriel dans lui-même est un *isomorphisme*. On dit aussi alors que E et F sont isomorphes.

• Un endomorphisme bijectif s'appelle *automorphisme*.

• On notera par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Exercice : montrer qu'on peut munir $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Exercice 4.1 *a) Trouver toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.*

b) les applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles linéaires ? $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 3x$, $f_3(x) = x^2 + x$, $f_4(x) = |x|$, $f_5(x) = \sin x$.

b) Les applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles linéaires ? $f((x, y)) = 0$, $g((x, y)) = 1$, $h((x, y)) = x + 2y$.

d) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (2x + y, 3y)$ est-elle linéaire ?

e) Que pensez-vous des applications suivantes : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (ax+by, cx+dy)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x, y) = (ax+by, cx+dy, ex+fy)$.

Remarque 4.1 *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de toutes les applications linéaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vers le $\mathbb{R}$-espace vectoriel F peut-être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ par*

• *addition : $f + g : E \to F$ telle que $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ pour tout $v \in E$;*

• *multiplication externe : $a \cdot f : E \to F$ telle que $(a \cdot f)(v) = a \cdot f(v)$ pour tout $a \in k$ et $v \in E$.*

Cas particulier de $F = \mathbb{R}$.

Définition 4.2 *Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans son corps de base $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur lui-même) est appelée **forme** linéaire. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est noté E^* et appelé espace vectoriel **dual** de l'espace vectoriel E.*

Proposition 4.1 *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors les applications "coordonnées" $pr_i : E \to \mathbb{R}$ définies par $pr_i(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_i$ sont linéaires.*

Le preuve est un exercice facile.

Proposition 4.2 *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors toute forme linéaire sur E, $f : E \to \mathbb{R}$, est définie par les n nombres réels (ou le n-uplet) $a_1 = f(e_1), \ldots, a_n = f(e_n)$. On traduit ce fait par la phrase : f est déterminée par ses valeurs sur une base.*

Preuve : Soit f une forme linéaire et posons, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $a_i = f(e_i)$. Alors, par linéarité, pour un vecteur $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a $f(v) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. Inversement, la donnée de $a_1, \ldots, a_n$ permet de définir, de manière unique, une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ par, pour tout v E, qui s'écrit $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(v) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. $\square$

Plus généralement,

Proposition 4.3 *Toute application linéaire est définie par ses valeurs sur une base.*

Preuve : qu'est-ce que cela signifie ? Considérons $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Je prétends qu'alors il suffit de connaître les seules images des éléments de la base pour déterminer entièrement f.

En effet, soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur quelconque de E et soient, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $b_i = f(e_i) \in F$. Alors $f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Autrement dit, lorsque l'on connaît les images $b_i \in F$ des e_i, on connaît l'image par f de tout vecteur $x \in E$. Et ceci détermine f de manière unique ! $\square$

Remarque 4.2 *Les b_i sont des vecteurs de F, par conséquent, en choisissant une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de F, on peut aussi écrire les b_i dans cette base : $b_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} e'_j$. A f sont donc ainsi associés $m \times n$ nombres réels, les α_{ij}, qu'on peut écrire sous forme d'un tableau à m lignes et n colonnes (une matrice !) en l'écrivant*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

En fait, on remarque que, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, la i-ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ (ou encore est la représentation de $f(e_i)$ dans cette base). Ce tableau à m lignes et n colonnes détermine f de manière unique.

Remarquons encore que, en composant, pour tout $j = 1, \ldots, m$, f avec la j-ème projection $F \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y_j$, on obtient une forme linéaire $f_j : E \to F \to \mathbb{R}$ qui donne la j-ème coordonnée de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. La donnée de f génère donc m formes linéaires f_j et inversement, la donnée de m formes linéaires f_j permet d'obtenir une application linéaire f en considérant que les $f_j(x)$ sont les coordonnées de f dans une base de F.

Rappelons que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, on peut les *composer* pour en faire une application, notée $g \circ f$ de E dans G définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}.$$

Lemme 4.1 *La composée $g \circ f$ de deux applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est une application linéaire de E vers F.*

La preuve est laissée en exercice.

Exemple 4.2 *Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire et soient, pour $i = 1, \dots, q$, les applications $p_i : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ qui au q-uplet $(y_1, \dots, y_q)$ associe le réel y_i. Alors, pour tout $i = 1, \dots, q$, la composée $f_i = p_i \circ f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ qui à $(x_1, \dots, x_p)$ associe le réel $(p_i(x_1, \dots, x_p)$ est une forme linaire sur $\mathbb{R}^p$.*

Autrement dit : f définit q formes linéaires $f_1, \dots, f_q$ sur $\mathbb{R}^p$. Réciproquement, q formes linaires $g_1, \dots, g_q$ définissent une application linaire $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ par

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, g_q(x_1, \dots, x_p)).$$

Lemme 4.2 *f est linéaire si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, q$, f_i est linéaire.*

La preuve immédiate est laissée en exercice.

On peut étendre ce qui précède à des espaces vectoriels E, F de dimensions finies p, q quelconques et $f : E \to F$ en ramenant E et F à des bases, ce qui, comme nous le verrons plus loin, revient à considérer E et F comme $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

Soit toujours E un espace vectoriel. On note $\mathrm{Id}_E : E \to E$ l'application identité de E qui à tout vecteur $x \in E$ associe x lui-même. C'est évidemment une application linéaire.

4.2 Noyau - Image. Surjectivité, injectivité

Faisons d'abord quelques rappels.

• une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est *injective* si $\forall v, w \in E,\ f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$.

Exercice : Faire quelques dessins de "patatoïdes" pour illustrer ce phénomène.

• une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est *surjective* si tout élément de F peut s'écrire comme image d'un élément de E (ce qu'on traduit généralement par : pour tout $w \in F$, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$).

Exercice : illustrer la notion par des exemples.

• une application $f : E \to F$ est *bijective* si elle est, à la fois, injective et surjective.

Exercice : donner des exemples et contre-exemples.

Définition 4.3 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.*

*- Pour tout sev G de E, on définit l'*image *de G par f comme*

$$f(G) = \{y \in F\ ;\ \exists x \in G \text{ avec } f(x) = y\}.$$

*- Pour tout sev H de F, on définit l'*image réciproque *de H par f comme*

$$f^{-1}(H) = \{x \in E;\ f(x) \in H\}.$$

- Cas particulier : lorsque $H = \{0\}$, l'image réciproque est le sous-ensemble, noté

$$\ker(f) = \{v \in E; f(v) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f (la notation vient de l'anglais "kernel").

Exercice : montrer que tous les sev définis ci-dessus sont des sev de l'espace vectoriel E ou de F qui les contient.

Proposition 4.4 *(i) Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0\}$.

(ii) Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve : (i) Supposons f injective et $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0 = f(O)$, d'où, par définition $x = 0$. Inversement, si $\ker(f) = \{0\}$, supposons que $f(x) = f(x')$, d'où $0 = f(x) - f(x') = f(x - x')$, càd. $x - x' \in \ker(f) = \{0\}$, donc $x - x' = 0$ ou encore $x = x'$.

(ii) clair. $\square$

Notons que pour calculer le noyau d'une application linéaire, on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$ qui se traduit, lorsque l'on fixe des bases de E et de F par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Exemple 4.3 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $v = (x, y, z) \mapsto v' = (x' = x + z, y' = y + z, z' = x + z)$. Rappelons qu'on peut considérer (x, y, z) et (x', y', z') comme des triplets, mais aussi comme les coordonnées de v et de v' dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Question : f est-elle injective, surjective, bijective ?

On commence par calculer le noyau de f :

On cherche donc l'ensemble des $v = (x, y, z)$ tels que $f(v) = 0$, ce qui se traduit par le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+z = & = 0 & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -z \\ z = & = z & \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, y, z) = z(-1, -1, 1).$$

Le noyau est donc engendré par le vecteur $(-1, -1, 1)$.

Pour déterminer l'image (soit par des équations, soit par une base), on utilise les vecteurs $f(e_1) = (1, 0, 1)$, $f(e_2) = (0, 1, 0)$, $f(e_3) = (1, 1, 1)$ qui forment un famille génératrice de $f(\mathbb{R}^3)$ et on cherche le rang de cette famille de la façon habituelle. On en déduit aussi des équations.

Remarque 4.3 *Soit $f : E \to E$ une application linéaire d'un ev E dans lui-même (on parle d'endomorphisme) et G un sev de E. En général, pour $x \in G$, il n'y a aucune raison pour que $f(x) \in G$. Mais, si, pour tout $x \in G$, $f(x)$ appartient à G, on dit que G est stable par f. Quand ceci est vrai, la restriction de f à G devient une application de G dans lui-même. On peut se servir de cette remarque pour ramener l'étude de l'espace sur lequel f agit à l'étude de $f_G : G \to G$ avec $\dim G < \dim E$.*

Proposition 4.5 *Si $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, il existe une application linéaire $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.*

Preuve : voir feuille de TD no 4.

Définition 4.4 *L'application g de la proposition ci-dessus est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.*

Note Si $f : E \to F$ est une application (linéaire) quelconque, on aura soin de ne pas confondre la notation ci-dessus avec la notation $f^{-1}(H)$ où H est un sev de F. Dans le cas où f n'est pas bijective, il n'existe pas d'application réciproque à f, mais la notation $f^{-1}(H)$ a bien un sens.

4.3 Théorème du rang

Définition 4.5 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f, on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f, ie. $rg(f) = \dim f(E)$.*

Une conséquence immédiate de cette définition est que f est surjective ssi $rg(f) = \dim F$.

Théorème 4.1 ***(th. du rang)*** *Soit $f : E \to F$ une application linéaire (E étant nécessairement de dimension finie !), alors*

$$\dim \ker(f) + rg(f) = \dim E.$$

Preuve : Prenons une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\ker(f)$ et prolongeons-la en une base $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ de E.
Alors la famille $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ engendre l'image $f(E)$ (facile à vérifier). Je prétends que le système $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ est libre. En effet : $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0$ implique, par linéarité, que $f(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i) = 0$, d'où $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in \ker(f)$. Or, nous avons une base de $\ker(f)$ qui est $(v_1, \ldots, v_k)$; on peut donc écrire $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$. En faisant tout passer dans le premier membre, on obtient $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0$ ce qui implique, du fait que les v_i forment une base de E que tous les μ_i (et aussi les λ_i) sont nuls. Le système $\{f(v_{k+1}, \ldots, f(v_n)\}$ est donc libre et générateur, il forme donc une base ; d'où $\dim f(E) = n - k = \dim E - rg(f)$. $\square$

Corollaire 4.1 *Soit f une application linéaire de E dans F telle que $\dim E = \dim F$, alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.*

Les preuves sont des conséquences immédiates du théorème. En effet, f injective $\Rightarrow$ $\dim \ker(f) = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim E = \dim F \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Rightarrow f$ surjective $\Rightarrow \dim \ker(f) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim F = 0$. $\square$

Conséquences :

* Deux espaces vectoriels (de dimension finies) isomorphes ont même dimension.
* Si $f : E \to F$ est une application linéaire injective, alors $\dim E \leq \dim F$.

* Si $f : E \to F$ est une application linéaire surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.

Enonçons encore un théorème qui dit essentiellement que tout espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) *"est"* $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). En fait, "est" signifie ici que E est en bijection linéaire avec $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

Théorème 4.2 *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Preuve : Si E est de dimension n, cela signifie qu'il existe une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E. Soit alors $u : E \to \mathbb{R}^n$ l'application qui à v_i associe le i-ième vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (une telle application linéaire en vertu du résultat qui dit qu'une application linéaire est définie par ses valeurs sur une base).

Il est facile de voir que cette application est bijective. En effet, tout $y \in k^n$ peut s'écrire $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha_1 u(v_1) + \cdots + \alpha_n u(v_n) =$(par linéarité)$u(\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n) \in \Im(u)$; donc u est surjective. D'un autre côté, montrons que le noyau de u est réduit à $\{0\}$ ie. $\ker(u) = \{0\}$. Soit donc $x \in \ker(u)$ càd. $u(x) = 0$. Mais x peut s'écrire $x = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, d'où $0 = u(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i u(v_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$. Mais le système de vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$ étant une base est, en particulier, libre, d'où tous les $\beta_i = 0$, donc $x = 0$. $\square$

Exemple 4.4 *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m. Montrer que, après choix d'une base $\mathcal{A}$ de E et d'une base $\mathcal{B}$ de F, $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{m \times n}$.*

4.4 Applications : formes linéaires, homothéties, projections, symétries

Rappelons qu'une forme linéaire est une application Linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, noté E^* est appelé *espace dual de E*.

Remarquons que d'après le dernier exemple du §précédent, il est de dimension n aussi.

Un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - 1$ est appelé *hyperplan* de E. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan est bien sûr un plan ; dans $\mathbb{R}^2$, il s'agit de droites.

Proposition 4.6 *A toute forme linéaire non nulle $f \in E^*$ sur un espace vectoriel E, de dimension ≥ 2, on peut faire correspondre un hyperplan de E : à f on fait correspondre l'hyperplan* $\ker(f)$.

Preuve : Nécessairement $\ker(f) \neq \{0\}$. Sinon f est injective, d'où $\dim E \leq \dim \mathbb{R} = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim E \geq 2$.

Mais, l'image $\mathrm{Im}(f)$, étant un sev de $\mathbb{R}$ est ou $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$, donc, comme $f \neq 0$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (f est donc surjective), d'où par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = \dim E - 1$; autrement dit $\ker(f)$ est un hyperplan de E. $\square$

Par ailleurs, soient $f, g \in E^*$, non nulles, et supposons $\ker(f) = \ker(g)$. Soit alors $e \in E$, $e \notin \ker(f)$ un vecteur. Alors f et g sont entièrement déterminés par les valeurs

$a = f(e)$ et $b = g(e)$ respectivement. Soit $c = a/b$ (nécessairement $b \neq 0$). Alors, on a $f = cg \in E^*$. Autrement dit, comme *vecteurs* de E^*, f et g sont colinéaires.

On peut aussi spécifier une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors, une forme linéaire $f \in E^*$ est déterminée par les n valeurs $a_1 = f(e_1), \ldots, a_n = f(e_n)$ et $\ker(f)$ est déterminé par l'équation linaire $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où on note par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{E}$, ie.

$$\ker(f) = \{x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \ ; \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Exercice 4.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons les n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ définies par $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, symbole de Kronecker (ie. $\delta_{ij} = O$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). Montrer que $f_1, \ldots, f_n$ forme une base de E^*, qu'on appellera base duale de la base $\mathcal{E}$.*

Quels liens y a-t-il entre les coordonnées d'un vecteur x dans cette base et les f_j ? Inversement, lien avec les coordonnées d'une forme linaire dans la base duale ? (On remarquera que si $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, on a $x_i = f_i(x)$ et si $g = \sum_{i=1}^n y_if_i$, on a $y_i = g(e_i)$).

L'*homothétie de rapport* $k \in \mathbb{R}$ d'un espace vectoriel E est l'endomorphisme qui à tout vecteur $x \in E$ fait correspondre le vecteur kx. C'est clairement, pour $k \neq 0$ un isomorphisme. Quel est son inverse ?

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Considérons une base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_r\}$ de F. On peut donc la prolonger en une base $\{a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n\}$ de E.

L'application linéaire qui à tout vecteur $x = \lambda_1a_1 + \cdots + \lambda_na_n$ associe le vecteur $y \in F$ défini par $y = \lambda_1a_1 + \cdots + \lambda_ra_r$ est une *projection* (de E sur F).

En fait, on peut présenter cela différemment de manière plus intrinsèque, càd. sans faire référence à une base. Etant donné F, il existe un sous-espace G de E tel que :

1. $E = F + G$;
2. $F \cap G = \{0\}$.

(Exercice : le démontrer : pour cela, on peut prendre une base $\mathcal{F}$ de F et la *prolonger* en une base de E, le sev G est alors le sous-espace engendré par les vecteurs qui prolongent $\mathcal{F}$; on remarque ainsi que G n'est pas uniquement déterminé par F !!)

On dit alors que E est la **somme directe** de F et G. On dit aussi que les sous-espaces F et G sont **supplémentaires**.

Exercice 4.3 *Montrer que tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire, de* ***manière unique*** *$x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$.*

Montrer que la projection définie précédemment n'est autre que l'application qui à x associe l'unique $y \in F$ tel que $x = y + z$.

On dira que cette application est la projection de E sur F parallèlement à G.

Pour ce qui est des différentes symétries possibles, réfléchir comment les déterminer en terme d'applications linéaires.

5 Matrices

5.1 Définitions

Définition 5.1 *Une matrice à m lignes et n colonnes est un tableau*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où les a_{ij} sont des éléments de k. On notera souvent $M = (a_{ij})$. Les a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice.

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes.

Cas particuliers si $m = 1$, on parle de matrice ligne, si $n = 1$, on parle de matrice colonne.

On munit $\mathcal{M}_{m,n}$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant :

- une addition : étant données deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}$, $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$, on définit $M + N \in \mathcal{M}_{m,n}$ par $M + N = (a_{ij} + b_{ij})$.

- une multiplication de la matrice M par un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda M \in \mathcal{M}_{m,n}$ où $\lambda M = (\lambda a_{ij})$.

On vérifie immédiatement que ces 2 opérations ont les 8 propriétés requises pour munir $\mathcal{M}_{m,n}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5.1 *On remarque que, en tant qu'espaces vectoriels, $\mathbb{R}^{mn}$ et $\mathcal{M}_{m,n}$ sont isomorphes. Pour le faire, il suffit de montrer que les matrices A_{ij} où tous les éléments sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1 forment un système libre et générateur de $Mat_{m,n}$ (le vérifier). En conséquence, $\mathcal{M}_{m,n}$ est de dimension mn.*

Un cas particulier : si $m = n = 1$, $\mathcal{M}_{1,1} \cong \mathbb{R}$. Ce qui, dans l'écriture, "distingue" le réel a de la matrice (a) est la seule présence de parenthèses.

On peut aussi définir une multiplication entre deux matrices, *à condition que le nombre de* **colonnes** *de la première soit égal au nombre de* **lignes** *de la deuxième.*

Définition 5.2 *Soit $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} \in \mathcal{M}_{m,p}$ une matrice à m lignes et p colonnes et $N = (b_{k\ell})_{\substack{k=1,\dots,p \\ \ell=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_{p,n}$ une matrice à p lignes et n colonnes, alors on définit le produit $M \times N$ comme étant la matrice $M \times N = (c_{ts}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ la matrice à m lignes et n colonnes dont les termes sont donnés par, pour $t = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, n$,*

$$c_{ts} = a_{t1}b_{1s} + a_{t2}b_{2s} + \cdots + a_{tr}b_{rs} + \cdots + a_{tp}b_{ps} = \sum_{j=1}^{p} a_{sj}b_{jt}.$$

Exemple 5.1 *Considérons la matrice ligne* $A = (a\ b\ c)$ *et la matrice à 3 lignes et 2 colonnes* $B = \begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}$ *et faisons leur produit :*

$$(a\ b\ c)\begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix} = (aa' + bb' + cc' \ \ aa'' + bb'' + cc'').$$

Exercice 5.1 *Calculer* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De même, calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(matrice unité).*

Cas particulier Si M, N sont deux matrices carrées, alors $M \times N$ est encore une matrice carrée de même taille. **Attention :** En général, $M \times N \neq N \times M$. En donner un exemple.

Premières propriétés

Proposition 5.1 *i) Soient* M *une* $m \times q$*-matrice,* N *une* $q \times r$*-matrice et* P *une* $r \times p$*-matrice. Alors* $(MN)P = M(NP)$ *;*

ii) Soient M, N *deux* $m \times p$ *matrices et* P *une* $p \times q$ *matrice, alors* $(M + N)P = MP + NP$ *;*

iii) Soient M *une* $m \times p$ *matrice et* N, P *deux* $p \times q$ *matrices, alors* $M(N + P) = MN + MP$*.*

Preuves : La preuve est calculatoire et fastidieuse et les calculs sont assez longs dans le premier cas.

Définition 5.3 *La matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent tous 1, est appelée matrice unité et notée* I_n *(ou, s'il n'y a pas de confusion possible, simplement* I*).*

La matrice identité a la propriété que toute matrice M, *de taille convenable*, multipliée à gauche ou à droite par I est égale à M (ie. $I \times M = M$ ou $N \times I = N$).

5.2 Représentations vectorielles

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Rappelons (cf. 2.6) qu'on peut associer au vecteur $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ la matrice colonne de ses coordonnées écrites en colonne, soit

$$\mathrm{Mat}(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la *représentation matricielle du vecteur* v *dans la base* $\mathcal{B}$.

Remarque 5.2 *La représentation matricielle d'un vecteur $v \in E$ dépend évidemment de la base choisie.*

Prenons par exemple le vecteur $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons la base $\mathcal{V} = (v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1))$. La matrice de v dans $\mathcal{V}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et dans la base (v_2, v_1, v_3), c'est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 5.2 *Soit $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$Mat(v, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De même, soit $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors

$$Mat(v, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.2 *Dans le premier exemple ci-dessus, montrer que $\mathcal{V} = (v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice de v dans cette base.*

De même, montrer que dans $\mathbb{R}^4$, le système de vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0, 1), v_3 = (2, 2, 2, 0), v_4 = (-4, 3, -2, 1)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$. Trouver la matrice de $w = (1, 8, 3, 5)$ dans la base canonique, puis dans cette nouvelle base.

Définition 5.4 *Si $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ est un ensemble de k vecteurs de E, on appelle matrice du système S dans la base $\mathcal{E}$, on note $Mat(S, \mathcal{E})$, la matrice*

$$Z = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

où $v_i = x_{1i}e_1 + x_{2i}e_2 + \cdots + x_{ni}e_n$, pour tout $i = 1, \ldots, k$.

5.3 Représentation d'une application linéaire

Soient une application linéaire $f : E \to F$, une base $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ de E et une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_q)$ de F.

Définition 5.5 *La représentation matricielle de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la matrice à q lignes et p colonnes dont les colonnes sont les représentants matriciels des vecteurs $f(a_1), \dots, f(a_p)$ dans la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_q)$.*

*Autrement dit, c'est la matrice (attention : les notations en dehors et au-dessus de la matrice elle-même ne sont là que pour montrer ce qui est représenté par la matrice ; la ligne au-dessus et la colonne à gauche hors parenthèses **ne font pas partie de la matrice**)*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(a_1) & \dots & f(a_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{array} & \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{q1} & \dots & m_{qp} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Remarque 5.3 *Souvent, lorsqu'il s'agit d'une endomorphisme, on prend la même base au départ et à l'arrivée.*

Evidemment, comme la représentation des vecteurs est attachée à une base, la représentation d'une application linéaire est attachée au choix d'une base dans l'espace de départ et d'une base dans l'espace d'arrivée. Si on change l'une ou l'autre ou les deux, la représentation de l'application change !

Exemple 5.3 *Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u((x, y)) = (x + y, x - y, 2x)$. Notons $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.*

a. Montrer que u est linéaire.
b. Calculer Mat$(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.
c. Calculer $u(v)$ pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$.
d. Calculer $\ker(u)$.
e. Calculer $\mathrm{Im}(u)$ et en donner une base.

Exercice 5.3

1. *Mêmes questions pour $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(e_1) = (1, 1, 1), u(e_2) = (1, 1, 0), u(e_3) = (1, 0, 0)$, puis pour $u((x, y, z) = (x+y+z, x-2y+3z, 5x-3y+z)$ où $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Idem pour $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + y, 5y + 2z, x - z)$.*
3. *On se donne un espace E de dimension 3 et u une application linéaire de E dans lui-même qui envoie tout vecteur v sur $-v$. Quelle est sa matrice dans une (?) base quelconque de E.*
4. *Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la rotation d'angle θ de centre O. Est-ce une application linéaire ? Peut-on écrire sa matrice dans une (?) base de $\mathbb{R}^2$. Et, dans l'espace $\mathbb{R}^3$?*

Dans tous ces exemples, nous avons mis en évidence le résultat déjà prouvé que toute application linéaire est déterminée par ses valeurs sur une base. En termes de matrices, ce résultat conduit à la

Proposition 5.2 *Il y a un isomorphisme $\phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,m}$ entre l'ensemble des applications linéaires de E de dimension m dans F de dimension n et l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes.*

Preuve : Choisissons une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F. Alors on définit $\phi(u) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Le résultat rappelé ci-dessus montre que ϕ est bijective.

Comme

$$\phi(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) + \mu \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E}, \mathcal{F}),$$

l'application ϕ est linéaire, donc est un isomorphisme.

Clairement, l'application réciproque associe à une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}$ l'application linéaire dont les images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ sont ceux dont les coordonnés dans la base $\mathcal{F}$ sont les colonnes respectives de la matrice. $\square$

Corollaire 5.1 *Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions m et n respectivement. Alors la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est $m \times n$.*

Preuve : Nous avons vu que la dimension de $\mathrm{Mat}_{m,n}$ est $m \times n$ (car isomorphe à $\mathbb{R}^{mn}$) ; l'isomorphisme donné par le théorème induit alors le résultat. $\square$

Théorème 5.1 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_p)$ des bases respectivement de E, F, G. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors*

$$\mathit{Mat}(g \circ f, \mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathit{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathit{Mat}(f, \mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Preuve : Notons $M = (m_{ij})$ la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{A}, \mathcal{B})$, N la matrice $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et P la matrice $\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{A}, \mathcal{C})$.

Il suffit de calculer les coordonnées de $(g \circ f)(a_j)$ pour avoir la j-ème colonne de P.

Or, $f(a_j) = m_{1j} b_1 + \cdots + m_{nj} b_n = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} b_\ell$. D'où

$$g(f(a_j)) = g(\sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} b_\ell) = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} g(b_\ell) = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} (\sum_{k=1}^p n_{k\ell} c_k) = \sum_{k=1}^p (\sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} n_{k\ell}) c_k.$$

Comme le terme de la ligne k et de la colonne j du produit NM est $\sum_{\ell=1}^n n_{k\ell} m_{\ell j}$, on en déduit le résultat. $\square$

5.4 Opérations élémentaires sur les matrices

En traitant un certain nombre d'exemples, on se rend compte que le fait d'échanger des lignes (ou des colonnes), de multiplier une ligne (ou une colonne), d'ajouter une ligne (ou colonne) à une autre, revient au même que de multiplier à gauche (ou à droite) par un certain type de matrice.

Nous pouvons en faire la démonstration. Faisons-le par exemple pour l'ajout de la colonne j multipliée par le réel λ à la colonne k. Si on effectue le calcul du produit de la matrice à m ligne et p colonnes $M = (m_{ij})$ par la matrice carrée A d'ordre p dont les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1 et l'élément de la j-ème ligne et k-ième colonne qui vaut λ, on obtient la matrice $B = MA$, à m lignes et p colonnes dont la colonne k est remplacée par la somme de la colonne k et de la colonne j multipliée par λ.

On constate de même qu'échanger les colonnes j et k de la matrice M revient à multiplier M par la matrice A déduite de la matrice identité d'ordre p en échangeant les colonnes j et k. La matrice $B = MA$ est la transformée de M par l'échange des colonnes j et k.

Pour opérer sur les lignes, on utilise le même type de matrices par lesquelles on multiplie à gauche.

Définition 5.6 *Une opération sur une matrice d'un des types précédents s'appelle manipulation élémentaire sur les lignes ou les colonnes (selon le cas).*

On a vu ainsi que toute manipulation élémentaire revient à multiplier à gauche ou à droite par une matrice.

Proposition 5.3 *Pour toute matrice A d'un des types précédents, il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.*

Preuve : Remarquons d'abord que les matrices de ce type étant carrées, cela a bien un sens. On se contentera de traiter le cas de l'ajout d'une ligne à une autre.

Considérons la matrice, carrée d'ordre p, A qui réalise l'ajout de la ligne j à la ligne k (rappelons qu'il faut alors multiplier à gauche). Il s'agit de la matrice A dont tous les termes non diagonaux sont nuls, sauf $a_{kj} = 1$ et tous les termes diagonaux sont égaux à 1.

Prenons pour B la matrice dont tous les termes non diagonaux sont nuls, sauf $a_{kj} = -1$ et tous les termes diagonaux sont égaux à 1. Alors, le produit BA consiste à ajouter à la ligne j de A, qui est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & \text{col.}j & & & & \text{col.}k & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots 0 \end{array}$$

(en supposant $j < k$) la ligne k qui est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & \text{col.}j & & & & \text{col.}k & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots 0^{\cdot} \end{array}$$

On obtient donc bien la matrice identité $p \times p$. Comme A et B jouent des rôles quasi-symétriques, on montre de même que $AB = I$.

On procède de façon analogue pour les autres cas d'opération sur les lignes. Comme il s'agit des mêmes matrices pour les opérations sur les colonnes, sauf qu'il s'agit de multiplications à droite, il n'y a rien de plus à démontrer. □

On peut encore remarquer que pour la matrice qui correspond à un échange de lignes (ou de colonnes) : $B = A$.

En résumé

1. Remplacer dans une matrice M à m lignes et n colonnes la colonne C_j par la somme $C_j + \lambda C_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$ revient à multiplier **à droite** la matrice M par la matrice $A = (a_{ij})$ déduite de la matrice I_n par le remplacement du zéro de la place (k, j) par λ, autrement dit :

$$a_{ij} = 0, \text{ pour tout couple } (i, j), i \neq j, a_{ii} = 1, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n, a_{kj} = \lambda.$$

De manière analogue, remplacer dans M la ligne L_j par la somme $L_j + \lambda L_k$ revient à multiplier **à gauche** la matrice M par la matrice A déduite de la matrice I_m par le remplacement du zéro de la place (j, k) par λ, autrement dit

$$a_{ij} = 0, \text{ pour tout couple } (i, j), i \neq j, a_{ii} = 1, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n, a_{jk} = \lambda.$$

2. Echanger dans une matrice M les colonnes C_j et C_k revient à multiplier **à droite** la matrice M par la matrice $A = (a_{ij})$ déduite de la matrice I_n en intervertissant les colonnes j et k.

De même, échanger dans une matrice M les lignes L_j et L_k revient à multiplier **à gauche** la matrice M par la matrice $A = (a_{ij})$ déduite de la matrice I_m en intervertissant les lignes j et k.

5.5 Rang d'une matrice

Proposition 5.4 *Par des manipulations élémentaires sur les lignes et les colonnes, on peut ramener toute matrice $m \times n$ à une matrice du type suivant*

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité et les O sont des matrices de 0. Le nombre r ainsi obtenu s'appelle le rang de la matrice.

Preuve : Si la matrice M est nulle, il n'y a rien à faire. On peut donc supposer que la matrice M est non nulle. On procède alors par récurrence sur le nombre m de lignes.

Lorsque M a une une seule ligne, on se ramène, par des manipulations élémentaires sur les colonnes à la forme où le premier élément est 1, et tous les autres sont nuls. C'est la forme cherchée avec $r = 1$.

Supposons alors que le résultat soit vrai pour toute matrice avec moins de m lignes. Par des opérations sur les colonnes, on peut mettre la première ligne sous la forme $1, 0, \ldots, 0$. Puis, par des opérations sur les lignes, on se ramène à une première colonne avec des zéros partout sauf à la première place qui vaut 1. La matrice obtenue en barrant alors la 1ère ligne et la 1ère colonne est alors une matrice avec seulement $m - 1$ lignes. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et en conclure que, par des manipulations élémentaires sur les lignes et les colonnes, elle peut se ramener à la forme d'un premier bloc en haut à gauche constitué d'une matrice unité. Il faut noter que ces manipulations, étendues à tout M, ne changent rien à la première ligne et première colonne de la matrice M. On obtient donc par ce procédé une matrice sous la forme voulue. $\square$

Exercice 5.4 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer le rang de M.*

Remarque 5.4 Relation avec les formes échelonnées

En n'autorisant de transformations élémentaires que sur les lignes ou que sur les colonnes, on peut, comme on l'a vu plus haut, ramener toute matrice à sa forme échelonnée réduite ligne (FERL) ou forme échelonnée réduite colonne (FERC).

Corollaire 5.2 *Le rang d'une matrice A est égal au nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée ligne de A et aussi au nombre de colonnes non nulles dans une forme échelonnée colonne de A.*

Preuve : Par construction de la forme échelonnée réduite ligne de A à partir d'une forme échelonné ligne, le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée et de la FERL(A) est le même.

A partir de cette dernière, on obtient la forme de la proposition ci-dessus en appliquant des opérations élémentaires sur les colonnes. On commence par placer tous les pivots sur la diagonale principale par des permutations sur les colonnes. Pour finir, on fait apparaître des zéros partout en dehors de la diagonale, d'abord sur la première ligne, en retranchant $a \times C_1$ à la colonne C_2 si a est le premier terme de C_2, puis, $b \times C_1$ à C_3 si b le premier terme de C_3, etc.

Puis on recommence l'opération pour tous les pivots et on obtient clairement une matrice qui commence par un bloc matrice identité $r \times r$ en haut à gauche. Comme aucun pivot n'a disparu, le nombre de lignes nulles est précisément r.

On procéderait de même en partant d'une forme échelonnée colonne. $\square$

On peut alors énoncer les résultats suivants qui se déduisent immédiatement de ce qui précède et des définitions :

Corollaire 5.3 *Le rang d'un système de vecteur de E est le rang de la matrice qui le représente dans (n'importe quelle) une base de E.*

Corollaire 5.4 *Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est le rang de la matrice de f dans des bases de E et de F respectives.*

Exemple 5.4 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *Ramener à la forme échelonnée réduite ligne. De même, trouver la FERC de la même matrice.*

5.6 Matrice d'un système d'équations linéaires

Nous avons défini dans le § 3.1 ce qu'est un système de k équations linéaires dans les variables $x_1, \dots, x_n$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

est un système de r équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$.

Il apparaît clairement dans cette écriture une matrice à r lignes et n colonnes, à savoir :

$$M(S) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Définition 5.7 *Cette matrice $M(S)$ est la matrice du système (S).*

Par les corollaires de la fin du paragraphe précédent, le rang de (S) est le rang de la matrice associée.

Remarque 5.5 *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ l'application linaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement est $M(S)$.*

Alors l'espace des solutions de (S) n'est autre que le noyau de u.

5.7 Matrices inversibles

Définition 5.8 *Une matrice, **carrée** d'ordre p, A est inversible s'il existe une matrice carrée B telle que $AB = BA = I$ où I est la matrice identité d'ordre p.*

Bien sûr, B est donc aussi carrée d'ordre p.

Exemple 5.5 *Nous avons déjà vu des exemples de matrices inversibles. D'une part, la matrice identité (de n'importe quel ordre) est une matrice inversible. Par ailleurs, toutes les matrices correspondant à des opérations élémentaires sur les matrices sont des matrices inversibles.*

Théorème 5.2 *La matrice d'une application linéaire bijective $f : E \to F$ dans des bases quelconques de E et de Fest inversible.*

Preuve : Soient $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ une base de E et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de F (E et F ont bien sûr même dimension). Soit $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Comme f est un isomorphisme, il existe une application réciproque $f^{-1} : F \to E$. On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_F$. Soit $B = \mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{A})$. La matrice de la composée $g \circ f$ dans la base $\mathcal{A}$ est le produit BA, mais puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est aussi I_n, autrement dit $BA = I$.

De manière analogue, on voit que $AB = I$. $\square$

Définition 5.9 *Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$ sont deux bases de l'espace vectoriel E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{U}$ (ou encore matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U}$) la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{E}$ (les coordonnées de la "nouvelle" base dans l'"ancienne" base).*

Corollaire 5.5 *Une matrice de passage d'une base à une autre est inversible. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U}$, alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{E}$.*

Preuve : Considérons la matrice représentant la base $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dans la base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Il suffit alors de remarquer que cette matrice n'est rien d'autre que la matrice de l'application identité Id_E dans la base $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ au départ et $\mathcal{E}$ à l'arrivée. $\square$

Proposition 5.5 *Soit C la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans lau base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$. Alors, la matrice D des coordonnées de v dans la base $\mathcal{U}$ est $D = P^{-1}C$.*

Preuve : P est la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{E}$, ie. $u_j = p_{1j}e_1 + \cdots + p_{nj}e_n$. Mais

$$\begin{aligned} v = d_1u_1 + \cdots + d_nu_n &= d_1(\sum_{k=1}^{n} p_{k1}e_k) + \cdots + d_n(\sum_{k=1}^{n} p_{kn}e_k) \\ &= (\sum_{\ell=1}^{n} p_{1\ell}d_\ell)e_1 + \cdots + (\sum_{\ell=1}^{n} p_{n\ell}d_\ell)e_n, \end{aligned}$$

d'où $C = PD$ et inversement, $D = P^{-1}C$. □

Proposition 5.6 *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est maximal.*

Preuve : En remarquant que tout matrice carrée inversible peut être considérée comme représentant une base dans une autre, le rang est nécessairement maximal. □

Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

• On peut inverser une matrice A en la considérant comme la matrice du système linéaire $AX = Y$ et en résolvant ce système par $A^{-1}Y = A^{-1}AX = X$.

Exemple 5.6 *Calculer le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& y_1 \\ x_1 + 2x_3 &=& y_2 \\ x_1 + x_2 &=& y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{3}(-2y_1 + y_2 + 2y_3) \\ x_2 &=& \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 &=& \frac{1}{3}(y_1 + y_2 - y_3) \end{array} \right. .$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

• On peut aussi inverser une matrice A en agissant sur les lignes **OU** sur les colonnes pour arriver à la matrice identité I de même ordre que A(pourquoi cela est-il possible ?) et en appliquant, parallèlement, les mêmes transformations à la matrice identité, on aboutit à A^{-1}.

Attention le choix entre lignes ou colonnes doit être fait une fois pour toutes au début du calcul ! !

Exemple 5.7 *Appliquer cette méthode au calcul de l'inverse de la matrice A de l'exemple précédent.*

Ceci donne

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et avec les mêmes opérations sur I

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&\frac{2}{3}\\1&0&\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Evidemment, on trouve le même résultat !

Justification : nous avons vu qu'une opération sur les lignes (les colonnes) de A revient à multiplier à gauche (à droite) par une matrice (inversible). En réalisant l'ensemble des transformations sur A qui ont abouti à I, c'est comme si on avait multiplié A, à gauche (à droite), par la matrice produit P de toutes les transformations élémentaires. En fait on a réalisé, dans le cas de lignes, $I = PA$. On en déduit donc, par multiplication à droite par A^{-1} (un produit de matrices inversibles est inversible) que $P = PAA^{-1} = IA^{-1}$, autrement dit $A^{-1} = P$. Et, comme on effectué, en parallèle des transformations sur A, le calcul PI on obtient bien A^{-1}.

• Il y a encore une autre méthode dont nous parlerons plus loin.

5.8 Matrices équivalentes

Définition 5.10 *Deux matrices A et B de même taille (ie. le nombre p de lignes de A est égal au nombre de lignes de B et le nombre q de colonnes de A est égal au nombre de colonnes de B) sont dites équivalents, on note $A \sim B$, s'il existe une matrice carrée $p \times p$ P et une matrice carrée $q \times q$ Q telles que $B = PAQ$.*

Théorème 5.3 *Deux matrices représentant une même application linéaire $f : E \to F$ dans des bases différentes sont équivalentes.*

Preuve : Notons $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ l' ancienne et la nouvelle base de E et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ l' ancienne et la nouvelle base de F, M la matrice de f dans les anciennes bases, N sa matrice dans les nouvelles bases. Notons encore P la matrice de passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Nous voulons calculer $f(a'_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Or

$$f(a'_j) = f\left(\sum_{k=1}^{p} p_{kj}a_k\right) = \sum_{k=1}^{p} p_{kj}f(a_k) = \sum_{k=1}^{p} p_{kj}\left(\sum_{\ell=1}^{q} m_{\ell k}b_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} p_{kj}m_{\ell k}\right)b_\ell$$

ce qui signifie que le ℓ-ième terme de la j-ème colonne de cette matrice est le terme ℓj de la matrice MP.

Autrement dit, la matrice

$$Mat(f, \mathcal{A}', \mathcal{B}) = MP.$$

Pour avoir les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$, connaissant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, il faut multiplier, à gauche, la matrice des coordonnées dans $\mathcal{B}$ par la matrice Q^{-1}. D'où :

$$Mat(f, \mathcal{A}', \mathcal{B}') = Q^{-1}MP.$$

□

Corollaire 5.6 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ deux bases de E et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de F. Alors*

$$Mat(f, \mathcal{A}', \mathcal{B}') = Q^{-1}Mat(f, \mathcal{A}, \mathcal{B})P \tag{3}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Preuve : il n'y a rien de neuf à prouver, c'est le contenu de la preuve du théorème.

Corollaire 5.7 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentant la même application linéaire dans des bases différentes.*

Preuve : La partie "si" est le résultat précédent. Prenons alors deux matrices, à q lignes, p colonnes, A et B équivalentes. Alors il existe une matrice carrée, $p \times p$, R et une matrice carrée, $q \times q$, inversibles, S telles que $B = SAR$.

A représente l'application linéaire u de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ dans les bases canoniques. Considérons alors la base $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^p$ dont les vecteurs sont les vecteurs de coordonnées les colonnes de R dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. De même, soit la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^q$ dont les vecteurs sont les vecteurs de coordonnées les colonnes de S^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^q$. Alors, B représente u dans les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. □

5.9 Transposition - Trace

Définition 5.11 *Etant donnée une matrice A à p lignes et q colonnes, on appelle transposée de A, on note $\tilde{A}$ ou ${}^tA$ la matrice obtenue de A en intervertissant les lignes et les colonnes. Autrement dit : si $A = (a_{ij})$, alors $\tilde{A} = (b_{ij})$ où $b_{ij} = a_{ji}$, pour tous $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$.*

Exemple 5.8 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *alors* $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 5.7 *Pour toutes matrices, A, B et tout nombre réel α, on a :*
(i) ${}^t({}^tA) = A$;
(ii) ${}^t(A+B) =^t A +^t B$;
(iii) ${}^t(\alpha A) = \alpha^t A$;
(iv) ${}^t(AB) =^t B^t A$:
(v) Si A est inversible, alors ${}^tA$ l'est et $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}$.

Preuve : toutes les propriétés sont immédiates, sauf peut-être les deux dernières. La (iv) résulte simplement du calcul d'un produit de matrices. La propriété suivante découle alors du fait que $AA^{-1} = I$, d'où ${}^t(AA^{-1}) =^t (A^{-1})^t A =^t I = I$, donc $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$. $\square$

Définition 5.12 *Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, sa trace est la somme des éléments diagonaux, ie. $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.*

Proposition 5.8 *L'application de $\mathcal{M}_{n\times n}$ dans R qui à une matrice associe sa trace est une forme linéaire qui vérifie $Tr(AB) = Tr(BA)$.*

Preuve : On vérifie immédiatement que l'application est linéaire. Par ailleurs, $Tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ où $AB = (c_{ij})$. Or, par définition du produit, $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$ D'où

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = Tr(BA). \quad \square$$

6 Déterminants

6.1 Définition

Définition 6.1 *Soit E un espace vectoriel et $f : E^n = E \times E \times \cdots \times E \to E$ une application $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$.*
• *f est dite multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun des termes, ie. si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et*
pour tous n-uplets $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in E^n$, on a

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v'_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v_n) + \mu f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

• *f est dite alternée si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, et tout n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on a*

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Remarque 6.1 *On vérifie facilement que la condition d'être alternée est équivalente à la condition suivante : pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, et tout n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on a*

$$v_i = v_j \Rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0.$$

On admettra le théorème suivant :

Théorème 6.1 *Etant donné un espace vectoriel E de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, il existe une unique forme multilinéaire alternée u sur E^n telle que $u(e_1, \ldots, e_n) = 1$.*

En fait, il suffit de remarquer que, à l'instar de ce qui se passe pour les formes linéaires, une forme multilinéaire est déterminée par ses valeurs sur une base.

Définition 6.2 *L'unique forme multilinéaire alternée du théorème précédent est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et notée* $\det_{\mathcal{B}}$. *On a donc* $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Listons quelques propriétés immédiates :

Proposition 6.1 *(i) Si dans le système de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, l'un des vecteurs $v_i = 0$, alors le déterminant du système est nul.*

(ii) Si dans le système de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, deux vecteurs sont égaux, alors le déterminant du système est nul.

(iii) On ne change pas le déterminant d'un système de n vecteurs en ajoutant à un des vecteurs une combinaison linéaire de tous les autres.

Preuve : (i) par linéarité ; si 0 est en position j, on utilise la linéarité par rapport au j-ème facteur.

(ii) provient du fait que le déterminant est une forme alternée.

(iii) Supposons par exemple que l'on remplace v_n par $v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i),$$

où tous les termes de la somme sont nuls à cause de (ii). □

Proposition 6.2 *Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Alors la famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Preuve : La partie directe de ce résultat provient du fait que si le système est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et la nullité résulte alors du (ii) de la proposition précédente.

Nous admettrons la réciproque qui sera une conséquence du fait que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, ce qui implique qu'une matrice inversible a un déterminant non nul. □

Remarque 6.2 *Attention : le résultat précédent n'est valable que pour un nombre de vecteurs égal à la dimension de l'espace.*

Définition 6.3 *Si A est une matrice* carrée, *le déterminant de A est le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique. On note souvent* $\det(A) = |A|$.

6.2 Calculs pratiques en dimension 2 ou 3

Le calcul du déterminant d'une matrice en dimensions 2 ou 3 est simple.

• **en dimension 2** : si $v_1 = (a, c)$, $v_2 = (b, d)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, leur matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Le déterminant $\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. On vérifie en effet immédiatement qu'il s'agit d'une forme 2-linaire en v_1, v_2, alternée et telle que $\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2) = 1$.

On retient donc que le déterminant de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $ad - bc$.

• **en dimension 3** : Règle de Sarrus.

Soient $v_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $v_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $v_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de ces vecteurs est

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \end{aligned}$$

Là encore, on vérifie que c'est bien une forme 3-linéaire alternée qui vaut 1 sur la base canonique.

La règle consiste à additionner les produits des éléments des 3 diagonales "principales" et à retrancher les produits des éléments des 3 diagonales secondaires.

6.3 Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition 6.4 *Soit A une matrice carrée $n \times n$. Le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en retranchant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A, noté M_{ij}, s'appelle mineur de place (i, j). Ce mineur, multiplié par le coefficient $(-1)^{i+j}$, est appelé cofacteur de place (i, j) de A et noté A_{ij}. On a donc $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Notons qu'on n'a pas, en général, besoin de calculer $(-1)^{i+j}$ puisqu'il suffit de partir de la première position de la matrice dont le signe correspondant est $+$ puisque $(-1)^{1+1} = 1$ et pour les autres signes, on alterne les $+$ et les $-$.

Proposition 6.3 *Le déterminant de la matrice A peut être calculé de la manière suivante :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

qui est le développement par rapport à la j-ème colonne.

Ce déterminant est aussi égal à

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

qui est le développement par rapport à la i-ème ligne.

Preuve : cette proposition est admise. On pourrait, de même que précédemment, invoquer la n-linéarité, l'alternance et le fait que sur la matrice identité (base canonique) la valeur est 1. $\Box$

Exemple 6.1 *Développons selon la 2e ligne pour calculer le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \left|\cdots\right| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \left|\cdots\right|$$

$$= (-)(-)4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4(1-3) - (1-3) = -6$$

Proposition 6.4 *Si A est une matrice carrée triangulaire, c'est-à-dire dont tous les éléments au-dessus de la diagonale (triangulaire inférieure) ou tous les éléments au-dessous de la diagonale (triangulaire supérieure) sont nuls, alors le déterminant de A est égal au produit des termes diagonaux.*

Preuve : On procède par itération. On développe selon la première ligne pour une matrice triangulaire inférieure et on recommence le processus avec une matrice de dimension diminuée de 1. Pour une triangulaire supérieure, on précéderait de même en développant par rapport à la première colonne. $\Box$

Corollaire 6.1 *Si A est une matrice diagonale, ie. tous les termes en dehors de la diagonale sont nuls, on note $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont les termes diagonaux, alors $\det(A) = a_1 \cdots a_n$.*

6.4 Déterminants et opérations sur les matrices

Proposition 6.5 *On a les résultats suivants :*

(i) $\det(I_n) = 1$ *;*

(ii) pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ *;*

(iii) le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *;*

(iv) pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ *; dans ce cas,* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ *;*

(v) pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, $\det({}^tA) = \det(A)$.

Preuve : (i) I_n est diagonale, d'où le résultat. (ii) résulte de la multilinéarité. On admettra le point (iii). Le point (iv) résulte alors de (iii) : en effet, A est inversible si et seulement s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$. Comme $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$, on en déduit le résultat. On admettra le dernier point. $\Box$

6.5 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice A en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres (opération élémentaire). En effet, comme nous l'avons vu, une opération élémentaire de ce type sur les lignes (resp. colonnes) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible Q dont le déterminant est 1 (vérification aisée). Alors $\det(QA) = \det(A)$. Pour la même raison, échanger 2 lignes ou 2 colonnes revient à changer le signe du déterminant car pour ce type d'opération $\det(Q) = -1$. Bien sûr, en multipliant une ligne (ou une colonne) par un scalaire k, on multiplie le déterminant par k.

Conséquence : pour calculer un déterminant, on peut agir sur les lignes et les colonnes par des opérations élémentaires pour faire apparaître un maximum de 0, ce qui facilite le calcul, en utilisant l'une des méthodes énumérées ci-dessus, en particulier d'agissant du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Exemple 6.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Exemple 6.3 *Un déterminant remarquable est le déterminant suivant, appelé déterminant de Van der Monde :*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le calcul nous donne

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

En particulier, $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ *si et seulement si les* x_i *sont distincts deux à deux.*

6.6 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 6.6 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E*. Alors le déterminant de la matrice de* f *dans n'importe quelle base de* E *est le même. On appelle* $\det(f)$ *le déterminant de n'importe laquelle de ces matrices.*

Preuve : on a vu, d'une part, que le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, d'autre part, que

$$Mat(f, \mathcal{B}') = P^{-1} Mat(f, \mathcal{B}) P \tag{4}$$

où $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. D'où

$$\det(Mat(f, \mathcal{B}')) = \frac{1}{\det(P)} \det(Mat(f, \mathcal{B})) \det(P),$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 6.3 *La formule (4) n'est autre que la formule (3) où, comme on prend la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, on change simultanément, et avec la même matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, par une même base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.*

Listons les propriétés analogues à celles pour les matrices :

Proposition 6.7 *Les résultats suivants sont vrais :*
(i) $\det(Id_E) = 1$ *;*
(ii) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ *;*
(iii) pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$ *;*
(iv) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f *est bijective si et seulement si* $\det(f) \neq 0$ *; dans ce cas,* $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

Notons que, pour voir si un endomorphisme f est bijectif, il suffit de calculer le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base. S'il est non nul, et seulement dans ce cas, f est bijective.

Exemple 6.4 *Considérons l'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $(x, y, z) \mapsto (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$*. Est-elle bijective ? Pour cela, on calcule le déterminant*

$$|Mat(f, \mathcal{E})| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

où $\mathcal{E}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. D'où* f *est bijective.*

6.7 Application aux systèmes linéaires

On considère un système linéaire (S) à n équations et n inconnues (Attention : autant d'équations que d'inconnues !) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \cdots + a_{r,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On peut l'écrire sous la forme matricielle suivante $AX = B$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice (carrée) du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si la matrice A est inversible, ie. $\det(A) \neq 0$, on dit que le système est *de Cramer*. Dans ce cas, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ obtenant ainsi une solution unique.

Proposition 6.8 *Un système d'équations linéaires de Cramer, de matrice A, $AX = B$ admet une unique solution donnée par les formules de Cramer : pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

On a donc remplacé dans la matrice A la colonne k par la colonne B.

Preuve : Comme la matrice A est inversible, il y a bien une unique solution. Il suffit donc de voir que le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ ainsi défini est une solution. Or, notant $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A, le système permet d'écrire le vecteur B comme combinaison linéaire de $C_1, \ldots, C_n$, $B = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$. Par conséquent, par multilinéarité, le déterminant

$$\det(C_1, \ldots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \ldots, C_n) = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \det(C_1, \ldots, C_{k-1}, C_\ell, C_{k+1}, \ldots, C_n) = x_k \det A$$

puisque tous les déterminants de cette somme, sauf le k-ième, ayant 2 colonnes identiques sont nuls. D'où le résultat. □

Remarque 6.4 *On remarque qu'un système de Cramer où $B = 0$, on parle d'un système homogène, admet la seule solution nulle $X = O$.*

Exemple 6.5 *On considère le système*

$$\begin{cases} -x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{cases}$$

On a alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut 4 (calcul effectué plus haut). La solution $v = (x, y, z)$ est donnée par

$$x = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad z = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Remarque 6.5 *Si le système est trop grand ($n \geq 3$ ou 4), ces formules n'ont pas d'intérêt pratique (elles sont d'un grand intérêt théorique cependant).*

Lorsque le système n'est pas un système de Cramer.

- S'il y a plus d'équations indépendantes que d'inconnues (ie. le rang du système est plus grand que le nombre d'inconnues), le système n'a pas de solution en général sauf lorsque les termes de B satisfont des conditions de compatibilité données par les lignes du système échelonné d'indices supérieurs au rang.

- Si, au contraire, il y a plus d'inconnues n que le rang du système r, alors la dimension de l'espace S des solutions du *système homogène* (ie. le système de même matrice tel que $B = 0$) est $\dim S = n - r \geq 1$. On choisit alors r inconnues principales, par exemple, $x_1, \dots, x_r$ telles que le déterminant correspondant $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ et $n - r$ inconnues comme paramètres, par exemple $x_{r+1}, \dots, x_n$. Les solutions sont alors les solutions d'un système de Cramer du type

$$(S') \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r & = & b'_1(x_{r+1}, \dots, x_,) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \cdots + a_{r,n}x_r & = & b'_n(x_{r+1}, \dots, x_,) \end{array} \right.$$

6.8 Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 6.5 *Pour une matrice carrée A, on appelle comatrice de A et on note $Com(A)$ la matrice de ses cofacteurs ie. le terme de la ligne i et de la colonne j de cette matrice est $(-1)^{i+j}M_{ij}$ avec les notations de la définition 6.4.*

Proposition 6.9 *Si A est une matrice (carrée) inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t Com(A).$$

Idée de preuve : il suffit d'effectuer le calcul du produit $A \times^t Com(A)$; on s'aperçoit que le terme de la ligne i et colonne j de ce produit est nul si $i \neq j$ et égal à $\det A$ sinon.

Exemple 6.6 *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*

Remarque 6.6 *Cette méthode de calcul n'est pas pratique lorsque $n > 3$.*