Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI
Systèmes de Communication

Examen final (1h30) - 2 mai 2022

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

1 Questions de cours (7 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc, comment calcule-t-on le syndrôme[1] ? S'il est égal au vecteur nul, que peut-on conclure ?

b) Donner la définition de l'entropie d'une source, en français, sans formule mathématique. Soit une source X d'entropie $H(X)$. En notant X^N la source constituée en groupant les symboles successifs de X par paquets de N, à quelle condition peut-on dire que $H(X^N) = NH(X)$?

c) On considère le codage perceptif d'un signal audio. Pour la séquence de signal dont le spectre d'amplitude et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1, quelle condition doit vérifier le bruit de codage ? Si le codage est effectué dans le domaine fréquentiel, qu'est-ce qui facilite la compression du signal ?

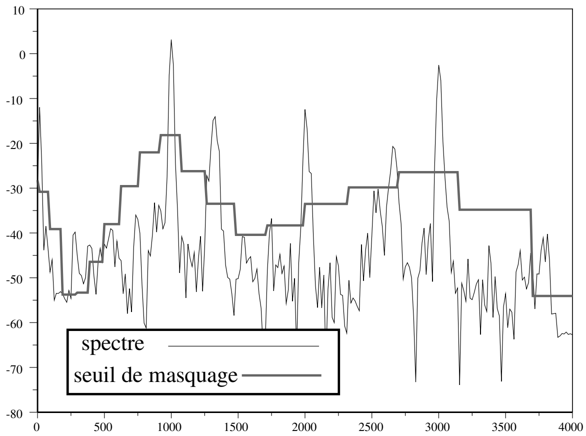

FIGURE 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

1. Pas de formule sans expliquer en français la signification de chaque variable !

d) En téléphonie mobile, après le codage de source, pourquoi le codage de canal ne code-t-il pas tous les bits de la même manière ? Pourquoi ajoute-t-on une étape d'entrelacement des bits ?

e) Quels types de multiplexage sont utilisés dans les télécommunications mobiles 2G (GSM), 3G (UMTS) et 4G, en plus du multiplexage spatial ?

2 Exercice : canaux, modulations, multiplexage (14 points)

NB : les 7 questions de cet exercice sont liées, mais chaque question peut être traitée sans avoir trouvé les résultats des questions précédentes. ***Sauf indication contraire, chaque réponse doit être précisément justifiée et chaque calcul doit être expliqué.***

On considère une transmission par modulation d'amplitude à 2 états (MDA-2) sur un canal bruité (densité spectrale du bruit $N_0/2$) avec un émetteur de puissance P fixée. L'objectif est de transmettre avec un débit binaire D maximal et une probabilité d'erreur binaire $P_{eb} < 10^{-3}$, sur une bande passante $\mathcal{B} = \frac{5}{2}10^6$ Hz, sans interférence entre symboles.

1) Le signal NRZ qui module la porteuse utilise des impulsions en cosinus surélevé avec un facteur de retombée $\alpha = \frac{1}{2}$. Sa densité spectrale de puissance est représentée sur la figure 2. Les figures 3 et 4 indiquent les relations entre le débit D, le rapport signal à bruit E_b/N_0 et la probabilité d'erreur par symbole P_{eS}. En tenant compte à la fois de la limitation de la bande passante et de la spécification $P_{eb} < 10^{-3}$, quel est le débit maximal D_0 ?

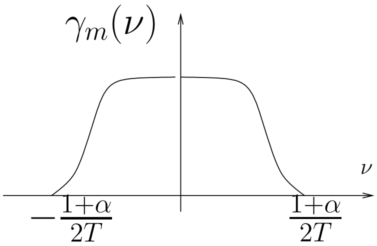

FIGURE 2 – Densité spectrale de puissance d'un signal de communication NRZ M-aire à impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α. Durée symbole T.

2) On dispose d'une bande passante de $8\mathcal{B}$ autour d'une fréquence f_0, à partager entre 4 utilisateurs ayant des débits respectifs D_0, D_0, $2D_0$ et $4D_0$, en utilisant un multiplexage fréquentiel (FDMA). Indiquez sur une échelle de fréquence une répartition possible de la bande passante entre les 4 utilisateurs (on ne demande pas de représenter le spectre).

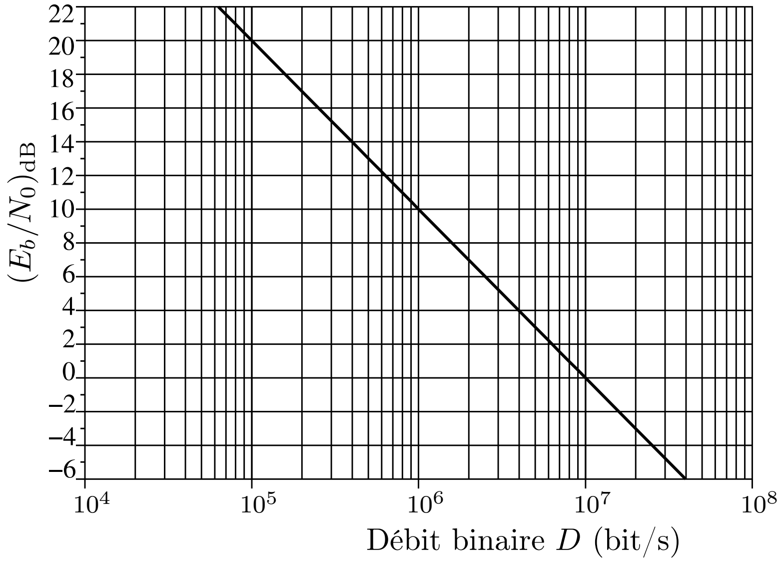

FIGURE 3 – Rapport $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$ en fonction du débit D.

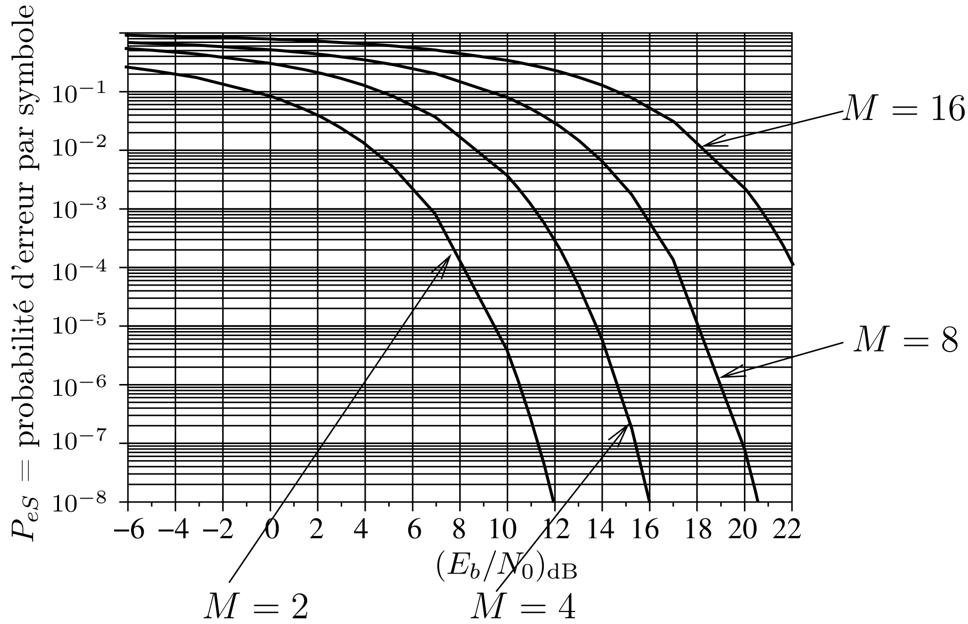

FIGURE 4 – Probabilité d'erreur **par symbole** pour un code NRZ à symboles M-aires.

3) On adopte maintenant un multiplexage par code, avec des codes OVSF (voir figure 5).

a) Quels codes attribuer aux différents utilisateurs ?

b) Pourquoi les codes de Gold ne sont-ils pas appropriés ici ?

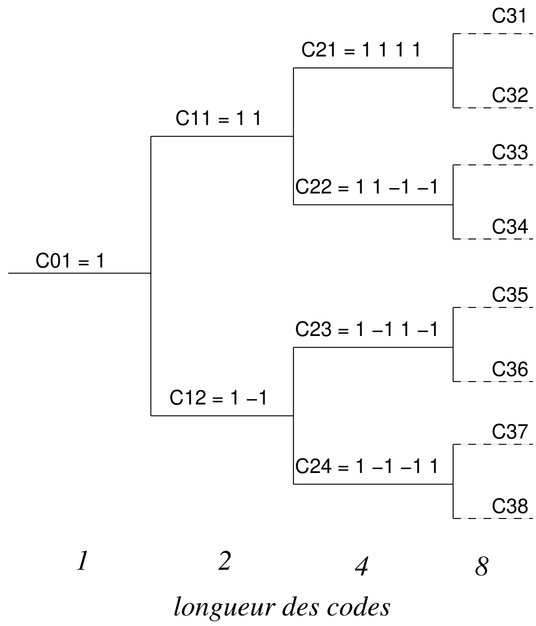

FIGURE 5 – Arbre de codes OVSF.

4) On considère enfin un partage du canal par OFDMA (*orthogonal frequency division multiple access*), sur 8 porteuses $p_1 \dots p_8$ émises simultanément. À chaque utilisateur on attribue un nombre de porteuses proportionnel à son débit : respectivement 1, 2 et 4 pour les débits D_0, $2D_0$ et $4D_0$. Chaque symbole émis, de durée $T = 1/D_0$, a pour expression :

$$S(t) = h(t) \sum_{k=1}^{8} X_k p_k(t)$$

où :

— $p_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_k t) \quad \forall\, k$;

— chaque porteuse subit une modulation binaire : $X_k = \pm V_0$;

— h représente la fonction porte, qui vaut 1 entre 0 et T, et 0 en dehors de cet intervalle.

Les fréquences porteuses sont espacées de $\Delta f = 1/T = D_0$. Les porteuses sont dites orthogonales, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux porteuses vaut :

$$\langle p_m | p_n \rangle = \int_0^T p_m(t) p_n(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si}\, m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Le schéma d'émission/réception est représenté sur la figure 6 pour une modulation OFDM à 3 porteuses. En négligeant le bruit du canal, lors de l'émission d'un symbole S, quel traitement appliquer au symbole sur chaque voie de réception pour obtenir $z_i = X_i$ sur la $i^{\text{ème}}$ voie de réception ?

b) On rappelle sur la figure 7 la DSP d'une modulation d'amplitude utilisant des impulsions de base rectangulaires. Dessinez les lobes principaux des DSP des signaux associées aux 8 porteuses, uniquement pour les fréquences positives. En négligeant les lobes secondaires, quelle est la bande passante nécessaire ?

c) Par combien pourrait-on alors multiplier D_0 pour occuper toute la bande disponible $8\mathcal{B}$?

d) En tenant compte de la spécification $P_{eb} < 10^{-3}$, quelle est finalement la nouvelle valeur de D_0 ?

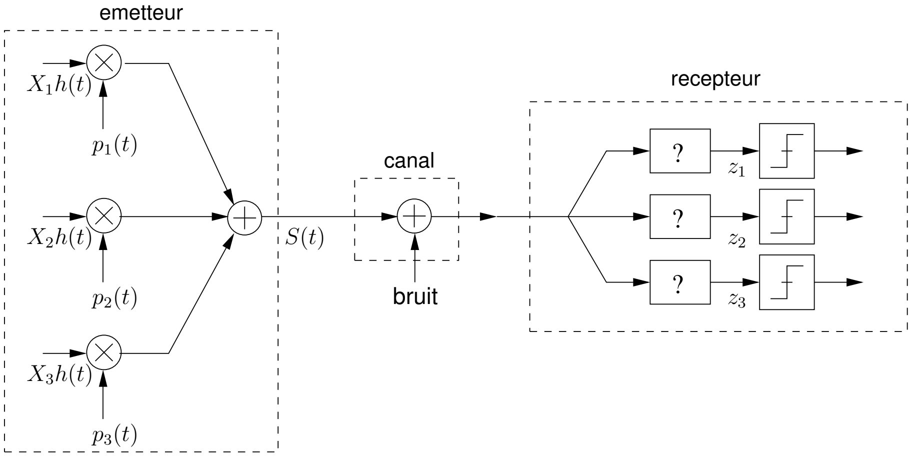

FIGURE 6 – Schéma de transmission OFDM.

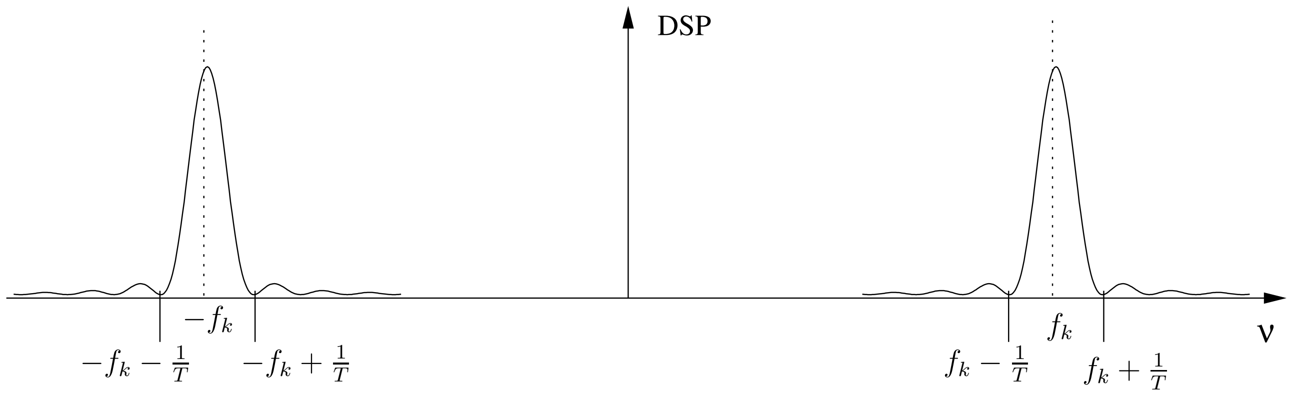

FIGURE 7 – Densité spectrale de puissance d'une modulation d'amplitude à impulsions de base rectangulaires, de fréquence porteuse f_k et de durée symbole T.

5) Considérons l'OFDM à 3 porteuses. Cette modulation se représente par une constellation dans l'espace comme indiqué sur la figure 8, chaque symbole ayant pour coordonnées ses coefficients (a_i, b_j, c_k).

En considérant un codage de Gray, indiquer sur chaque symbole de la modulation le mot binaire correspondant (sans expliquer).

6) Lorsqu'on émet un symbole $S_{ijk} = (a_i, b_j, c_k)$ sur un canal bruité, on reçoit, après démodulation, un symbole

$$Z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i + B_a \\ b_j + B_b \\ c_k + B_c \end{pmatrix}$$

où a_i, b_j et c_k valent chacun $\pm A$ et B_a, B_b et B_c sont des variables aléatoires gaussiennes centrées supposées **indépendantes**, de même variance σ^2 (donc de même densité de probabilité).

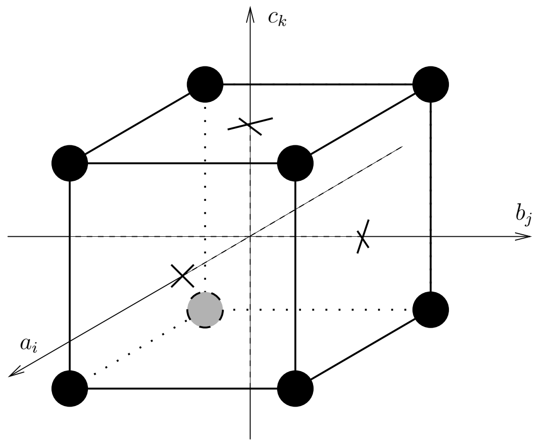

FIGURE 8 – Constellation d'une modulation OFDM à 3 porteuses.

La zone de décision associée à un symbole S_{ijk} est un huitième d'espace. Par exemple, la zone de décision de $S_{111} = (a_1, b_1, c_1) = (A, A, A)$ est le huitième d'espace défini par $\{z_a > 0, z_b > 0, z_c > 0\}$.

On note R_{ijk} l'événement correspondant à la détection du symbole S_{ijk}. Montrer que la probabilité de bonne détection lorsqu'on émet S_{111}, vaut :

$$\mathrm{P}(R_{111}|S_{111}) = \mathrm{P}(B_a > -A)^3$$

Vous justifierez soigneusement chaque étape de votre calcul.

7) On peut montrer que $\mathrm{P}(B_a > -A) = 1 - Q(A/\sigma)$, où Q désigne la fonction d'erreur complémentaire, définie par :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

Si le canal n'est pas trop bruité, $Q(A/\sigma) \ll 1$. Montrer alors que la probabilité de fausse détection lors de l'émission de S_{111} peut être approchée par :

$$\mathrm{P}(\overline{R_{111}}|S_{111}) \simeq 3Q(A/\sigma)$$

Annexes

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

Séquences de Gold

Soit une famille de $N+2$ séquences de Gold, issues du même générateur de longueur n ($N = 2^n - 1$), dans lesquelles les 0 sont remplacés par des -1. Quelles que soient S et S' appartenant à cette famille,

$$\begin{array}{rcl} |S.T^k(S)| & = & N \quad si \quad k = 0 \\ |S.T^k(S)| & < & t(n) \quad \forall\, k \neq 0 \\ |S.T^k(S')| & < & t(n) \quad \forall\, k \end{array}$$

où $T^k(S)$ désigne la permutation circulaire de S à l'ordre k et $t(n) = 1 + 2^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \simeq 2\sqrt{N}$.