Université de Paris / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI

Systèmes de Communication

Épreuve de contrôle continu (1h30) - 19 mars 2025

- Documents et appareils électroniques interdits
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
- **Tout calcul doit être expliqué, toute réponse doit être justifiée.**
- Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (6 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Lors de la réception d'un message binaire issu d'un codage en bloc, quelles erreurs ne sont pas détectables par le calcul du syndrome ?

b) Qu'est-ce que l'entropie d'une source ? (on ne demande pas la formule mathématique, mais le sens de cette notion, exprimé en français clair)

c) L'oreille humaine perçoit des sons entre 20 Hz et 22 kHz. Expliquez pourquoi, lorsqu'on veut une qualité hifi, les sons sont échantillonnés à 44,1 kHz.

d) On considère le codage perceptif d'un signal audio. Pour la séquence de signal dont le spectre d'amplitude et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1, quelle condition doit vérifier le bruit de codage ?

e) À quoi sert le *filtre adapté* dans un récepteur ?

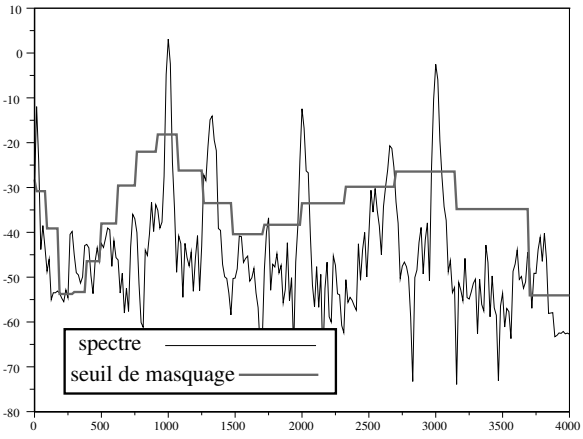

FIGURE 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

f) Lors de la transmission d'un signal NRZ sur un canal à bande passante limitée, pourquoi remplace-t-on les impulsions rectangulaires (fonction porte) par des impulsions en cosinus surélevé ?

2 Exercices

2.1 Codage de source (6 points)

Rappel : vos réponses doivent être argumentées, en français et précisément.

a) Soit un signal échantillonné x dont les échantillons suivent une loi gaussienne, comme illustré sur la figure 2. On le quantifie sur M niveaux de quantification répartis uniformément. On note X la source dont l'alphabet est l'ensemble des niveaux de quantification. Les différents niveaux sont ensuite représentés par des mots binaires de longueur variable, selon un codage entropique. On suppose que les échantillons successifs sont indépendants.

Pourquoi le niveau x_i est-il codé sur moins d'éléments binaires que le niveau x_j ?

Au lieu de coder les échantillons un par un, on les code par paquets de N. On note X^N la nouvelle source ainsi constituée, et L_N la longueur moyenne des mots de code. Montrer que cela permet de tendre vers une efficacité de 1 quand N tend vers l'infini. Dans ce cas, combien de bits d'information porte chaque élément binaire ?

b) Les niveaux de quantification ne sont pas nécessairement répartis uniformément : il peuvent être répartis de manière adaptée à la densité de probabilité des échantillons, de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne de quantification pour un nombre donné de niveaux. Ce principe est illustré sur la figure 3 : les échantillons suivent une loi gaussienne et les niveaux de quantification sont plus concentrés pour les valeurs les plus faibles. Ainsi, comme ces valeurs sont les plus probables, l'erreur de quantification sera plus faible en moyenne.

Les lignes pointillés sur la figure 3 désignent les seuils de quantification. Toutes les aires hachurées entre deux seuils de quantification sont égales. On rappelle que l'aire sous la densité de probabilité entre deux bornes a et b est égale à $\mathrm{P}(a \leq x \leq b)$.

Supposons que l'on ait $M = 2^n$ niveaux de quantification. Calculer l'efficacité de ce codage si l'on code chaque niveau de quantification par un mot de n éléments binaires. Pourrait-on faire mieux avec un codage entropique (codage de Huffman par exemple) ?

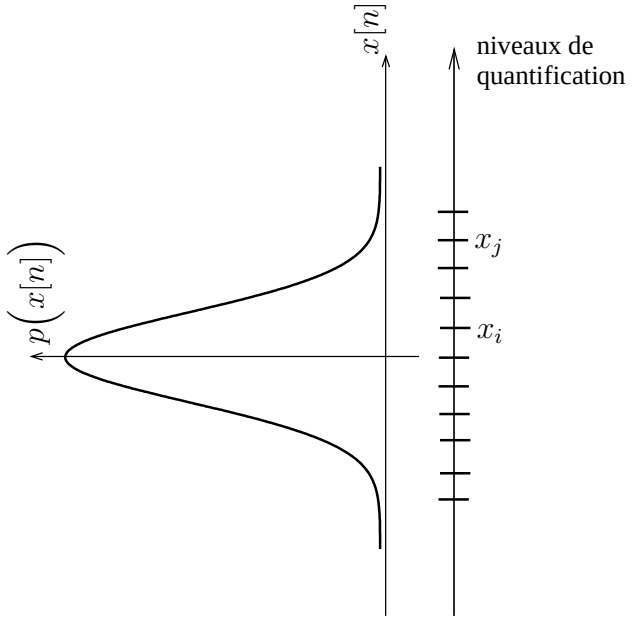

FIGURE 2 – Répartition uniforme des niveaux de quantification pour un signal x de densité de probabilité gaussienne.

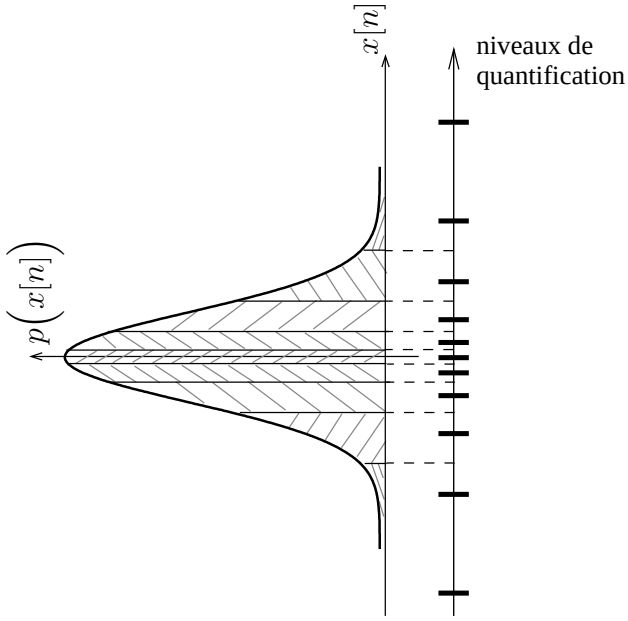

FIGURE 3 – Répartition optimale des niveaux de quantification pour un signal x de densité de probabilité gaussienne.

2.2 Codage de canal en bloc (5 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoirs de détection et de correction.

b) Si la matrice génératrice est de la forme $[I_k, P]$, avec I_k la matrice identité de rang k et P une matrice quelconque de dimensions $k \times n$, alors la matrice de contrôle s'écrit $H = [P^\top, I_{n-k}]$. Exprimer H dans notre cas.

c) On reçoit le mot $r = 010111$. Calculer le syndrome s et conclure.

d) On reçoit le mot $r = 111011$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

2.3 Codage de canal convolutif (4 points)

La figure 4 représente le diagramme d'états d'un codeur convolutif produit par un agent conversationnel utilisant des grands modèles de langage. Ici, les bits entrent par la droite dans le registre du codeur et le décalage du registre se fait vers la gauche, de sorte que l'état du codeur est défini par les 3 bits les plus à droite avant décalage. Les flèches en trait plein correspondent aux entrées 1, celles en trait pointillé correspondent aux entrées 0.

a) Quels sont le rendement et la longueur de contrainte du codeur ? Quelle est la sortie associée à l'entrée 1010 ? (On part de l'état 000)

b) Pourquoi ce diagramme est-il faux ? (donner 2 erreurs de nature différente)

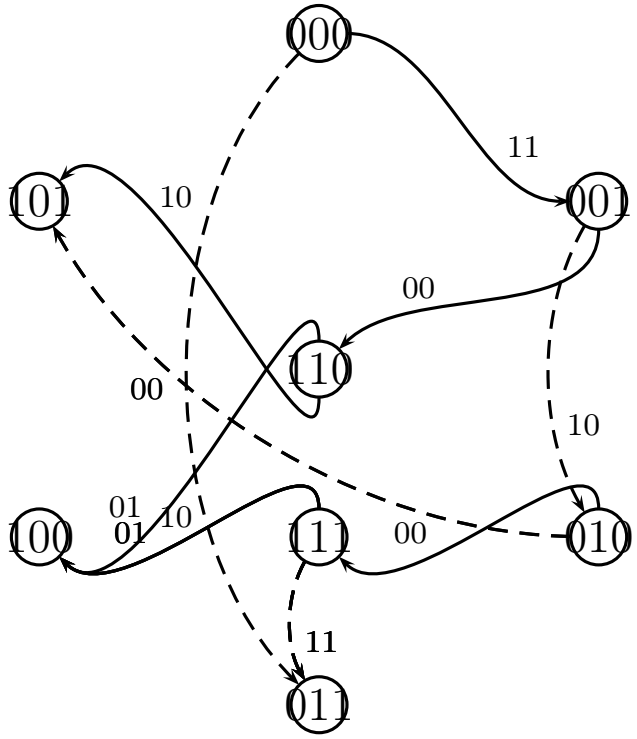

FIGURE 4 – Diagramme d'états d'un codeur convolutif.

Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$