Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI

Systèmes de Communication

Examen final (1h30) - 5 mai 2014

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie.*

1 Questions de cours (8 points)

a) Que représente l'entropie d'une source ?

b) L'oreille humaine perçoit des sons entre 20 Hz et 22 kHz. Expliquez pourquoi, lorsqu'on veut une qualité hifi, les sons sont échantillonnés à 44,1 kHz.

c) Quel est l'avantage de la modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature (MAQ) par rapport à la modulation d'amplitude simple (MDA) ?

d) Pourquoi appelle-t-on le CDMA codage "à étalement de spectre" ?

e) Dans un réseau UMTS, en liaison descendante, on utilise :
- des codes OVSF, parfaitement orthogonaux, comme codes de channelization, pour différencier les utilisateurs d'une même cellule ;
- des codes de Gold, imparfaitement orthogonaux, comme codes de scrambling, pour différencier les utilisateurs de cellules voisines.

Un utilisateur U_i reçoit un message binaire de sa station de base B. Le message binaire décodé est parasité par ceux de tous les utilisateurs U_j de cellules proches utilisant le même code de channelization. Lors de l'émission d'un symbole binaire $a_i = \pm 1$, le symbole reçu après démodulation, décodage selon le code de channelization et décodage selon le code de scrambling de U_i, est :

$$\tilde{a}_i = a_i + \sum_{j \neq i} a_j \frac{S^i.S^j}{S^i.S^i} \frac{U_i B}{U_j B}$$

où $a_j = \pm 1$ et S^k représente la séquence de Gold attribuée à l'utilisateur U_k comme code de scrambling. $S^i.S^j$ désigne le produit scalaire entre S^i et S^j. $U_k B$ désigne la distance entre l'utilisateur U_k et la borne B.

Expliquer précisément (en argumentant sur les valeurs de $S^i.S^j/S^i.S^i$ et U_iB/U_jB) pourquoi le terme d'interférence est négligeable.

f) Quel est l'avantage de l'OFDMA par rapport à un multiplexage fréquentiel classique ? Pourquoi est-il délicat à mettre en œuvre ?

g) Comment se traduit l'effet Doppler après démodulation d'une modulation d'amplitude ?

h) Dans les systèmes de communications mobiles, le flux binaire issu du codage de source de la parole subit différents niveaux de codage de canal. Par exemple, le GSM ne code qu'une partie des bits (une à deux fois selon la classe), tandis que l'UMTS utilise 5 niveaux de codage. Expliquez ce choix de ne pas coder tous les bits et d'utiliser des niveaux de protection différents pour ceux qui sont codés. Expliquez à quoi sert l'entrelacement des bits qui suit le codage de canal.

2 Exercices

2.1 Transmission sur un canal à bande passante limitée (7 points)

a) Soit une transmission en bande de base NRZ binaire, utilisant des impulsions en cosinus surélevé, avec un facteur de retombée $\alpha = 0.2$. Le canal est un cable modélisé par un filtre passe-bas de bande passante $\mathcal{B} = 1.2$ MHz.

A quel débit maximal peut-on transmettre sans interférence entre symboles (IES) ?

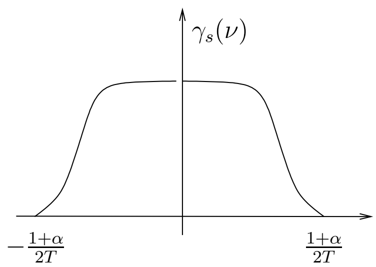

FIG. 1 – Densité spectrale de puissance d'un signal NRZ utilisant des impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α, de durée symbole T.

b) On transmet maintenant au même débit par voie hertzienne, via un canal passe-bande de même bande passante $\mathcal{B}$. Le signal NRZ M-aire module donc une porteuse de fréquence f_0 au milieu de la bande passante.

- Dessiner la densité spectrale de puissance du signal émis.
- Quelle doit être la valeur minimale de M pour ne pas avoir d'IES ?

c) On tient compte maintenant du bruit du canal. L'objectif est de transmettre, sans interférence entre symboles (IES), avec un débit binaire D maximal et une probabilité d'erreur binaire $P_e < 10^{-3}$. Les courbes de la figure 2 indiquent, pour différentes modulations, la probabilité d'erreur en fonction du rapport $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$, E_b désignant l'énergie par élément binaire et $N_0/2$ la densité spectrale de puissance (constante) du bruit du canal. La puissance P de l'émetteur est fixée, de telle sorte que :

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 75 - 10 \log D$$

– Calculer la durée symbole minimale T_{min} imposée par la limitation de la bande passante (on admettra que la DSP d'une MDP-M ou d'une MAQ-M est la même que celle d'une MDA-M). En déduire les débits minimaux correspondants pour une MDP-2, une MDP-4 et une MAQ-16. Calculer les valeurs correspondantes minimales de $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$. A toutes fins utiles : $10\log(2) \simeq 3$.
– En tenant compte également de la spécification $P_e < 10^{-3}$, déterminez, en utilisant les courbes de la figure 2, laquelle des trois modulations permet d'atteindre le débit maximal.

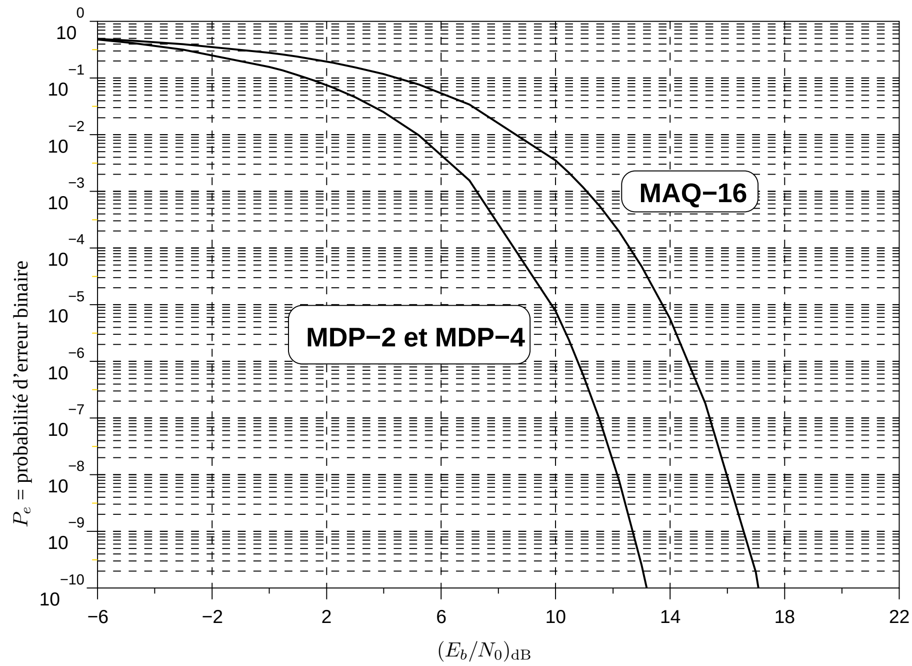

FIG. 2 – Probabilités d'erreur binaire de 3 modulations.

2.2 Comparaison MAQ-16 / MDP-16 (5 points)

L'objectif de cet exercice est de comparer les probabilités d'erreur d'une MAQ-16 et d'une MDP-16 pour un même débit et une même énergie par élément binaire.

a) Sur la feuille de réponse en dernière page, indiquez pour chacune des deux constellations le mot binaire porté par chaque symbole, dans le cas d'un codage de Gray. *Ne pas écrire votre nom ou autre signe distinctif sur la feuille de réponse.*

b Le canal introduit un bruit blanc gaussien centrée de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on obtient, pour chaque symbole émis, un point $M = (z_c, z_s)$ tel que :
– pour la MAQ-16 et pour un symbole $S_{ij} = (Va_i, Vb_j)$,

$$\begin{aligned} z_c &= a_i + b_c \\ z_s &= b_j + b_s \end{aligned}$$

– pour la MDP-16 et pour un symbole $S_k = (A\cos\phi_k, A\sin\phi_k)$,

$$\begin{aligned} z_c &= A\cos\phi_k + b_c \\ z_s &= A\sin\phi_k + b_s \end{aligned}$$

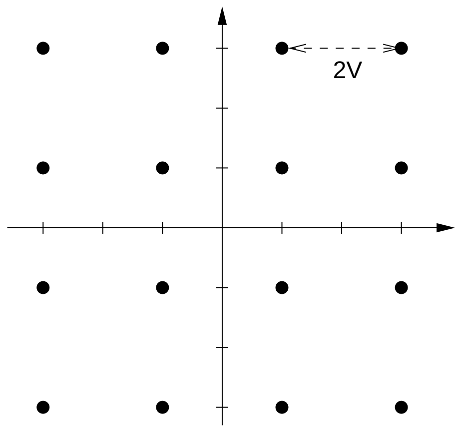

FIG. 3 – MAQ-16.

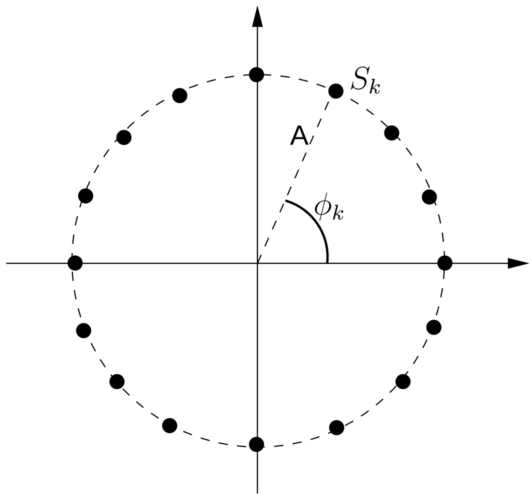

FIG. 4 – MDP-16.

où b_c et b_s sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, de variance $\sigma^2 = N_0/T$, avec T la durée symbole.

Pour la MAQ-16, la probabilité d'erreur par élément binaire vaut :

$$P_{eb} = \frac{3}{4} Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

avec

$$Q : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

On va maintenant calculer la probabilité d'erreur pour la MDP-16. Considérons tout d'abord l'émission du symbole S_0 correspondant à $\phi_0 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} z_c | S_0 &= A + b_c \\ z_s | S_0 &= b_s \end{aligned}$$

La zone de décision associée à S_0 est représentée en grisé sur la figure 5. L'angle de ce secteur angulaire étant faible, cette zone de décision peut être approchée par une bande de plan dans le voisinage de S_k, comme indiqué sur la figure 6. Si le bruit est modéré, M est dans le voisinage de S_k.

Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître le symbole S_0 peut s'écrire :

$$\mathrm{P}(\overline{R_0} | S_0) = 1 - \mathrm{P}\Big(-A \sin \frac{\pi}{16} < b_s < A \sin \frac{\pi}{16} \Big)$$

Cette grandeur peut s'exprimer à l'aide de la fonction Q :

$$\mathrm{P}(\overline{R_0} | S_0) = 2Q\Big(\frac{A}{\sigma} \sin \frac{\pi}{16} \Big)$$

En considérant que les symboles sont équiprobables, en déduire la probabilité d'erreur par symbole puis la probabilité d'erreur par élément binaire.

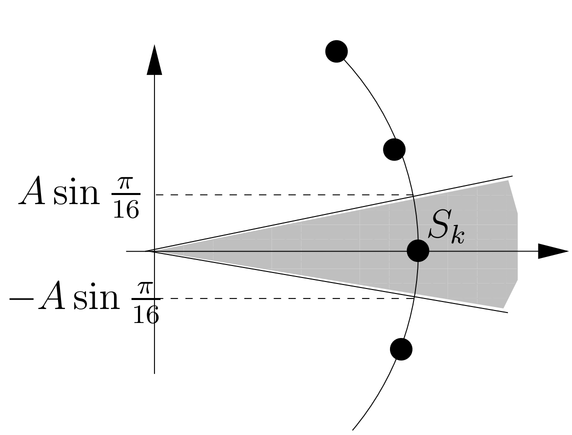

FIG. 5 – Zone de décision pour le symbole S_0 de la MDP-16.

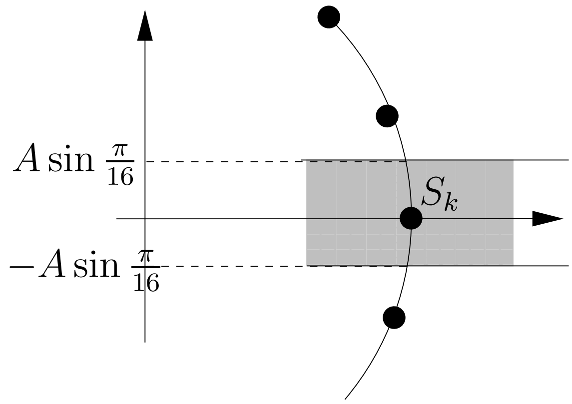

FIG. 6 – Zone de décision approchée au voisinage de S_0.

c) L'énergie moyenne par symbole E_S vaut :
- $A^2T/2$ pour la MDP-16 ;
- $5V^2T$ pour la MAQ-16.

On a alors :

$$\begin{aligned}\text{Pour la MAQ} - 16, \quad P_{eb} &= \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{5N_0}}\right)\\ \text{Pour la MDP} - 16, \quad P_{eb} &= \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}}\sin\frac{\pi}{16}\right)\end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt{\frac{1}{5}} \simeq 1,6 \times \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{16}$, à l'aide de la figure 7, comparez les probabilités d'erreur des deux modulations à débit et énergie par élément binaire identiques.

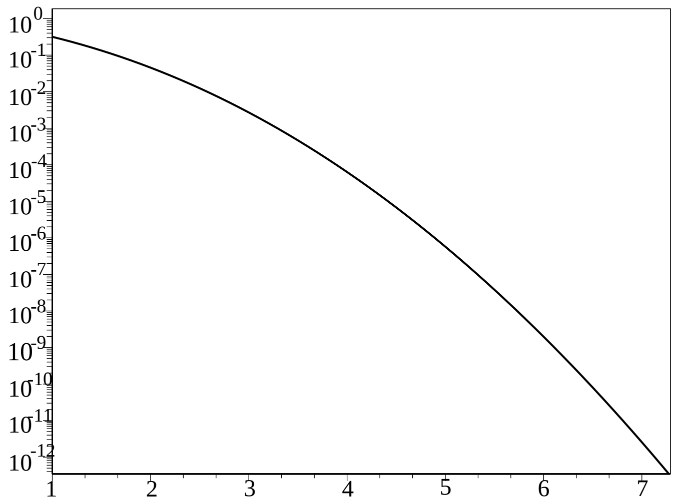

FIG. 7 – Fonction Q.

3 Feuille de réponse

Toute feuille portant un nom ou tout autre signe distinctif sera considérée comme nulle.

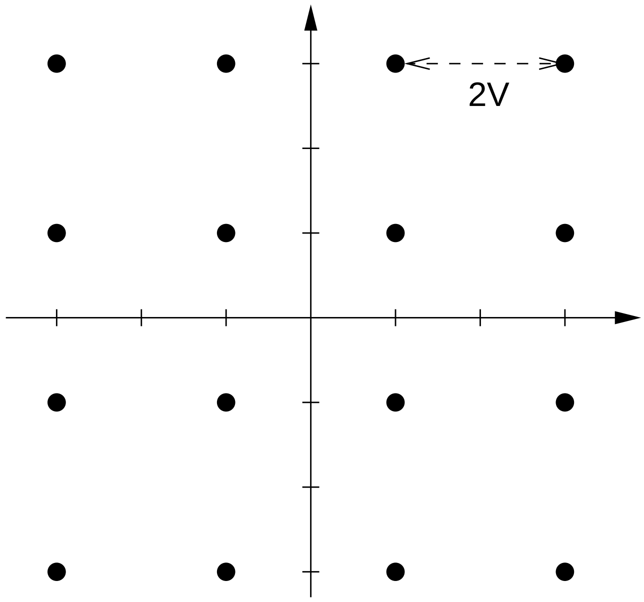

FIG. 8 – MAQ-16.

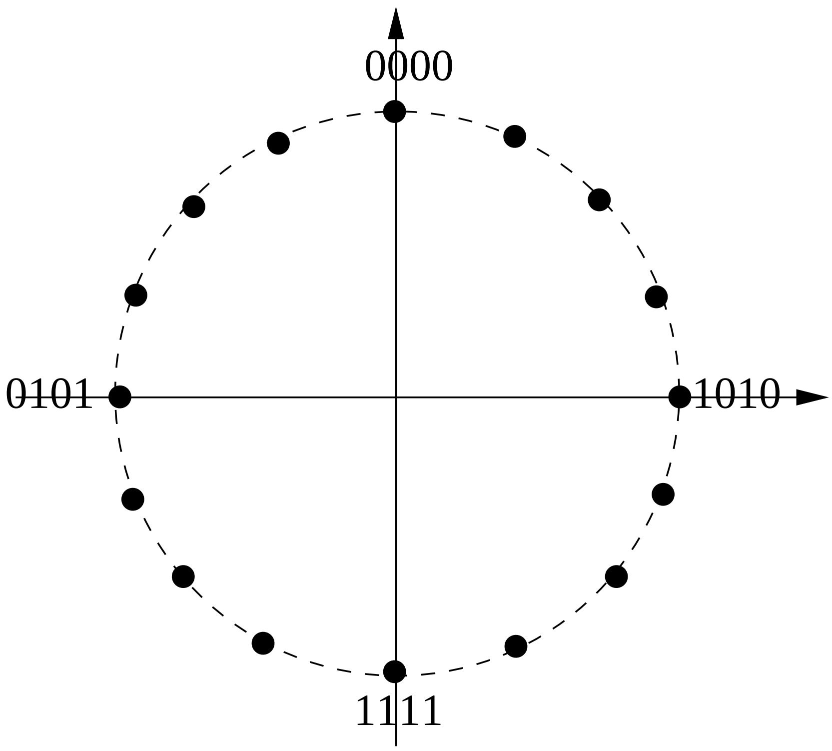

FIG. 9 – MDP-16.