CC du 7 mars 2022 : correction

Codage de canal en bloc

a) Syndrôme $s = r H^T$ avec $\begin{cases} r = \text{mot reçu, de dim. } 1 \times 6 \\ H^T \text{ de dimensions } 6 \times 3 \end{cases}$

r peut être toutes les combinaisons de 6 bits
H^T est de rang 3
Donc s peut être tous les mots de 3 bits
Donc 8 syndrômes possibles.

b) Il y a $\begin{cases} 1 \text{ vecteur d'erreur avec } 0 \text{ erreur} \\ 6 \text{ ———————— } 1 \text{ bit à } 1 \end{cases}$

Donc 7 vecteurs erreur avec au plus 1 bit à 1
Il y a $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ vecteurs erreur avec 2 bits à 1
Donc 22 vecteurs erreur avec au plus 2 bits à 1

c) Pour pouvoir associer 1 syndrôme à chaque vecteur erreur corrigible, il ne faut pas plus de 1 erreur (8 syndrômes pour 7 motifs d'erreur). Donc pouvoir de correction = 1

d) d_{min} = poids de Hamming minimal non nul des mots de code
$= 3$
Donc pouvoir de correction $= \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$

e) $s = r H^T = [0\ 0\ 0]$
On en conclut que soit il n'y a pas d'erreur, soit l'erreur est un mot de code

Codage de Source

a) D'après la ddp, les valeurs de x autour de x_i sont plus fréquentes que celles autour de x_j. Or le principe du codage entropique est de coder les symboles les plus fréquents par les mots les plus courts.

Soit $H(X)$ l'entropie de la source dont l'alphabet est l'ensemble des niveaux de quantification.
Comme les échantillons successifs sont indépendants, la source est sans mémoire, donc l'entropie d'un paquet de N échantillons quantifiés est $N.H(X)$
D'après le théorème du codage, il existe un code à décodage unique et instantané tel que la longueur moyenne L_N des mots codant les paquets vérifie : $NH(X) \leq L_N < NH(X) + 1$

$$H(X) \leq \frac{L_N}{N} < H(X) + \frac{1}{N}$$

Donc $\frac{L_N}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} H(X)$, i.e. $L_N \to NH(X)$

Comme l'efficacité vaut $\frac{NH(X)}{L_N}$, elle tend vers 1

b) $H(X) = -\sum_{i=1}^{M} P(x_i) \log_2 P(x_i)$

Or P(quantification de $x[n]$ par x_i)
$= P$(seuil inf de $x_i \leq x[n] \leq$ seuil sup. de x_i)
$=$ constante indépendante de i

Donc $\forall i$, $P(x_i) = 1/M$

Donc $H(X) = + \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} \log_2 M = \log_2 M = n$

Efficacité $= \frac{H(X)}{n} = 1$ On ne peut pas faire mieux