Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique

L3 MI

Systèmes de Communication

Examen 1ère session (1h30) - 3 mai 2017

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être à la fois claires, courtes et précises. *L'examen comporte un seul exercice, qui aborde tous les chapitres de ce cours. Indiquez bien le numéro de chaque question à laquelle vous répondez. Il est généralement possible de traiter une question sans avoir réussi les précédentes. Evitez cependant de disperser vos réponses dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

On considère un système de téléphonie numérique cellulaire fixe. Une cellule correspond à une habitation. L'objectif est d'étudier les différentes étapes de transmission d'un signal de parole entre un terminal et la base.

Codage de source - Le signal vocal s est échantillonné à 8kHz, découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, le codeur de parole transmet donc, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$. **(1) Pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?**

Les échantillons $e(n)$ sont quantifiés sur 5 éléments binaires par échantillon, ils peuvent donc prendre 32 valeurs. **(2) Si les 32 valeurs sont équiprobables, quelle est l'entropie de e ?**

En fait, les valeurs de e ne sont pas du tout équiprobables, de sorte que l'entropie de e, notée $\mathrm{H}(e)$, vaut 3. On va réaliser un codage entropique, c'est-à-dire coder chacune des 32 valeurs possibles de e par un mot de longueur variable, de telle sorte que la longueur moyenne L soit minimale. **(3) D'après le théorème du codage, dans quel intervalle se situe L ?**

Au lieu de coder les échantillons de e un par un, on les groupe par 4. On note e^4 cette source. **(4) Sous l'hypothèse qu'elle est sans mémoire, quelle est son entropie** $\mathrm{H}(e^4)$ **?** Soit L_4 la longueur moyenne du mot de code attribué à un paquet de 4 échantillons de e. **(5) Donner un encadrement de L_4 et en déduire le nombre moyen (arrondi à l'entier près) d'éléments binaires par échantillon de e.**

En supposant que 40 bits sont nécessaires en tout au codage des a_i et de σ_e pour chaque trame, **(6) calculez le débit et comparez avec celui qu'on obtiendrait en quantifiant simplement chaque échantillon de s sur 8 éléments binaires.**

Codage de canal - Le flux binaire obtenu est codé par un codeur convolutif dont le schéma logique et le diagramme d'état sont représentés respectivement sur les figures 1 et 2.

(7) Quel est le débit après le codage de canal ? Le codeur est initialisé à l'état 00. **(8) Si le début de la séquence issue du codeur de source est 01001, quelle est la sortie correspondante du codeur de canal ?**

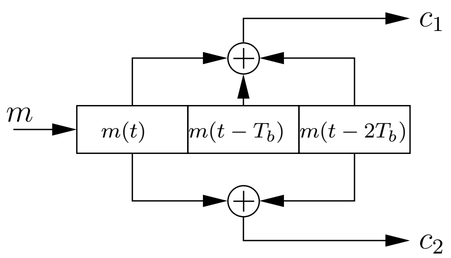

FIGURE 1 – Circuit d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2,1,3)$.

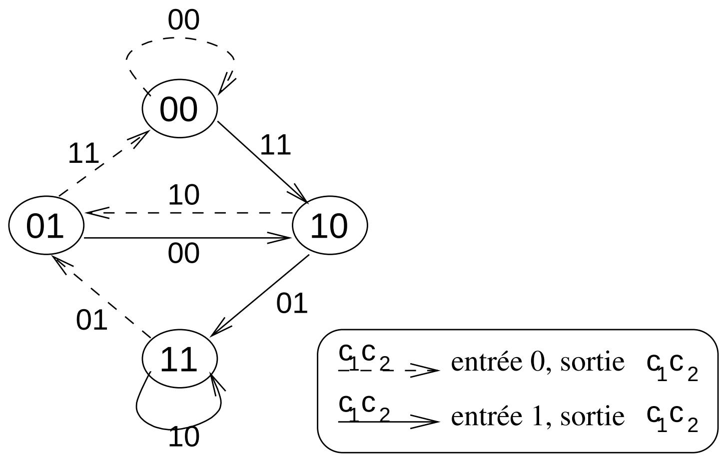

FIGURE 2 – Diagramme d'état du codeur $\mathcal{C}(2,1,3)$.

Transmission - En sortie du codeur de canal, on a un débit D d'environ 50 kbit/s. L'émetteur transmet ce flux binaire soit par modulation d'amplitude à 2 états (MDA-2), soit par modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à 4 états (MAQ-4). En supposant que le signal modulant utilise des impulsions en cosinus surélevé avec un facteur de retombée $\alpha = 0,5$, **(9) calculez la bande passante nécessaire pour la MDA-2 et pour la MAQ-4. Quelle modulation est la plus intéressante ?**

(10) De manière plus générale, à bande passante, probabilité d'erreur binaire et énergie par élément binaire fixées, classez les 3 grands types de modulation, MDA, MAQ et MDP (modulation de phase) selon le débit qu'elles permettent.

Comme dans toute transmision sur canal radio, le signal transmis va subir des réflexions multiples, qui peuvent se traduire par de l'interférence entre symboles. **(11) Si l'écart entre le chemin**

le plus court et le chemin le plus long est $\tau_{\max} = 0.1\,\mu$s, l'interférence entre symboles est-elle négligeable ?

Dans la suite, pour simplifier, la modulation utilisée est la MDA-2.

Multiplexage - En fait, le signal ne va pas être directement transmis ainsi, mais va être multiplexé. Contrairement aux réseaux mobiles, le réseau cellulaire considéré est constitué de cellules réparties de manière discontinue (voir figure 3). Toutes les cellules utilisent la même bande de fréquences. Au sein d'une cellule, cette bande est partagée par multiplexage fréquentiel. Ainsi, le même canal fréquentiel peut-être partagé par deux utilisateurs de cellules différentes. Le partage est réalisé par un multiplexage par code, en attribuant un code à chaque cellule.

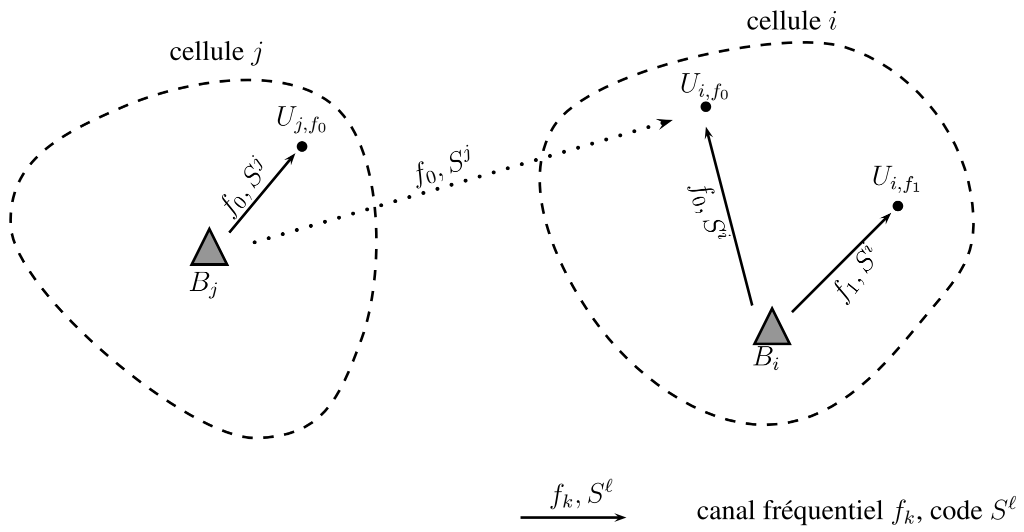

FIGURE 3 – Cellules et canaux.

On s'intéresse d'abord à ce second multiplexage. Lors de l'échange d'un message binaire entre un utilisateur U_{i,f_0} et sa station de base B_i, le message binaire décodé est parasité par ceux échangés entre les utilisateurs U_{j,f_0} et les bases B_j des cellules voisines sur le même canal fréquentiel f_0. Lors de l'émission par B_i d'un symbole binaire $a_{i,f_0} = \pm 1$, le symbole reçu par U_{i,f_0} après démodulation et décodage selon le code S^i attribué à la cellule i est :

$$\tilde{a}_{i,f_0} = a_{i,f_0} + \sum_{j \neq i} a_{j,f_0} \frac{S^i.S^j}{S^i.S^i} \frac{U_{i,f_0}B_i}{U_{i,f_0}B_j}$$

où $a_{j,f_0} = \pm 1$ et S^k représente le code attribué à la cellule k. $S^i.S^j$ désigne le produit scalaire entre S^i et S^j. $U_{i,f_0}B_k$ désigne la distance entre l'utilisateur U_{i,f_0} et la borne B_k. Supposons qu'on utilise des codes de Gold de longueur 255. **(12) Combien valent $S^i.S^j$ et $S^i.S^i$? Pourquoi le terme d'interférence inter-utilisateurs est-il négligeable par rapport à a_i (2 raisons) ?**

Le débit initial D étant de 50 kbit/s, **(13) quel est le débit apparent D' après multiplication de chaque symbole par un code de Gold ? (14) L'interférence entre symboles est-elle négligeable ? (15) Quel est la bande occupée par un utilisateur après ce multiplexage ? (16) Si la cellule dispose d'une bande passante de 200 MHz, combien d'utilisateurs peuvent-ils communiquer simultanément dans une cellule ?**

Supposons maintenant qu'on remplace le multiplexage fréquentiel classique par de l'OFDM (orthogonal frequency division multiplex). En notant p_k la porteuse d'un utilisateur k, lorsque N

utilisateurs d'une cellule émettent simultanément, le signal reçu par la base est :

$$S(t) = h(t) \sum_{k=1}^{N} X_k p_k(t)$$

où :

— $p_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_k t) \quad \forall\, k$;

— $X_k = \pm 1$;

— h représente la fonction porte, qui vaut 1 entre 0 et $T' = 1/D'$, et 0 en dehors de cet intervalle.

Les fréquences porteuses sont espacées de $\Delta f = D'$. Les porteuses sont dites orthogonales, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux porteuses vaut :

$$\langle p_m | p_n \rangle = \int_0^{T'} p_m(t) p_n(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le schéma d'émission/réception est représenté sur la figure 4 pour $N = 3$. On néglige le bruit du canal. **(17) Lors de la réception de $S(t)$, quel traitement appliquer sur chaque voie de réception pour obtenir $z_i = X_i$ sur la $i^{\text{ème}}$ voie ? (justifier)**

(18) En utilisant l'OFDM, combien d'utilisateurs peuvent se partager la bande passante de la cellule ?

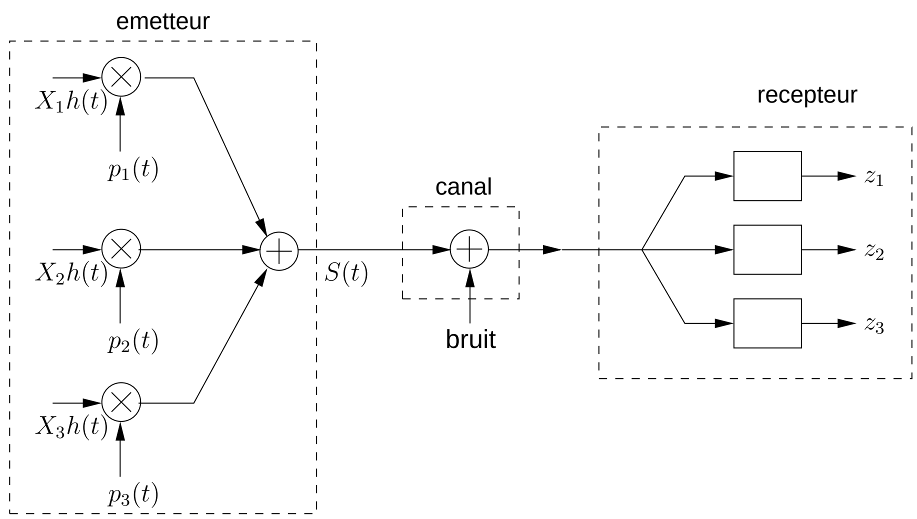

FIGURE 4 – Schéma de transmission OFDM à 3 porteuses.

Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$

Transmission

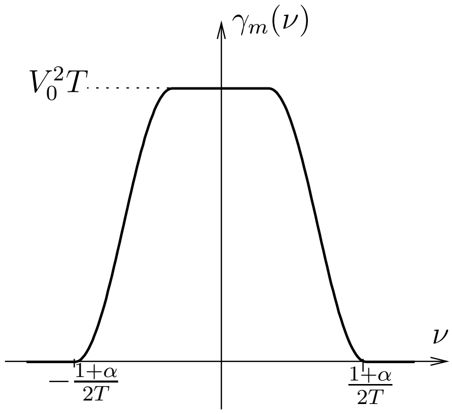

FIGURE 5 – Densité spectrale de puissance d'un signal modulant NRZ, pour des impulsions de base en cosinus surélevé avec un facteur de retombée α

Séquences de Gold

Soit une famille de $N+2$ séquences de Gold, issues du même générateur de longueur n ($N = 2^n - 1$), dans lesquelles les 0 sont remplacés par des -1. Quelles que soient S et S' appartenant à cette famille,

$$\begin{array}{rcl} |S.T^k(S)| & = & N \quad si \quad k=0 \\ |S.T^k(S)| & < & t(n) \quad \forall\, k \neq 0 \\ |S.T^k(S')| & < & t(n) \quad \forall\, k \end{array}$$

où $T^k(S)$ désigne la permutation circulaire de S à l'ordre k et $t(n) = 1 + 2^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \simeq 2\sqrt{N}$.