Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique

L3 MI

Systèmes de Communication

Examen 1ère session (1h30) - 4 mai 2016

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Dans les exercices, il est possible de traiter une question sans avoir réussi la précédente, sauf pour les questions de conclusion. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (8 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc par la méthode du syndrome, que peut-on conclure si celui-ci est égal au vecteur nul ?

b) L'oreille humaine perçoit des sons entre 20 Hz et 22 kHz. Expliquez pourquoi, lorsqu'on veut une qualité hifi, les sons sont échantillonnés à 44,1 kHz.

c) Que dit le critère de Nyquist sur la transmisson sur canal à bande passante limitée ? Pour atteindre la limite exprimée par ce théorème, par quelle type d'impulsion faudrait-il remplacer la fonction porte dans l'expression d'un signal NRZ ? Pourquoi n'est-ce pas possible en pratique et quel type d'impulsions utilise-t-on ?

d) Soit une transmission par modulation d'amplitude à 4 états. On émet un symbole $S_k = x_k.\cos(2\pi f_0 t)$, avec f_0 la fréquence de la porteuse et $x_k \in \{\pm V_0; \pm 3V_0\}$. En réception, si la porteuse de réception est parfaitement synchronisée en phase avec celle d'émission, après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on reçoit x_k plus un bruit lié à celui du canal.

Que se passe-t-il si la porteuse de réception est déphasée de ϕ ? La figure 1 représente, pour une transmission donnée avec $V_0 = 1$, un point pour chaque échantillon de réception, d'abcisse la valeur de l'échantillon et d'ordonnée aléatoire [1]. Quelles sont les intervalles de décision associées à chaque symbole ? Pourquoi a-t-on un taux d'erreur élevé alors que les quatre nuages de points sont bien distincts ?

1. Notez que l'ordonnée ici n'a pas de signification, elle sert juste à différencier les points.

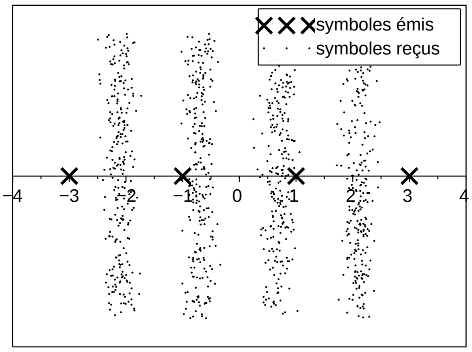

FIGURE 1 – Constellation des symboles d'une MDA-4 en émission et en réception.

e) Considérons un multiplexage par code sur un réseau mobile. Lorsqu'un utilisateur U_i reçoit un message binaire de sa station de base B, le message binaire décodé est parasité par ceux destinés aux autres utilisateurs U_j. Lors de l'émission d'un symbole binaire $a_i = \pm 1$, le symbole reçu après démodulation et décodage selon le code attribué à U_i est :

$$\tilde{a}_i = a_i + \sum_{j \neq i} a_j \frac{S^i.S^j}{S^i.S^i} \frac{U_i B}{U_j B}$$

où $a_j = \pm 1$ et S^k représente le code attribué à l'utilisateur U_k. $S^i.S^j$ désigne le produit scalaire entre S^i et S^j. $U_k B$ désigne la distance entre l'utilisateur U_k et la borne B.

Supposons qu'on utilise des codes de Gold. A quelle condition le terme d'interférence inter-utilisateurs est-il négligeable par rapport à a_i (justifier) ? Pourquoi l'UMTS utilise-t-il des codes de Gold pour différencier les utilisateurs de cellules différentes, mais pas pour différencier les utilisateurs d'une même cellule ?

f) Quels types de multiplexage sont utilisés respectivement par les réseaux de téléphonie mobile 2G (GSM), 3G (UMTS) et 4G ?

2 Exercices

2.1 Interférence entre symboles, débit et probabilité d'erreur (4 points)

On considère une transmission NRZ M-aire en bande de base sur un canal bruité (densité spectrale du bruit $N_0/2$) avec un émetteur de puissance P. L'objectif est de transmettre avec un débit binaire D maximal et une probabilité d'erreur **binaire** $P_{eb} < 10^{-4}$.

P et N_0 sont constants et $P/N_0 = 10^7 \mathrm{s}^{-1}$, de sorte qu'on a la relation suivante entre le débit binaire D et le rapport entre l'énergie E_b par élément binaire et N_0 :

$$\log D = 7 - \frac{1}{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\mathrm{dB}}$$

a) On suppose d'abord que la bande passante du canal est illimitée. Pour chaque valeur de M, quelle est la valeur minimale de E_b/N_0 assurant $P_{eb} < 10^{-4}$ (voir figure 2) ? Quelle valeur de M permet le débit maximal ?

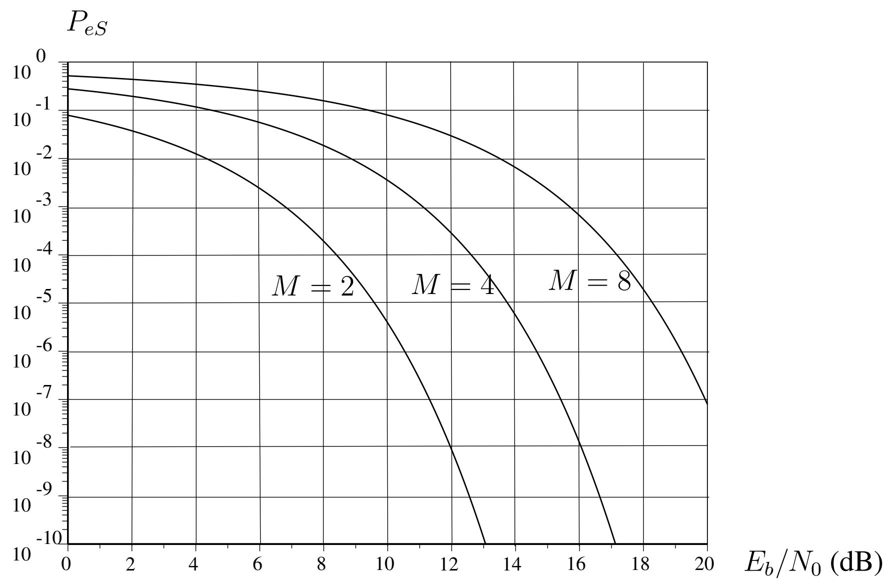

FIGURE 2 – Probabilité d'erreur **par symbole** pour un code NRZ à symboles M-aires.

b) Le canal est maintenant modélisé par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_c = 400$ kHz. Pour annuler l'interférence entre symboles, on utilise des impulsions en cosinus surélevé avec un facteur de retombée $\alpha = 0.6$. La densité spectrale de puissance du signal émis est représentée sur la figure 3.

Quelle est la rapidité de modulation R maximale ? Pour M = 2, 4 et 8, quels sont les débits correspondants respectifs D_2^{max}, D_4^{max} et D_8^{max} ? Calculer les valeurs correspondantes de $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$. A toutes fins utiles : $10\log(0.5) \simeq -3$ et $10\log(1.5) \simeq 1.8$.

c) Dans la question (a), on a considéré la limitation du débit par le bruit du canal. Dans la question (b), on a considéré la limitation du débit par la bande passante du canal. En tenant compte maintenant de ces deux contraintes, quelle valeur de M permet le débit maximal ?

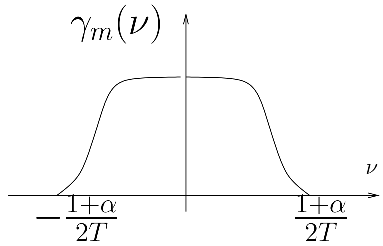

FIGURE 3 – Densité spectrale de puissance d'un signal de communication NRZ M-aire à impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α.

2.2 Diversité spatiale (8 points)

A partir de la 3G, les réseaux de téléphonie mobile exploitent la technique du *soft handover*. Il s'agit, pour un mobile, d'utiliser pour une même communication deux stations de base correspondant à des cellules différentes, moyennant une puissance réduite sur chaque liaison. L'avantage est de s'affranchir de la dégradation éventuelle d'une des liaisons, selon l'adage *"ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier"*.

On s'intéresse ici à la liaison descendante, du réseau vers le mobile. Celle-ci est modélisée selon le schéma de la figure 4. Le message binaire est codé en NRZ binaire avant d'être modulé et transmis. Pour avoir la même puissance totale d'émission que dans le cas mono-canal, le bit 0 se traduit par $a_0 = -1/\sqrt{2}$ (au lieu de -1) et le bit 1 par $a_1 = 1/\sqrt{2}$ (au lieu de 1). Chaque canal introduit un bruit, modélisé lors de l'échantillonnage par une variable aléatoire b_x (pour le 1er canal) ou b_y (pour le 2e), gaussienne centrée de variance σ^2. Après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on dispose donc pour chaque bit transmis de deux valeurs :

$$x = a_i + b_x$$
$$y = a_i + b_y$$

à partir desquelles doit être détecté le bit émis.

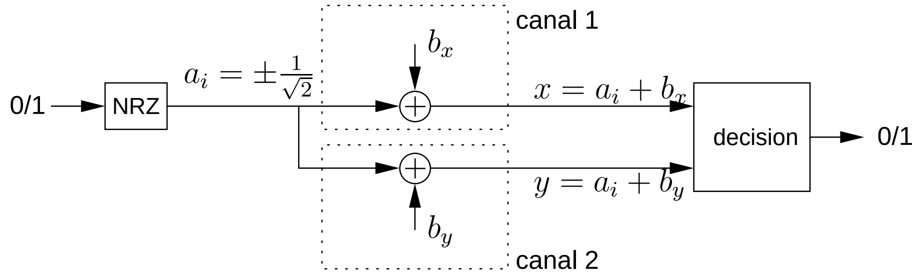

FIGURE 4 – Transmission *via* deux canaux.

La décision est fondée sur la position du point M de coordonnées $(x; y)$ dans le plan de la figure 5. Les points A_0 et A_1 correspondent à la transmission des bits 0 et 1 (respectivement) en l'absence de bruit de canal.

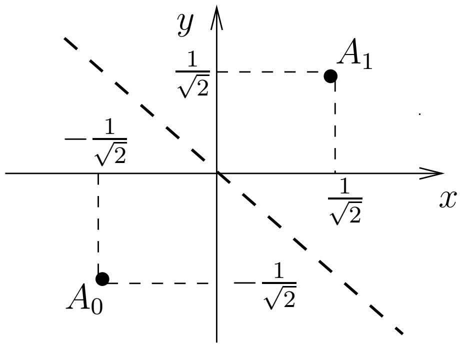

FIGURE 5 – Plan d'observation des échantillons reçus.

1) La règle de décision est celle du maximum *a posteriori* :

$$\mathrm{P}(s_0|M) > \mathrm{P}(s_1|M) \quad \Rightarrow \quad r_0$$
$$\mathrm{P}(s_1|M) > \mathrm{P}(s_0|M) \quad \Rightarrow \quad r_1$$

où s_i désigne l'émission du bit i et r_i la détection du bit i.

La densité de probabilité conditionnelle d'un point M sachant s_i est définie par :

$$\mathrm{p}(M|s_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-A_iM^2}{2\sigma^2}\right)$$

Les bits d'émission sont équiprobables. Montrer que la règle de décision est équivalente à :

$$A_0M < A_1M \quad \Rightarrow \quad r_0$$
$$A_1M < A_0M \quad \Rightarrow \quad r_1$$

c'est-à-dire que les zones de décision sont les demi-plans de part et d'autre de la médiatrice de $[A_0A_1]$ (diagonale en pointillés sur la figure).

2) Montrer que $\mathrm{P}(r_1|s_0) = Q(1/\sigma)$, la fonction Q étant définie par :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

Indications :

- L'équation de la médiatrice de $[A_0 A_1]$ est $y = -x$.
- $b = b_x + b_y$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $2\sigma^2$.

De même, on peut montrer que $\mathrm{P}(r_0|s_1) = Q(1/\sigma)$.

3) En déduire la probabilité d'erreur P_e. Comparer à celle qu'on obtiendrait en utilisant uniquement le 1er canal (avec la même puissance totale d'émission) : $Q(1/\sigma)$. Le soft-handover est-il intéressant ici ?

4) Supposons que le bruit augmente momentanément sur le 1er canal, portant la variance de b_x à $3\sigma^2$. Dans ce cas, le taux d'erreur en utilisant ce canal seul est de $Q(\frac{1}{\sigma\sqrt{3}})$. Quelle est la probabilité d'erreur obtenue en utilisant les deux canaux, sachant que la variance de b vaut alors $4\sigma^2$? Conclure.

3 Annexes

Règle de Bayes :
Soient A un événement et X une variable aléatoire de densité de probabilité p. Alors :

$$\mathrm{P}(A|x)\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}(x|A)\mathrm{P}(A)$$

Soient une variable aléatoire Z et deux réels a et b :

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \int_a^b \mathrm{p}(z) \mathrm{d}z$$

Densité de probabilité p d'une variable aléatoire gaussienne centrée Z de variance σ^2 :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{z^2}{2\sigma^2} \Big)$$