

Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI : Systèmes de Communication

Examen final (1h30) - 10 mai 2023

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. Les trois parties de l'exercice peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Il est souvent possible de traiter une question sans avoir réussi la précédente. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (7 points)

- a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?
- b) Chaque point de la figure ci-dessous représente le couple de valeurs échantillonnées dans le récepteur d'une modulation MAQ, après démodulation et filtrage adapté.
— A quoi est due la rotation de la constellation par rapport aux symboles émis ?
— Que faut-il modifier dans le récepteur pour éviter cette rotation ?

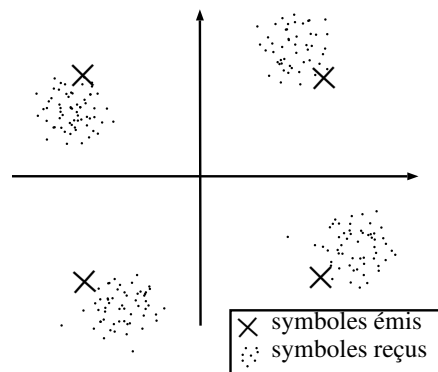


FIGURE 1 – Constellation des symboles d'une MAQ-4 en émission et en réception.

- c) Qu'est-ce qui permet de séparer le flux binaire d'un utilisateur de ceux des autres dans un multiplexage par code (CDMA) ?
- d) Pourquoi appelle-t-on les communications utilisant le CDMA des communications à *étalement de spectre* ?
- e) Quel est l'intérêt de l'OFDM par rapport à un multiplexage fréquentiel classique ?

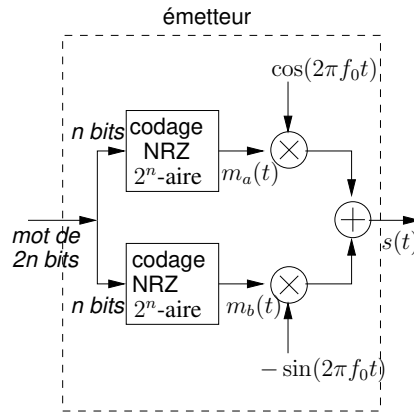


FIGURE 2 – Émetteur MAQ

f) En téléphonie mobile, après le codage de source, pourquoi le codage de canal ne code-t-il pas tous les bits de la même manière ? Pourquoi ajoute-t-on une étape d’entrelacement des bits ?

2 Exercice

NB : Toutes vos réponses doivent être justifiées, tous vos calculs et formules doivent être accompagnés d’explications en français.

2.1 Codage de canal en bloc (3 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Construire l’ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ?
- On reçoit le mot $r = 100101$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

2.2 Modulation et adaptation au canal (6 points)

On considère une transmission par modulation d’amplitude de deux porteuses en quadrature à 16 états (MAQ-16), dont le schéma de principe de l’émetteur est représenté sur la figure 2 (ici, $n = 2$).

- Expliquez en quoi consiste la démodulation dans le récepteur MAQ.
- Dessinez la constellation des symboles en indiquant sur chaque symbole le mot binaire qu’on peut lui associer en faisant un codage de Gray.
- Les modulateurs m_a et m_b sont formés en utilisant des impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α . Leur densité spectrale de puissance (DSP) est représentée sur la figure 3. Dessinez la DSP du signal émis s et donnez l’expression de sa largeur.

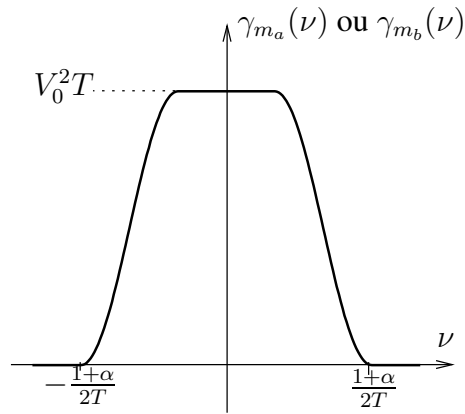


FIGURE 3 – DSP d'un signal NRZ durée symbole T avec des impulsions en cosinus surélevé.

d) Le canal a une bande passante \mathcal{B} autour de f_0 . Exprimez le débit maximal D sans interférence entre symboles permis par cette bande passante, en fonction de \mathcal{B} et α . Calculez ensuite sa valeur pour $\alpha = 0,5$ et $\mathcal{B} = 1,5$ MHz. Si le flux binaire est protégé par le codage de canal vu dans la section 2.1, quel est le débit utile de données D_u ?

2.3 Effet du bruit sur la probabilité d'erreur (4 points)

On note S_{ij} les symboles de la constellation MAQ-16, avec $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. La probabilité de détecter un symbole autre que le symbole S_{ij} en réception sachant que le symbole S_{ij} a été émis s'exprime :

$$P(\bar{R}_{ij}|S_{ij}) = K_{ij} \cdot Q\left(\frac{4E_b}{5N_0}\right)$$

où K_{ij} désigne le nombre de voisins à distance minimale de S_{ij} , E_b est l'énergie par élément binaire, $N_0/2$ est la DSP du bruit du canal et Q est la fonction définie par :

$$Q : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz$$

a) Sachant que les 16 symboles sont équiprobables, calculez la probabilité d'erreur par symbole P_{eS} en fonction de E_b/N_0 . Sachant qu'on utilise un codage de Gray, en déduire la probabilité d'erreur par élément binaire P_e .

b) Les figures 4 et 5 indiquent respectivement la relation entre le débit binaire D et le rapport E_b/N_0 , et la probabilité d'erreur binaire P_e en fonction de E_b/N_0 . Quel est le débit maximal permettant de respecter la contrainte $P_e < 10^{-4}$? En tenant compte de la limitation de la bande passante (section 2.2), quel est finalement le débit maximal ?

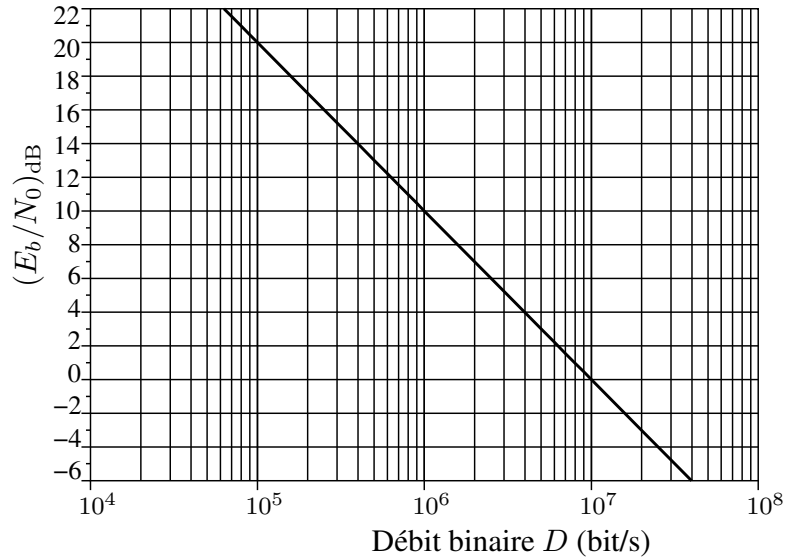


FIGURE 4 – Rapport $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ en fonction du débit D .

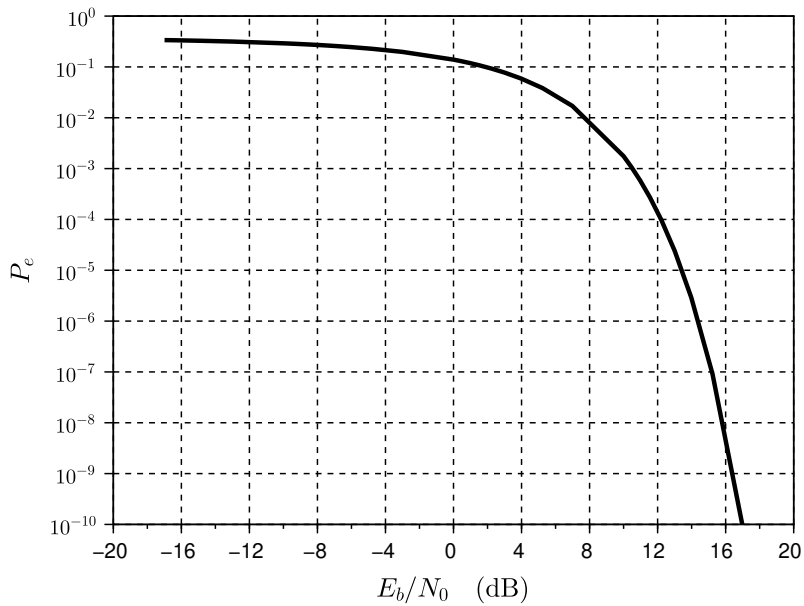


FIGURE 5 – Probabilité d'erreur binaire d'une MAQ-16 selon le rapport E_b/N_0 .

3 Annexes

Probabilités. Soient A et B deux événements.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Règle de Bayes : $P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$

Codes correcteurs : Pour un code en bloc linéaire de distance minimale d_{\min} , le pouvoir de détection vaut $d_{\min} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \rfloor$.