Récap 1

En algèbre, on avance pas à pas.
On définit des structures comme des corps, anneaux, groupes. Ex. $\mathbb{R}$
Elles possèdent des propriétés comme
- opérateurs internes ($+$)
- des éléments neutres (0) etc...

Une structure puissante, d'un point de vue calculatoire par ex. (→ ordinateur), est la structure d'Espace Vectoriel (E.V)

Cette structure, stable par combinaison linéaire, permet de créer des opérateurs linéaires et constitue le cœur de toute la théorie du filtrage linéaire par ex (→ Fourier).
Elle permet de linéariser toute opération → Algèbre linéaire.

En particulier, toute homothétie peut se linéariser comme un produit de matrice avec un vecteur (→ ex Rotation)

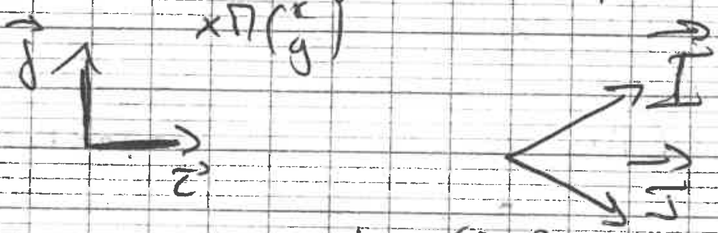
$M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ devient

$M'(x',y')$ après rotation R_θ : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

De façon plus générale, on parle de matrice de changement de repère

Ex.



Comment passer du repère $(\vec i, \vec j)$ au repère $(\vec I, \vec J)$

On crée la matrice de passage $P_{B \to B'}$ de la base $B = (\vec i, \vec j)$ à la base $B' = (\vec I, \vec J)$

$$P_{B \to B'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec i \\ \vec j \end{array} \\ \begin{array}{cc} \vec I & \vec J \end{array} & \end{array}$$

Ainsi $X = P_{B \to B'} X'$

!! Confusion possible : $P_{B \to B'}$ matrice de passage de la base B à B' mais permet de passer de l'espace E' à l'espace E. En φ, on écrira

$$X_{|B} = P_{B \to B'} X_{|B'}$$

$P_{B \to B'}$ est toujours inversible donc

$$X_{|B'} = P_{B \to B'}^{-1} X_{|B}$$

Aplication linéaire $f : E \to F$

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E : f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

Un cas particulier les endomorphisme $E = F$ typiquement une rotation dans le plan de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Toute aplication linéaire peut être associée à une matrice $A_{\dim(E) \times \dim(F)}$

En particulier si $E = F$, A est carrée.

De façon intéressante et utile, si on change de repère (pour simplifier les calculs par exemple) (ici repère = base) on a

$$A' = P^{-1} A P \quad (\text{et donc } A = P A' P^{-1})$$

avec

A : matrice de l'endomorphisme sur $\mathcal{B}$

A' : " $\mathcal{B}'$

P : matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ $(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})$

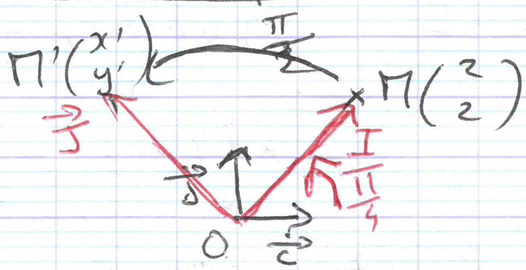
Aplication multilinéaire $f : E \times E \times \ldots \times E \to F$

f est linéaire par rapport à chacune de ses composantes ($\to$ ex : le produit scalaire)

ex : le produit scalaire est bilinéaire

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E \quad f(\vec{x}, \vec{x}') = \vec{x} \cdot \vec{x}' \quad \Big| \quad f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{x}') = \lambda f(\vec{x}, \vec{x}') + \mu f(\vec{y}, \vec{x}')$$

Exo Recap



Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$, rotation de $\frac{\pi}{2}$ de $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

M' a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = X'$

$$X' = R_{\frac{\pi}{2}} X = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix} X$$

$$= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X' = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

Mais coordonnées X' de M dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$: on construit la matrice de passage de $(O,\vec{i},\vec{j}) \to (O,\vec{I},\vec{J})$

$$P = {}^{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}\vec{i}\\ \vec{j}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\vec{I} & \quad\vec{J}\end{matrix} & \end{array} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\, R_{\frac{\pi}{4}} \quad \text{(rotation + scaling)}$$

N'oublions pas que $R^T = R^{-1}$ pour les matrices de rotation donc $P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R_{-\frac{\pi}{4}}$

donc $\boxed{X' = P^{-1} X = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$