Université de Paris / UFR de Mathématiques et Informatique

L3 MI

Systèmes de Communication

Examen final (1h30) - 15 mai 2024

- Documents et appareils électroniques interdits
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
- **Tout calcul doit être expliqué.**
- Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (8 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Lors du décodage d'un code en bloc par la méthode du syndrome, que peut-on conclure si celui-ci est égal au vecteur nul ?

b) Un signal vocal s est échantillonné à 8 kHz, découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole transmet pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$. Pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?

Les échantillons $e(n)$ sont quantifiés sur 6 éléments binaires par échantillon, ils peuvent donc prendre 64 valeurs. Si les 64 valeurs sont équiprobables, quelle est l'entropie de e ?

c) On considère le codage perceptif d'un signal audio. Pour la séquence de signal dont le spectre d'amplitude et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1, quelle condition doit vérifier le bruit de codage ? Si l'on code le spectre du signal selon les principes du codage perceptif, pourquoi peut-on s'attendre à un fort taux de compression ?

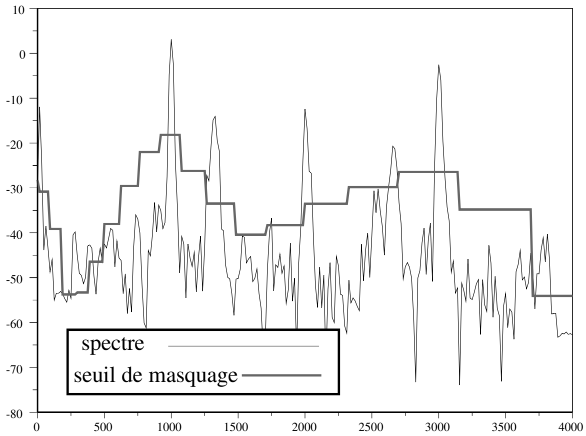

Figure 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

d) Soit une transmission par modulation d'amplitude à 4 états. On émet un symbole $S_k = x_k.\cos(2\pi f_0 t)$, avec f_0 la fréquence de la porteuse et $x_k \in \{\pm V_0; \pm 3V_0\}$. En réception, si la porteuse de réception est parfaitement synchronisée en phase avec celle d'émission, après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on reçoit x_k plus un bruit lié à celui du canal.

Que se passe-t-il si la porteuse de réception est déphasée de ϕ ? La figure 2 représente, pour une transmission donnée avec $V_0 = 1$, un point pour chaque échantillon de réception, d'abcisse la valeur de l'échantillon et d'ordonnée aléatoire [1]. Quelles sont les intervalles de décision associées à chaque symbole ? Pourquoi a-t-on un taux d'erreur élevé alors que les quatre nuages de points sont bien distincts ?

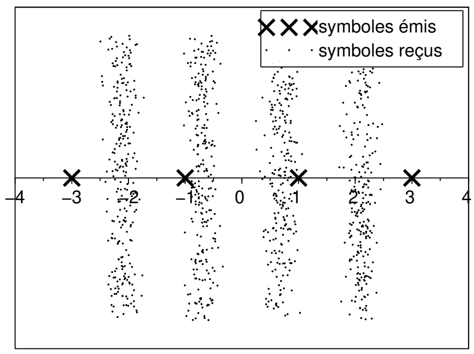

Figure 2 – Constellation des symboles d'une MDA-4 en émission et en réception.

e) Sur un canal radio-mobile, qu'est-ce que *l'effet Doppler* et comment se traduit-il sur le signal démodulé ?

1. Notez que l'ordonnée ici n'a pas de signification, elle sert juste à différencier les points.

f) Dans les systèmes de communications mobiles, le flux binaire issu du codage de source de la parole subit différents niveaux de codage de canal. Par exemple, le GSM ne code qu'une partie des bits (une à deux fois selon la classe), tandis que l'UMTS utilise 5 niveaux de codage. Expliquez ce choix de ne pas coder tous les bits et d'utiliser des niveaux de protection différents pour ceux qui sont codés. Expliquez à quoi sert l'entrelacement des bits qui suit le codage de canal.

2 Exercices

2.1 Modulations (6 points)

On considère la transmission d'un message binaire par une modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à $M^2 = 2^{2n}$ états (MAQ-2^{2n}).

Les symboles $S_{ij}(t)$ sont représentés par des couples (a_i, b_j), avec

$$a_i \text{ et } b_j \in \{\pm V; \pm 3V; \ldots; \pm(2^n - 1)V\}$$

Pour un symbole émis $S_{ij}(t)$, en réception, après démodulation puis filtrage adapté, les sorties des échantillonneurs valent respectivement :

$$\begin{aligned} z_c &= a_i + b_c \\ z_s &= b_j + b_s \end{aligned}$$

où b_c et b_s sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, de variance $\sigma^2 = N_0/T$, indépendantes entre elles et du symbole émis.

a) Pour une MAQ-16, dessiner la constellation des symboles d'émission et les zones de décision de chaque symbole. **Dans toutes les questions suivantes, on considère** M **quelconque.**

b) On émet un symbole $S_{ij} = (a_i, b_j)$ appartenant à l'intérieur de la constellation de la MAQ-2^{2n}, dont la zone de décision est un carré, comme illustré sur la figure 3. Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître ce symbole peut s'exprimer :

$$\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 1 - \mathrm{P}(-V < b_c < V)\mathrm{P}(-V < b_s < V)$$

c) En déduire que $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) \simeq 4Q(V/\sigma)$, en utilisant les résultats suivants :

$$\mathrm{P}(-V < b_c < V) = \mathrm{P}(-V < b_s < V) = 1 - 2Q\Big(\frac{V}{\sigma}\Big),$$

où la fonction Q est définie par :

$$Q : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z,$$

et, en considérant un bruit de canal modéré,

$$Q(V/\sigma) \ll 1.$$

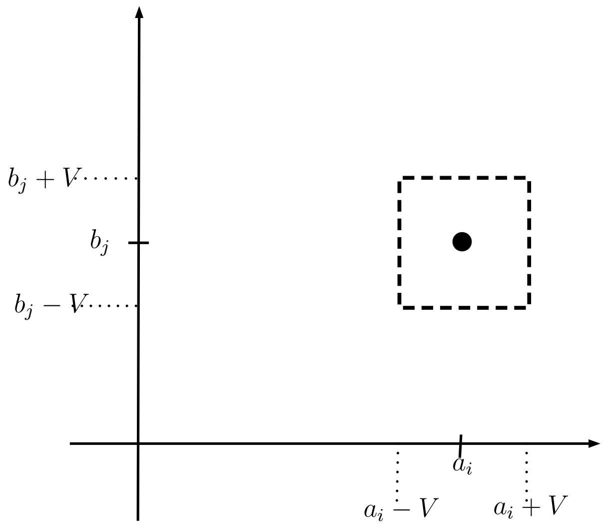

FIGURE 3 – Un symbole intérieur de la constellation MAQ-M^2 et la zone de décision associée.

d) Pour les symboles de la couronne extérieure de la constellation, sauf les 4 coins, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 3Q(V/\sigma)$. Pour les 4 coins, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 2Q(V/\sigma)$. Expliquez (sans calculs) pourquoi $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij})$ est différent selon la position du symbole.

e) À partir des résultats des questions c et d, calculer la probabilité d'erreur par symbole P_e, en supposant que les symboles sont équiprobables.

2.2 Multiplexage (6 points)

On dispose d'une bande passante $BP = 360$ MHz à partager entre 8 canaux de même débit. La transmission se fait par modulation de porteuses en quadrature à 4 états (MAQ-4).

a) On considère un multiplexage fréquentiel, avec des modulants utilisant des impulsions en cosinus surélevé. La densité spectrale de puissance du signal émis sur une porteuse est rappelé sur la figure 4.

Exprimer le débit binaire D de chaque canal en fonction de BP et α, puis le calculer pour $\alpha = 0,5$.

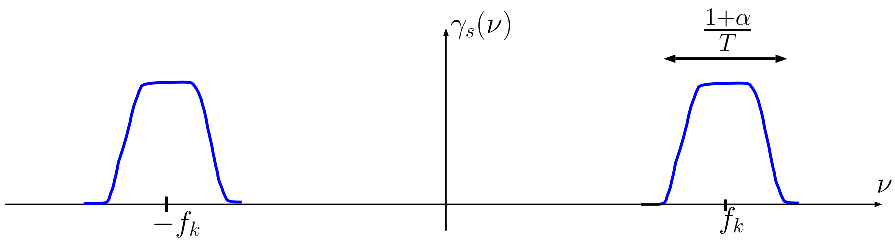

FIGURE 4 – Densité spectrale de puissance d'une modulation d'amplitude à impulsions de base en cosinus sur-élevé de facteur de retombée α, de fréquence porteuse f_k et de durée symbole T.

b) Si l'on remplace le multiplexage fréquentiel par un multiplexage par code, comment faut-il choisir les codes ? Que vaut le débit de chaque canal ?

c) On considère maintenant un multiplexage fréquentiel de type OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*), sur 8 couples de porteuses $(p_1, q_1) \dots (p_8, q_8)$. Sur chaque canal k, on émet des symboles MAQ-4 de durée T' de la forme :

$$S_k(t) = h(t)\Big(X_k p_k(t) + Y_k q_k(t)\Big)$$

où, $\forall\, k$ de 1 à 8 :

— $p_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T'}}\cos(2\pi f_k t)$, $q_k(t) = -\sqrt{\frac{2}{T'}}\sin(2\pi f_k t)$;

— $X_k = \pm V_0$, $Y_k = \pm V_0$;

— h représente la fonction porte, qui vaut 1 entre 0 et T', et 0 en dehors de cet intervalle.

Les fréquences porteuses sont espacées de $1/T'$. Les porteuses sont dites orthogonales, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux porteuses vaut :

$$\langle p_m | p_n \rangle = \int_0^{T'} p_m(t) p_n(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si}\, m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il en est de même pour deux porteuses q_m, q_n. Et :

$$\langle p_m | q_n \rangle = \int_0^{T'} p_m(t) q_n(t) \mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, m, n$$

En négligeant le bruit du canal, on reçoit :

$$R(t) = \sum_{k=1}^{8} S_k(t)$$

Quel traitement appliquer pour extraire le symbole du $i^{\text{ème}}$ canal, (X_i, Y_i) ?

On rappelle sur la figure 5 la DSP d'une modulation d'amplitude utilisant des impulsions de base rectangulaires. En considérant que la puissance est principalement concentrée dans le lobe principal, trouvez une relation entre BP et T', puis déduisez-en le débit D' de chaque canal en fonction de BP et calculez le. Comparez avec D.

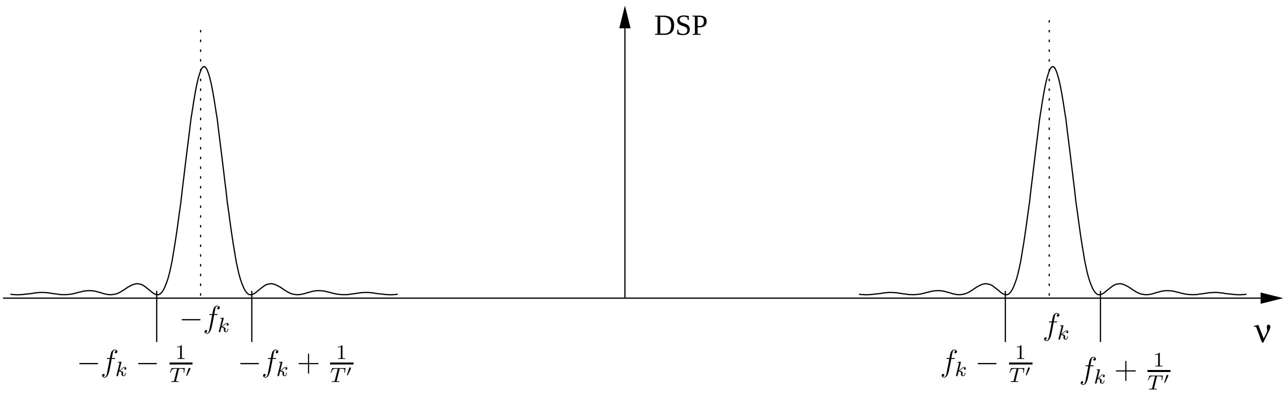

FIGURE 5 – Densité spectrale de puissance d'une modulation d'amplitude à impulsions de base rectangulaires, de fréquence porteuse f_k et de durée symbole T'.

Annexes

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$