Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique

L3 MI

Systèmes de Communication

Épreuve de contrôle continu (1h30) - 20 mars 2024

- Documents et appareils électroniques interdits
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
- **Tout calcul doit être expliqué, toute réponse doit être justifiée.**
- Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (6 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?

b) On souhaite quantifier des échantillons de parole sur un nombre k d'éléments binaire minimal sans que le bruit de quantification soit audible. Si le niveau du signal est de 60 dB (en échelle des dB ajustée), quelle est la valeur de k minimale ? On rappelle que lors de la quantification scalaire uniforme de la parole sur k bits, le rapport signal à bruit de quantification en dB vaut environ $6k - 13$.

c) Dans le codage d'une trame MPEG-1 couche 1, le nombre de bits par échantillon dans chaque bande i doit respecter la relation $n_i > \frac{P^i_{\mathrm{dB}} - M_i + K}{6}$, où P^i_{dB}, M_i et K désignent respectivement la puissance du signal, le seuil de masquage dans la i^{eme} bande et une constante. Quelle contrainte auditive traduit cette formule ? Si le canal de communication impose un certain débit, quel problème peut poser cette contrainte sur les n_i ?

d) Donnez un avantage et un inconvénient du codage biphase (ou Manchester) par rapport au codage NRZ.

e) Lors de la transmission d'un signal NRZ sur un canal à bande passante limitée, pourquoi remplace-t-on les impulsions rectangulaires (fonction porte) par des impulsions en cosinus surélevé ?

2 Exercices

2.1 Codage de canal en bloc (5 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(7,4)$ de matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sa matrice de contrôle est :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Supposons que le canal introduise une seule erreur sur un mot de code émis. Pour chaque position possible de cette erreur, calculer le syndrome correspondant. Pourquoi, ici, le syndrome permet-il de corriger l'erreur ? Si vous convertissez en nombre décimal chacun de ces syndromes, que constatez-vous ?

b) Combien de syndromes possibles y a-t-il en tout ? Pourquoi ce code ne permet-il pas de corriger plus qu'une erreur ?

c) On reçoit le mot $r = 1101111$. Décodez soit en utilisant le syndrome, soit en cherchant le mot de code à distance minimale de r.

2.2 Codage de canal convolutif (3 points)

a) Considérons le codeur de la figure 1. Quelle est la sortie associée à l'entrée 01011 ? (expliquez)

b) Supposons que l'on code une longue séquence de 0. Sans faire de diagramme en treillis, montrer que 3 erreurs lors de la transmission suffisent à produire une infinité d'erreurs en réception lors du décodage.

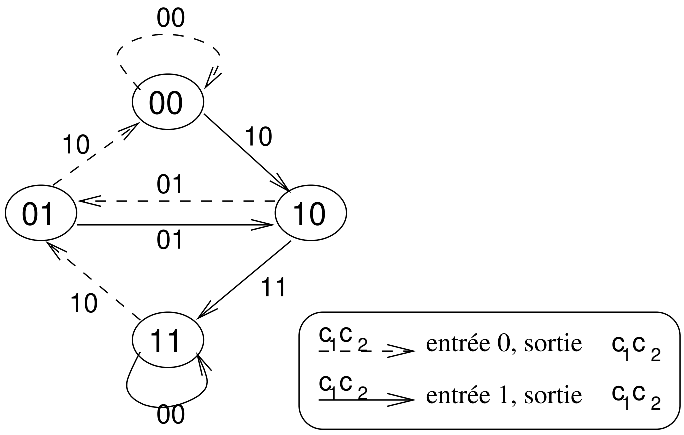

FIGURE 1 – Diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2, 1, 3)$.

2.3 Codage de source (6 points)

Soit une source binaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(1) = p \ll 1$ (par exemple $1/100$) et $\mathrm{P}(0) = 1 - p$. L'entropie de X peut être approchée par : $H(X) \simeq -p \log_2(p)$.

a) On groupe les éléments binaires de X par mots de 3. On appelle X^3 la nouvelle source ainsi constituée. Quelle est l'entropie de X^3 ? Si l'on transmet ces mots directement, combien de bits d'information porte chaque élément binaire ?

mot	probabilité
000	$(1-p)^3$
001	$(1-p)^2p$
010	$(1-p)^2p$
011	$(1-p)p^2$
100	$(1-p)^2p$
101	$(1-p)p^2$
110	$(1-p)p^2$
111	p^3

b) Les probabilités des mots de X^3 sont indiquées selon le tableau ci-contre. Faites un codage de Huffman de la source X^3. (on rappelle que $p \ll 1$)

c) Calculer la longueur moyenne des mots de code avec une approximation au premier ordre en p (c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta p$).

d) Combien de bits d'information porte alors chaque élément binaire ? Comparez l'efficacité à celle de la question a.

Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$