Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MI

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 13 mars 2013

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les quatre parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (7 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc, comment calcule-t-on le syndrôme ? S'il est égal au vecteur nul, que peut-on conclure ?

b) Quelles sont les deux étapes de la numérisation d'un son ? Laquelle peut être sans perte d'information et à quelle condition ?

c) Un son autour de 2 kHz, quantifié sur 10 bits (en virgule fixe) est joué à 40 dB. Le bruit de quantification est-il audible ? Que se passe-t-il si le niveau est porté à 50 dB ? (justifier). On rappelle que

- autour de 2 Hz, le seuil d'audition est d'environ 0 dB ;
- lors de la quantification scalaire uniforme de la parole sur k bits, le rapport signal à bruit de quantification en dB vaut environ $6k - 13$.

d) Le codage MPEG du son minimise le débit de codage sous contrainte d'inaudibilité de l'erreur de codage. Comment s'exprime cette contrainte ?

e) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$

quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?

f) Si les symboles d'une source sont codés par des mots binaires de longueur variable, comment peut-on différencier les symboles successifs dans le flux binaire ?

2 Exercices

2.1 Détection de symboles (4 points)

Les symboles utilisés dans les transmissions par modulation OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) peuvent être représentés par une constellation dans un espace multi-dimensionnel. Les points de la figure 1 correspondent aux 8 symboles d'une modulation OFDM à 3 porteuses, ils constituent les 8 sommets d'un cube.

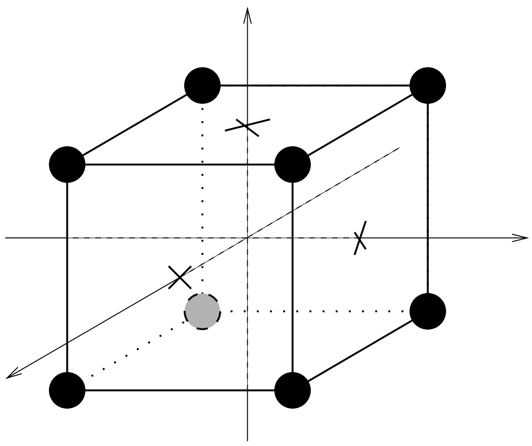

FIG. 1 – Constellation d'une modulation OFDM à 3 porteuses.

Le bruit de la liaison provoque un déplacement aléatoire du point reçu par rapport à la position du symbole émis. Comme le symbole détecté est celui le plus proche du point reçu, une erreur survient dès que le déplacement est trop important. On supppose que lors de l'émission d'un symbole, les seuls risques d'erreur de détection sont liés à une confusion avec un de ses plus proches voisins (des déplacements plus importants sont trop peu probables). Pour l'émission d'un symbole S_i, la probabilité de confusion avec un de ses plus proches voisins S_j est notée :

$$\mathrm{P}(R_j|S_i) = p$$

où R_j désigne l'événement "détection de S_j en réception".

a) Calculer $\mathrm{P}(\overline{R_i}|S_i)$ pour chaque symbole de la constellation. ($\overline{R_i}$ signifie "détection d'un symbole différent de S_i).

b) Définir de manière ensembliste l'événement erreur. Calculer la probabilité d'erreur P_e dans le cas où les symboles sont équiprobables.

2.2 Codage de canal (5 points)

Soit un code linéaire **systématique**, qui à chaque mot de 2 éléments binaires $[m_1, m_2]$ associe un mot $[c_1 \dots c_5]$ tel que :

$$\begin{aligned} c_3 &= m_1 \\ c_4 &= m_2 \\ c_5 &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

a) Quelle est la matrice génératrice G ?

b) Construisez l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale d_{min} de ce code ? En déduire les pouvoir de détection et de correction.

c) Les mots de code sont transmis sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur p. Quelle est la probabilité d'avoir 1 erreur dans un mot de code ? Calculer la probabilité de transmission correcte d'un mot de 2 éléments binaires $[m_1, m_2]$ dans les deux cas suivants :

- transmission sans codage ;
- codage de canal, transmission, décodage de canal.

En déduire la probabilité d'erreur par mot dans les deux cas, sous l'hypothèse $p << 1$. Conclure.

2.3 Codage de source (4 points)

Une source sans mémoire X génère des symboles A, B, C, D avec une probabilité $1/16$ et E, F, G avec une probabilité $1/4$.

a) Réaliser un codage de Huffman de cette source.

b) Comparer l'information de chaque symbole avec la longueur du mot binaire associé.

c) Calculer la longueur moyenne d'un mot de code, l'entropie de la source et l'efficacité du codage.

d) D'après le théorème du codage, si l'on groupe les symboles d'une source par paquets de N, alors il existe un code tel que la longueur moyenne par symbole L/N vérifie :

$$H(X) \leq \frac{L}{N} \leq H(X) + \frac{1}{N}$$

où $H(X)$ est l'entropie par symbole. Quel est l'intérêt en général ? Cet intérêt existe-t-il pour la source considérée ici ?

3 Annexes

Codes correcteurs

Pour un code en bloc linéaire de distance minimale $d_{\min}$, le pouvoir de détection vaut $d_{\min} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$.

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Codage de source

Soit une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$. L'information portée par un symbole x_i de probabilité $\mathrm{P}(x_i)$ vaut $-\log_2(\mathrm{P}(x_i))$. L'entropie de X est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

Si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

Polynômes

$$\begin{aligned}
(1-x)^2 &= 1 - 2x + x^2 \\
(1-x)^3 &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
(1-x)^4 &= 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \\
(1-x)^5 &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^2 - x^5
\end{aligned}$$