

Exercice 10 Résoudre le système d'équations suivantes

$$\frac{3x+y+z}{x} = \frac{x+3y+z}{y} = \frac{-5x-5y-3z}{z}$$

Pour résoudre le rapport alors on a

$$\begin{cases} 3x+y+z = \lambda x \\ x+3y+z = \lambda y \\ \text{ou} \\ -5x-5y-3z = \lambda z \end{cases}$$

Suit le système matricielle $A X = \lambda X$
 avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Par définition, les solutions de ce système sont les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A .

On utilise \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) et la fonction eigen(A) et on trouve

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,617 \\ 0,154 \\ -0,771 \end{pmatrix} \text{ associé à } \lambda_1 = 2$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,158 \\ 0,614 \\ -0,772 \end{pmatrix} \text{ associé à } \lambda_2 = 2$$

(valeur propre
2 d'ordre 2)

$$\text{et } X_3 = \begin{pmatrix} -0,192 \\ -0,192 \\ 0,962 \end{pmatrix} \text{ associé à } \lambda_3 = -1$$

on vérifie par exemple que $A X_3 = -X_3$

(Par exemple en \mathbb{R} une fait la matrice A complexe :

> vectors = eigen(A) & vectors

> veif = vectors[:,3] + A %*% vectors[:,3]

> veif (diff éhe égale à zero ou proche 0).