

On a $\begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$ (1) qui peut s'écrire $AX = X'$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ fonctions de t .

Si $\text{disc}(A) > 0$ on a deux solutions possibles de la forme $e^{\lambda t}$ avec $\lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{Disc}(A)}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{Disc}(A)}}{2}$

d'où une solution générale $\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ pour chaque x_1 et x_2 d'où $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

et la matrice C des coefficients initiaux $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ se détermine avec les 4 conditions initiales $x_1(0), x_2(0), x_1'(0)$ et $x_2'(0)$ en reprenant (1) pour $x_1'(0)$ et $x_2'(0)$.

Si $\text{disc}(A) = 0$, la solution x et $e^{\lambda t}$ est annulée et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{\text{tr}(A)}{2}$ et solution générale $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Preuve que $t e^{\lambda t}$ est solution :

On a $\frac{d^2 x}{dt^2} - \text{tr}(A) \frac{dx}{dt} + \det(A) x = 0$ en prenant $x = t e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} &= (d e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}) - \text{tr}(A) (e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}) + \det(A) t e^{\lambda t} \\ &= 2\lambda + \lambda^2 t - \text{tr}(A)(1 + t) + \det(A) t \\ &= \text{tr}(A) + t \det(A) - \text{tr}(A) - t \text{tr}(A) + \det(A) t \\ &= \det(A) - \frac{1}{4} \text{tr}(A)^2 = -\text{disc}(A) = 0 \end{aligned}$$

CQFD

Tout ceci peut se faire de façon plus compacte avec la notion de valeurs propres et vecteurs propres (voir ch - Sys diff. p. 14 dans Compléments du site cours) en prenant exemple 4, 14 et 16 (pour les matrices)