Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MIA

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 18 mars 2014

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les quatre parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (8 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc, comment calcule-t-on le syndrôme ? S'il est égal au vecteur nul, que peut-on conclure ?

b) Qu'est-ce que l'entropie d'une source ?

c) Quelles sont les deux étapes de la numérisation d'un son ? Pour chacune, indiquez si elle implique nécessairement une perte d'information. Dans le cas contraire, précisez à quelle condition elle peut se faire sans perte d'information.

d) Un son autour de 2 kHz, quantifié sur 10 bits (en virgule fixe) est joué à 40 dB. Le bruit de quantification est-il audible ? Que se passe-t-il si le niveau est porté à 50 dB ? (justifier). On rappelle que

- autour de 2 Hz, le seuil d'audition est d'environ 0 dB ;
- lors de la quantification scalaire uniforme de la parole sur k bits, le rapport signal à bruit de quantification en dB vaut environ $6k - 13$.

e) On considère le codage perceptif d'un signal audio. Pour la séquence de signal dont le spectre d'amplitude et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1,

- quelle condition doit vérifier le bruit de codage ?
- si le codage est effectué dans le domaine fréquentiel, qu'est-ce qui facilite la compression du signal ?

f) Quels sont les avantages et les inconvénients du codage biphase (ou Manchester) par rapport au codage NRZ ?

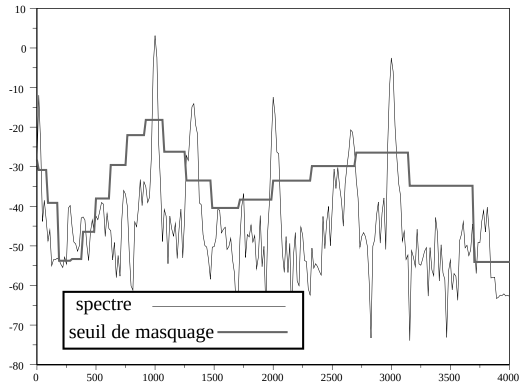

FIG. 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

2 Exercices

2.1 Codage de canal en bloc (4 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(5,2)$ défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est le pouvoir de correction de ce code ?

b) Soit une transmission sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p \ll 1$.

– Sans codage, quelle est la probabilité qu'un mot de deux éléments binaires soit erroné ?
– Avec codage et **après correction**, quelle est la probabilité d'erreur par mot codé ?

Vous ferez des calculs approchés en tenant compte du fait que $p \ll 1$. Des formules éventuellement utiles sont en annexe.

Comparez les deux probabilités d'erreur pour $p = 10^{-2}$.

2.2 Codage de canal convolutif (3 points)

La figure 2 représente le diagramme en treillis d'un codeur convolutif et le début du décodage d'une séquence selon l'algorithme de Viterbi. Indiquez les métriques de branches et les métriques cumulées entre $t2$ et $t3$ et supprimez les branches adéquates. Peut-on dès à présent décoder le début de la séquence ? Si oui, faites-le.

2.3 Codage de source (6 points)

a) Soit une source binaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(1) = p \ll 1$ et $\mathrm{P}(0) = 1 - p$.

Calculez l'entropie de X. Sachant que $\frac{(1-p)\log_2(1-p)}{p\log_2(p)} \xrightarrow{p\to 0} 0$, en déduire que l'entropie de X peut être approchée par : $H(X) \sim -p\log_2(p)$.

b) On groupe maintenant les éléments binaires de X par mots de 2. On note X^2 la nouvelle source ainsi constituée.

– Calculer, en fonction de p, la probabilité de chaque mot (sans approximations)
– Quelle est l'entropie de X^2 ?

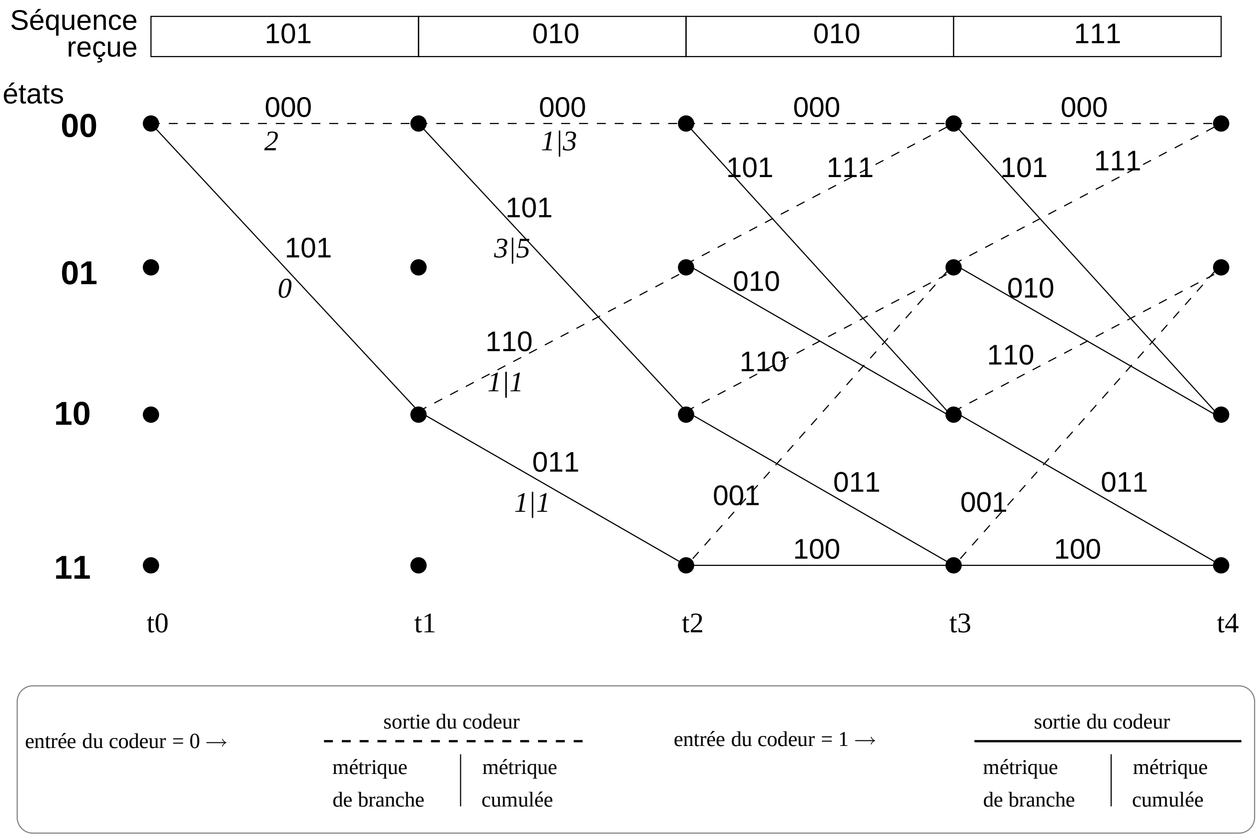

FIG. 2 – Diagramme en treillis et décodage selon l'algorithme de Viterbi.

- Construire un code de Huffman de X^2
- Calculer la longueur moyenne des mots de code
- En déduire l'efficacité du codage et comparer avec celle de la question a (sans regroupement des éléments binaires).

3 Annexes

Codes correcteurs

Pour un code en bloc linéaire de distance minimale $d_{\min}$, le pouvoir de détection vaut $d_{\min} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$.

Entropie

L'entropie d'une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$, est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

Formules de maths

$$(1-x)^2 \quad = \quad 1 - 2x + x^2$$

$$
\begin{aligned}
(1-x)^3 &= 1-3x+3x^2-x^3 \\
(1-x)^4 &= 1-4x+6x^2-4x+x^4 \\
(1-x)^5 &= 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5
\end{aligned}
$$