Chapitre 10

Calcul Matriciel

10.1 Qu'est-ce qu'une matrice ?

Définition : Soit K un ensemble de nombres (exemples, $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes la données de np nombres appelés termes ou éléments ou coefficients de la matrice et rangés dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Si $n = 1$, on parle de **matrice ligne** à p colonnes.
Si $p = 1$, on parle de **matrice colonne** à n lignes.
Si $n = p$, on parle de **matrice carrée**. On note simplement $\mathcal{M}_n(K)$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

Remarque : Si $n = p = 1$, on a simplement affaire à un nombre.
Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 2 & 1+i & \pi & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$.
- $\begin{pmatrix} \pi \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

10.2 Indexation des coefficients.

Dans la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, le coefficient situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$) sera noté m_{ij}.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple : Toute matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(K)$ s'écrit $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{pmatrix}$ Pour i, j indices "génériques", on appelle m_{ij} le **terme général** de M et on note

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

10.3 Exemples de matrices carrées.

On pose, pour tous $i, j \leq n$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

La matrice $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est appelée **matrice unité** ou **matrice identité** d'ordre n.

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition : Pour $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$, on appelle **termes diagonaux** les termes $m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn}$, c'est à dire m_{ii} avec $1 \leq i \leq n$.

Par exemple, la matrice identité a des termes diagonaux égaux à 1 et des termes non diagonaux égaux à 0.

Définition : On dit qu'une matrice carrée est **diagonale** si ses termes non diagonaux sont nuls.

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonale.

On dit qu'une matrice est **triangulaire supérieure** si ses termes strictement sous la diagonale sont nuls. Autrement dit,
$M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire supérieure si $m_{ij} = 0$ pour $i > j$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On dit qu'une matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est **triangulaire inférieure** si $m_{ij} = 0$ pour $j > i$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

10.4 Structure vectorielle.

Définition : Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ (deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes), notées $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, on définit la matrice somme $A+B$ comme étant la matrice à n lignes et p colonnes de terme général $a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}.$$

Définition : Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ avec $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathrm{K}$, on définit λA comme la matrice de terme général λa_{ij}.

Exemple :

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -14 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Théorème : $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K}), +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La matrice nulle, élément neutre pour $+$, est ici la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Proposition : Pour $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \ell \leq p$, notons $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui sur la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne qui vaut 1. Alors $\{E_{k\ell},\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq \ell \leq p\}$ est une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathrm{K})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathrm{K})$.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ est un espace vectoriel de dimension np.

Exemple : $n = 2$, $p = 3$.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.5 Multiplication des matrices.

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathrm{K})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. On définit une matrice notée AB à n lignes et q colonnes comme la matrice de terme général c_{ij} avec

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall j \in \{1, \ldots, q\}, c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Illustration

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{ip} \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \ldots & \ldots & c_{ij} & \\ & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

et

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ici on peut aussi calculer BA

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 14 \\ 5 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

ATTENTION On ne peut calculer AB que quand le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Si AB est définie, BA n'est pas toujours définie et même si elle l'est, elle n'est pas en général de même taille que AB.

Cas particulier important : Dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$, ensemble des matrices carrées d'ordre n, on peut toujours multiplier deux matrices A, B quelconques. AB et BA seront encore des matrices carrées de taille n mais en général $AB \neq BA$.

Proposition : Pour A, B, C matrices telles que les produits soient définis,
- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(\lambda B) = \lambda AB$

10.6 Matrices inversibles.

Dans ce paragraphe, on ne considère que des matrices **carrées**.

Définition : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ telle que $AB = BA = I$ et dans ce cas on note
$B = A^{-1}$ appelée matrice **inverse** de A.

Remarque : Si B existe, elle est la seule à vérifier cette propriété. En effet, si $AB = BA = I$ et $AC = CA = I$, on écrit $C(AB) = CI = C = (CA)B = IB = B$ et donc $B = C$.

Théorème (Admis) : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$. Alors $AB = I \iff BA = I$ Ce qui implique que, pour A fixée, s'il existe B telle que $AB = I$ (respectivement $BA = I$) alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Notation On note $\mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.

Proposition : Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
Si en plus $B \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$, alors $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration

10.7 Systèmes linéaires.

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système $(\mathcal{S})$ du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p)$ et les b_k $(1 \leq k \leq n)$ sont des éléments de K fixés.

Vocabulaire :
- La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la **matrice du système**.
- Le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ s'appelle le **second membre** du système.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, le système est dit **homogène** ou sans second membre.
- On appelle **système homogène associé** à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p & = & 0 \end{cases}$$

Ecriture matricielle : Si A est la matrice de $(\mathcal{S})$, et si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système $(\mathcal{S})$ s'écrit

$$AX = B.$$

Exemple : On considère le système $(\mathcal{S})$ de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

Le système homogène associé est

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_0)$$

La matrice A de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'écriture matricielle est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Si la matrice du système linéaire est diagonale ou triangulaire, on obtient très facilement les solutions : considèrons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ le système s'écrit alors

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 2x_2 = 1 - 3x_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

10.8 Ensemble des solutions d'un systèmes linéaires.

Proposition : Si $n = p$ et si A est inversible, alors le système homogène $AX = 0$ a une solution unique : $X = 0$ et le système $AX = B$ a une solution unique : $X = A^{-1}B$.

Proposition : Soit $(\mathcal{S}_0)$ un système linéaire homogène de matrice A. Notons $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des solutions de ce système. Alors $\mathcal{F}_0$ est un sous-espace vectoriel de K^p.

Démonstration

Proposition : Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire admettant une solution $\vec{x}_0$. Notons $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé. Alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des solutions du système $(\mathcal{S})$ est

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x}_0 + \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} \in \mathcal{F}_0 \right\}.$$

Démonstration

Exemple : On considère le système $(\mathcal{S})$ de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

Une solution de ce système est $(1, 0, -1)$. Le système homogène associé est

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_0)$$

dont l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ (\lambda, \lambda, \lambda) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les vecteurs de la forme

$$(1 + \lambda, \lambda, -1 + \lambda)$$

avec λ réel quelconque.

10.9 Matrice de passage.

Soit E un espace de dimension n et de base $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$, et $\vec{x}$ un vecteur de E. Le vecteur $\vec{x}$ admet une unique décomposition

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{x}_n$$

avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{K}$. On appelle matrice des composantes de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Soit alors une autre base de E : $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$. On peut se demander comment s'exprime $\vec{x}$ dans cette nouvelle base. Tout vecteur $\vec{f_j}$, $(1 \leq j \leq n)$ dans la base $(\vec{b_i},\ 1 \leq i \leq n)$:

$$\vec{f_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{b_i}.$$

Définition : La matrice $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée **matrice de passage** de la base $(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ à la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ et est notée dans ce cours

$$P_{(\vec{b_i}) \to (\vec{f_i})}.$$

Théorème : Soit un vecteur $\vec{x}$ de matrice des composantes X_b dans la base $(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ et X_f dans la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$. Cela signifie que, si

$$X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \vec{f_i}.$$

Alors,

$$X_b = P_{(\vec{b_i}) \to (\vec{f_i})} X_f.$$

Démonstration

Corollaire : Toute matrice de passage $P_{(\vec{b_i}) \to (\vec{f_i})}$ est inversible et

$$\left(P_{(\vec{b_i}) \to (\vec{f_i})} \right)^{-1} = P_{(\vec{f_i}) \to (\vec{b_i})}.$$

Démonstration

Exemple : On se place dans un espace vectoriel E de base $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$. On pourra vérifier que les vecteurs $\vec{f_1} = \vec{b_1} + \vec{b_3}$, $\vec{f_2} = 2\vec{b_1}$ $\vec{f_3} = -\vec{b_1} + \vec{b_2} + 2\vec{b_3}$ forment une base de E. On trouve alors

$$\vec{b_1} = \frac{1}{2}\vec{f_2}, \quad \vec{b_2} = -2\vec{f_1} + \frac{3}{2}\vec{f_2} + \vec{f_3}, \quad \vec{b_3} = \vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_2}.$$

On a donc

$$P_{(\vec{b_i}) \to (\vec{f_i})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P_{(\vec{f_i}) \to (\vec{b_i})} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

Soit maintenant $\vec{x} = 6\vec{b_1} + \vec{b_2} + 3\vec{b_3} = \vec{f_1} + 3\vec{f_2} + \vec{f_3}$ On a :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10.10 Applications linéaires et matrices.

Soient E un espace vectoriel sur K de base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et F un espace vectoriel sur K de base $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$, on considère une application u de E dans F définie par :

$$\forall x \in E, \text{ si } x = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i \text{ alors } u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i u(\vec{e}_i)$$

$$\text{avec } \forall j \in \{1, \ldots, p\}, u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{f}_i$$

Définition U : ne application u ainsi définie est appelée une application linéaire de E dans F. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et on montre que c'est un espace vectoriel.

Définition : La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est appelée matrice de u relativement aux bases $(\vec{e}_j)$ et $(\vec{f}_i)$ et notée $mat_{(\vec{e}_i),(\vec{f}_j)} u$.

Théorème : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Soit $\vec{x} \in E$, $u \in L(E, F)$, $\vec{y} = u(\vec{x})$. Notons X la matrice colonne des composantes de $\vec{x}$ sur $\mathcal{E}$ et Y la matrice colonne des composantes de $\vec{y}$ sur $\mathcal{F}$. Alors

$$Y = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}(}u)X.$$

Remarques :
- Si u est un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{E}$ une base de E, on note $mat_{\mathcal{E}} u$ au lieu de $mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}} u$.
- $mat_{\mathcal{B}} Id = I_n$.

Exemple : $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}_3[X]$, $u(P) = X^2 P'$.
u est clairement une application linéaire. On munit E et F de leurs bases canoniques. On a

$$u(1) = 0 \quad u(X) = X^2 \quad u(X^2) = 2X^3.$$

La matrice de u dans les bases canoniques est donc

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème : Soit E, F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, et de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K}) \\ u & \longmapsto & mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}} u \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème : Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$. Soit $u \in L(E, F), v \in L(F, G)$. Alors

$$mat_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = (mat_{\mathcal{F},\mathcal{G}} v)\,(mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}} u)\,.$$

10.11 Changement de base.

Nature du problème : Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in L(E, F)$.
- E est muni de deux bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
- F est muni de deux bases $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

But : quel est le lien entre $mat_{\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1} u$ et $mat_{\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_2} u$?

Théorème : $mat_{\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_2} u = P_{\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1}\,(mat_{\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1} u)\,P_{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2}$.

Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et $u \in L(E)$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}_1$ à $\mathcal{E}_2$. Alors

$$mat_{\mathcal{E}_2} u = P^{-1}\,(mat_{\mathcal{E}_1} u)\,P.$$

Définition : On dit que deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ sont **semblables** si il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Proposition : Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont deux matrices d'un même endomorphisme sur deux bases différentes.

10.12 Rang d'une matrice.

On a déjà défini le rang d'une famille de vecteurs $\{\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}\}$ d'un espace vectoriel E comme étant

$$\dim\big(\mathrm{Vect}(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p})\big).$$

Définition : Le rang d'une application linéaire u de E dans F (espaces vectoriels de dimensions finies) est défini par

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u).$$

Remarque : Soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ une base de E. On sait que

$$\mathrm{Im} u = \mathrm{Vect}\big(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_p)\big)$$

donc le rang de u est égal au rang de la famille

$$\big\{u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_p)\big\}.$$

Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$. On appelle rang de la matrice M le rang de l'application linéaire de K^p dans K^n qui a M pour matrice sur les bases canoniques.

Proposition : Le rang de la matrice M est égal au rang de toute application linéaire ayant M pour matrice.

Remarque : On notera que le rang de M est avec les notations ci-dessus le rang de la famille $\{w(\vec{c}_j),\ 1 \le j \le p\}$. De manière équivalente, le rang de M est le rang de la famille des colonnes $M_1,\dots,M_p$ de M dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.

Méthode pratique de détermination du rang : méthode de Gauss. (Voir TD)

10.13 Transposition.

Définition : On appelle **transposée** de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathrm{K})$ de terme général $b_{ij} = a_{ji}$.
On la note ${}^tA$.

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5\\ -1 & 6\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

Proposition : Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$, $\alpha \in \mathrm{K}$,

1. ${}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$
3. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
4. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$, alors ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

10.14 Trace d'une matrice.

Définition : Soit $A \in_m athcal M_n(\mathrm{K})$ une matrice carrée. La trace de A, notée $\mathrm{Tr}\, A$ est, pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple :

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ n7 & 0 & 5\\ 1 & -2 & \pi\end{pmatrix} = \pi + 1.$$

Proposition :
1. $\mathrm{Tr}\,(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}\, A + \beta \mathrm{Tr}\, B$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$, $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$.
2. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.
3. Deux matrices semblables ont même trace.