Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI

Systèmes de Communication

Épreuve de contrôle continu (1h30) - 6 mars 2023

— Documents et appareils électroniques interdits
— Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
— Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
— **Tout calcul doit être expliqué, toute réponse doit être justifiée.**
— Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (5 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?

b) Donner la définition de l'entropie d'une source, en français, sans formule mathématique.

c) L'oreille humaine perçoit des sons entre 20 Hz et 22 kHz. Expliquez pourquoi, lorsqu'on veut une qualité hifi, les sons sont échantillonnés à 44,1 kHz.

d) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de

20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ? Si l'on code chaque échantillon de e sur 5 bits et l'ensemble $\{(a_i)_{1\leq i\leq 10}; \sigma_e\}$ sur 100 bits, quel est le débit du codeur ?

e) On considère le codage perceptif d'un signal audio. Pour la séquence de signal dont le spectre d'amplitude et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1, quelle condition doit vérifier le bruit de codage ?

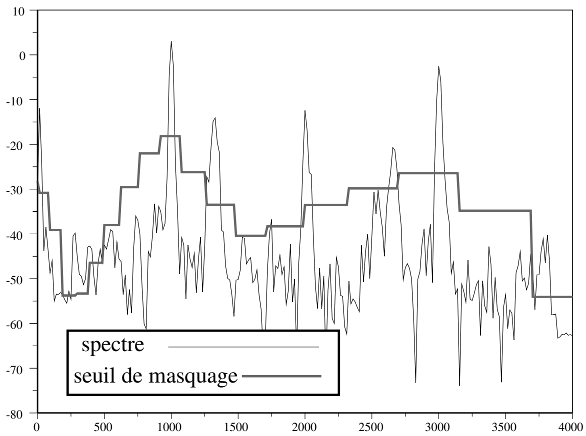

FIGURE 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

2 Exercices

2.1 Codage de canal en bloc (2 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(6,3)$ dont l'ensemble des mots de code est $\{c^1, \ldots c^8\}$ tel que :

$$\begin{array}{llll} c^1 = [000000] & c^2 = [001011] & c^3 = [010110] & c^4 = [011101] \\ c^5 = [100101] & c^6 = [101110] & c^7 = [110011] & c^8 = [111000] \end{array}$$

Sa matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le mot de code associé à [111] ?

b) Calculer la distance minimale de ce code. En déduire le pouvoir de correction et le pouvoir de détection.

c) On reçoit le mot $r = 100111$. Décoder.

2.2 Codage de canal convolutif (5 points)

a) Le codeur convolutif dont le diagramme d'états est représenté sur la figure 2 est initialisé à l'état 00. Si l'on code la séquence 1011, quelle est la sortie ?

b) Lors du codage d'une séquence, on doit toujours compléter la séquence par un nombre constant de 0 pour remettre le codeur à l'état 00. Quel doit être la valeur minimale de ce nombre pour revenir à l'état 00 dans tous les cas ?

c) Quel est le rendement du codeur ? Si l'on code des séquences de 8 éléments binaires, en tenant compte des 0 ajoutés (qui ne sont pas des données utiles), quel est le rendement ?

d) Expliquer alors pourquoi on préfère utiliser des codes en blocs pour coder des petites séquences.

e) Supposons que l'on code une longue séquence de 0. Sans faire de diagramme en treillis, montrer que 3 erreurs lors de la transmission suffisent à produire une infinité d'erreurs en réception lors du décodage.

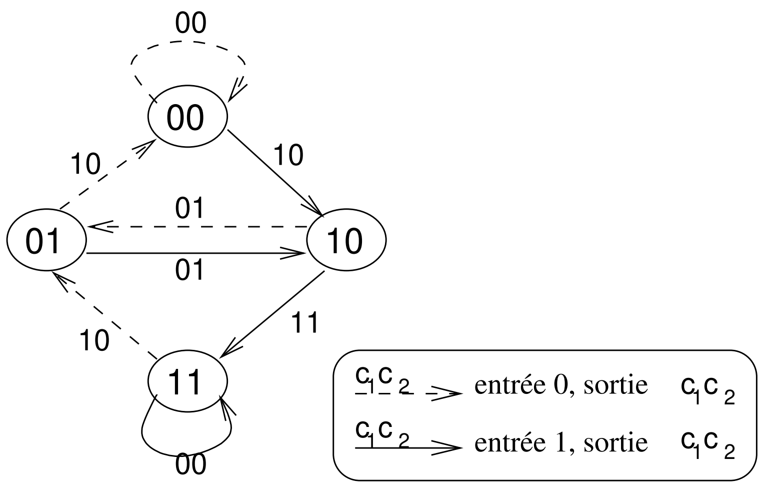

FIGURE 2 – Diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2,1,3)$ (entrée 1 bit, sortie 2 bits).

2.3 Codage de source et modulation (9 points)

Soit une source binaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(1) = p \ll 1$ (par exemple $1/100$) et $\mathrm{P}(0) = 1 - p$. L'entropie de X peut être approchée par : $H(X) \simeq -p\log_2(p)$.

a) On groupe les éléments binaires de X par mots de 2 éléments binaires. On note X^2 la nouvelle source ainsi constituée.

— Calculer, en fonction de p, la probabilité de chaque mot (sans approximations)
— Quelle est l'entropie de X^2 ?
— Construire un code de Huffman de X^2
— Calculer la longueur moyenne des mots de code avec une approximation au premier ordre en p (c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta p$)

— En déduire l'efficacité du codage et comparer avec celle qu'on avait sans regroupement des éléments binaires.

b) Le flux codé est découpé en mots de 3 éléments binaires et chaque mot est transmis par un symbole d'une modulation de phase à 8 états, dont la constellation est représentée sur la figure 3.

— Quelle association mot binaire - symbole vaut-il mieux choisir ?

— Quelle est la séquence binaire initiale correspondant à la suite de symboles $ABCD$?

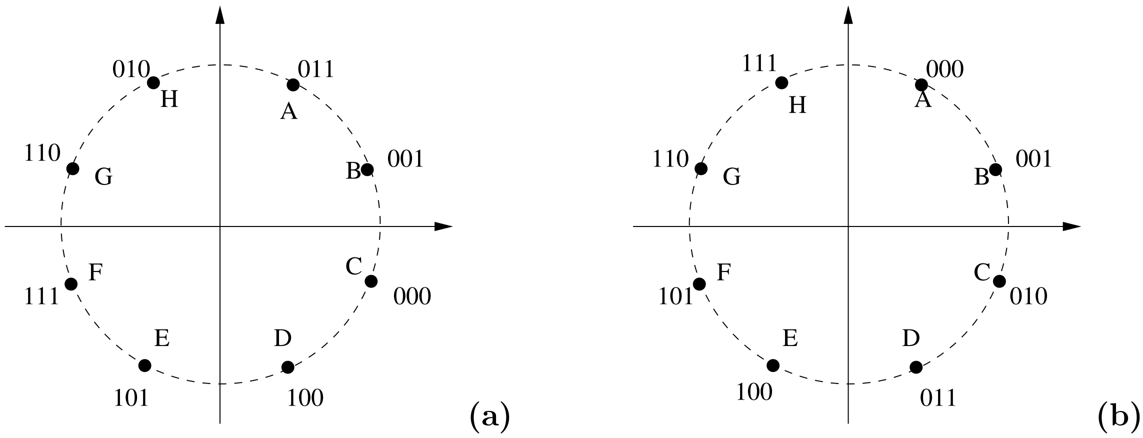

FIGURE 3 – Constellation d'une modulation de phase à 8 états, avec deux associations possibles mot binaire - symbole.

c) Le bruit de la liaison provoque un déplacement aléatoire du point reçu par rapport à la position du symbole émis. Comme le symbole détecté est celui le plus proche du point reçu, une erreur survient dès que le déplacement est trop important. On suppose que lors de l'émission d'un symbole, les seuls risques d'erreur de détection sont liés à une confusion avec un de ses plus proches voisins (des déplacements plus importants sont trop peu probables).

— En notant p la probabilité de confusion d'un symbole avec un de ses plus proches voisins, que vaut $\mathrm{P}(\overline{R_i}|S_i)$ pour chaque symbole S_i de la constellation ? ($\overline{R_i}$ signifie "détection d'un symbole différent de S_i)

— Définir de manière ensembliste l'événement erreur.

— En supposant que les 8 symboles sont équiprobables, calculer la probabilité d'erreur par symbole P_e et en déduire la probabilité d'erreur binaire.

Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$