Université de Paris / UFR de Mathématiques et Informatique

L3 MI

Systèmes de Communication

Épreuve de contrôle continu (1h30) - 7 mars 2022

- Documents et appareils électroniques interdits
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
- **Tout calcul doit être expliqué, toute réponse doit être justifiée.**
- Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (10 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?

b) Expliquez le principe et l'intérêt du codage de Gray.

c) La figure 1 représente le diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2,1,3)$. Supposons que l'on code une longue séquence de 0. Sans faire de diagramme en treillis, montrer que 3 erreurs lors de la transmission suffisent à produire une infinité d'erreurs en réception lors du décodage.

d) Donner la définition de l'entropie d'une source, en français, sans formule mathématique.

e) Si un codage de source est à longueur variable, comment peut-on différencier les symboles successifs dans le flux binaire ?

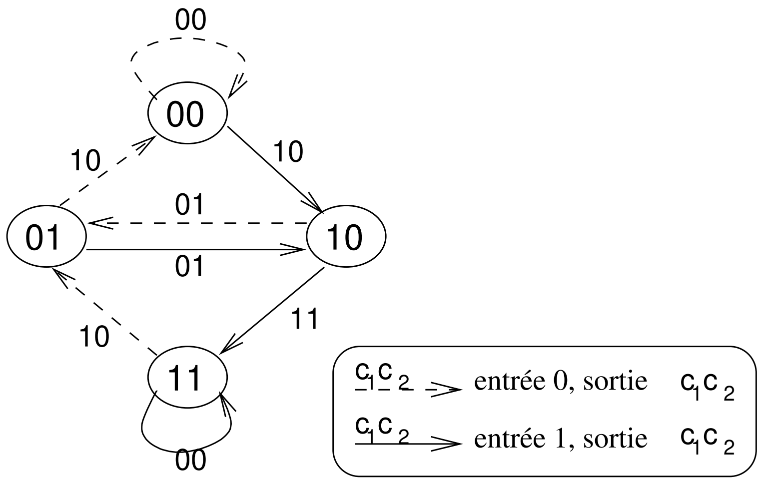

FIGURE 1 – Un codeur catastrophique.

f) On souhaite quantifier des échantillons de parole sur un nombre k d'éléments binaire minimal sans que le bruit de quantification soit audible. Si le niveau du signal est de 60 dB (en échelle des dB ajustée), quelle est la valeur de k minimale ? On rappelle que lors de la quantification scalaire uniforme de la parole sur k bits, le rapport signal à bruit de quantification en dB vaut environ $6k - 13$.

g) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ? Si l'on code chaque échantillon de e sur 5 bits et l'ensemble $\{(a_i)_{1\leq i\leq 10};\, \sigma_e\}$ sur 100 bits, quel est le débit du codeur ?

h) Dans le codage d'une trame MPEG-1 couche 1, le nombre de bits n_i par échantillon dans chaque bande i doit respecter deux contraintes :

— chaque n_i doit être supérieur à une certaine valeur

— la somme des n_i doit être inférieur à une autre valeur

A quelles contraintes physiques correspondent ces deux contraintes mathématiques ?

2 Exercices

2.1 Codage de canal en bloc (6 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(6,3)$ dont l'ensemble des mots de code est $\{c^1, \ldots c^8\}$ tel que :

$$\begin{array}{llll} c^1 = [000000] & c^2 = [001011] & c^3 = [010110] & c^4 = [011101] \\ c^5 = [100101] & c^6 = [101110] & c^7 = [110011] & c^8 = [111000] \end{array}$$

Sa matrice de contrôle est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Combien y a-t-il de syndrômes possibles ?

b) Combien y a-t-il de vecteurs d'erreur ayant :
— au plus 1 bit à 1 ?
— au plus 2 bits à 1 ?

c) Le calcul du syndrôme permet non seulement de détecter les erreurs en trouvant un syndrôme non nul, mais aussi de localiser et donc corriger les erreurs, si l'on peut associer un syndrôme à chaque vecteur erreur corrigible. Le pouvoir de correction est donc étroitement lié au nombre de syndrômes. Dans le cas présent, quel est le pouvoir de correction du code ?

d) Calculer la distance minimale de ce code et vérifiez le résultat de la question c.

e) On reçoit le mot $r = 100101$. Calculer le syndrôme et conclure.

2.2 Codage de source (5 points)

Rappel : vos réponses doivent être argumentées, en français et précisément.

a) Soit un signal échantillonné x dont les échantillons suivent une loi gaussienne, comme illustré sur la figure 2. On le quantifie sur M niveaux de quantification répartis uniformément. Les différents niveaux sont ensuite représentés par des mots binaires de longueur variable, selon un codage entropique. On suppose que les échantillons successifs sont indépendants.

Pourquoi le niveau x_i est-il codé sur moins d'éléments binaires que le niveau x_j ?

Au lieu de coder les échantillons un par un, on les code par paquets de N. Montrer que cela permet de tendre vers une efficacité de 1 quand N tend vers l'infini. Dans ce cas, combien de bits d'information porte chaque élément binaire ?

b) Les niveaux de quantification ne sont pas nécessairement répartis uniformément : il peuvent être répartis de manière adaptée à la densité de probabilité des échantillons, de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne de quantification pour un nombre donné de niveaux. Ce principe est illustré sur la figure 3 : les échantillons suivent une loi gaussienne et les niveaux de quantification sont plus concentrés pour les valeurs les plus faibles. Ainsi, comme ces valeurs sont les plus probables, l'erreur de quantification sera plus faible en moyenne.

Les lignes pointillés sur la figure 3 désignent les seuils de quantification. Toutes les aires hachurées entre deux seuils de quantification sont égales. On rappelle que l'aire sous la densité de probabilité entre deux bornes a et b est égale à $\mathrm{P}(a \leq x \leq b)$.

Supposons que l'on ait $M = 2^n$ niveaux de quantification. Calculer l'efficacité de ce codage si l'on code chaque niveau de quantification par un mot de n éléments binaires. Pourrait-on faire mieux avec un codage entropique (codage de Huffman par exemple) ?

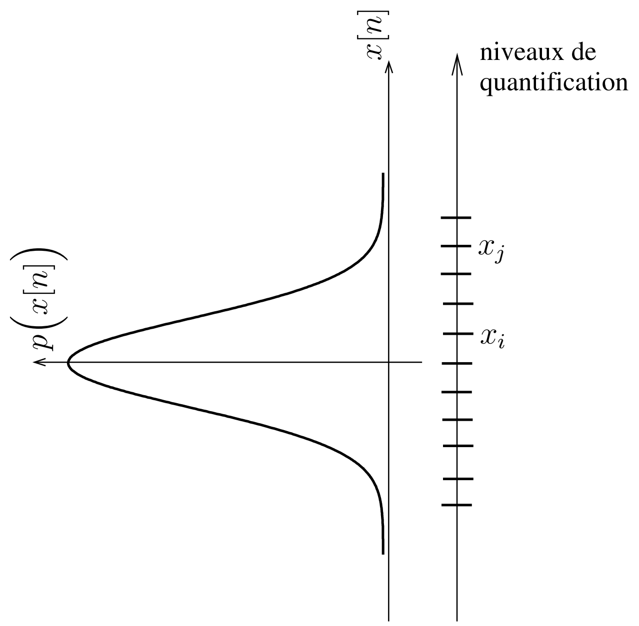

FIGURE 2 – Répartition uniforme des niveaux de quantification pour un signal x de densité de probabilité gaussienne.

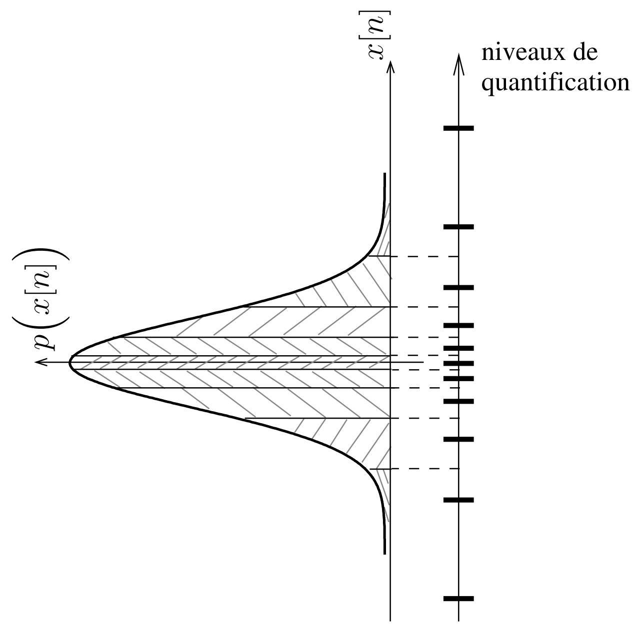

FIGURE 3 – Répartition optimale des niveaux de quantification pour un signal x de densité de probabilité gaussienne.

Annexes

Combinatoire

Nombre de combinaisons de k éléments parmi n :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$$

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$