Correction de l'examen du 4 mai 2016

2.1 a) Pour $M=2$, $P_{eb} < 10^{-4} \Leftrightarrow P_{es} < 10^{-4}$: $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 8{,}5$

Pour $M=4$, $P_{eb} < 10^{-4} \Leftrightarrow P_{es} < 2.10^{-4}$: $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 12$

Pour $M=8$, $P_{eb} < 10^{-4} \Leftrightarrow P_{es} < 3.10^{-4}$: $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 16{,}5$

Comme $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ est une fonction décroissante du débit, le débit max est atteint pour $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ min, i.e. pour $M=2$

b) L'annulation de l'IES implique $\frac{1+\alpha}{2T} < \nu_c$

i.e : $R = \frac{1}{T} < \frac{2\nu_c}{1+\alpha} = \frac{2 \times 400.10^3}{1{,}6} = 0{,}5.10^6$ Baud

$D_2^{max} = R_{max} = 0{,}5$ Mbit/s $\rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{min} = 70 - 10 \log D$

$= 70 - 10 \log (0{,}5.10^6)$

$= 70 - 60 + 3$

$= 13$ dB

$D_4^{max} = 2R_{max} = 1$ Mbit/s $\rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{min} = 10$ dB

$D_8^{max} = 3R_{max} = 1{,}5$ Mbit/s $\rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{min} = 8{,}2$ dB

c) En tenant compte des 2 contraintes,

$$\left.\begin{array}{l} M=2 \Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 13 \\ M=4 \Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 12 \\ M=8 \Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} > 16.5 \end{array}\right\}$$

Donc c'est $M=4$ qui permet le débit maximal

(2.2) 1) $P(s_0 | M) \underset{n_1}{\overset{n_0}{\gtrless}} P(s_1 | M)$

$$p(M | s_0)\cancel{P(s_0)} \underset{n_1}{\overset{n_0}{\gtrless}} p(M | s_1)\cancel{P(s_1)} \quad (s_0 \text{ et } s_1 \text{ équiprobables})$$

$$\exp\left(-\frac{A_0M^2}{2\sigma^2}\right) \underset{n_1}{\overset{n_0}{\gtrless}} \exp\left(-\frac{A_1M^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$A_0M^2 \underset{n_0}{\overset{n_1}{\gtrless}} A_1M^2$$

Ainsi, le seuil de décision est la médiatrice de $[A_0A_1]$

$M \in$ demi-plan contenant $A_i \Rightarrow n_i$

2) $P(r_1 | s_0) = P(y > -x | s_0)$
$= P(x+y > 0 | s_0)$

Or $s_0 \Rightarrow x = a_0 + b_x$ et $y = a_0 + b_y$

Donc $P(r_1 | s_0) = P(b_x + b_y > -2a_0 | s_0)$
$= P(b > \sqrt{2})$
car b_x et b_y indépendants de s_0
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\sigma^2}\right) db$$
Chgt variable : $b' = \frac{b}{\sqrt{2}\sigma}$
$$= \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{2}\right) db$$
$= Q(1/\sigma)$

Même calcul et même résultat pour $P(r_0 | s_1)$

3) $P_e = P(\{(s_0, r_1) ; (s_1, r_0)\})$
$= P(s_0, r_1) + P(s_1, r_0)$ (évènements disjoints)
$= P(r_1 | s_0) P(s_0) + P(s_1 | r_1) P(r_1)$
$= Q(1/\sigma)$

→ Si le bruit est le même sur les 2 canaux, pas d'intérêt

4) En reprenant les calculs précédents, $P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right)$
Comme Q est décroissante,
P_e est meilleure qu'avec le 1er canal seul