

Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI : Systèmes de Communication

Examen final (1h30) - 19 mai 2025

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. Les trois parties (1, 2.1 et 2.2) peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Il est souvent possible de traiter une question sans avoir réussi la précédente.

1 Questions de cours (6 points)

- a) Soit un fichier texte constitué de caractères appartenant à un alphabet de taille 256, avec des probabilités d'occurrence très diverses. On peut coder chaque symbole sur 8 éléments binaires, mais on peut aussi utiliser un codage de Huffman. Qu'est-ce que cela change à l'entropie de la source et à la taille du fichier ? (justifier)
- b) Dans le codage d'une trame MPEG-1 couche 1, le nombre de bits par échantillon dans chaque bande fréquentielle i doit respecter la relation $n_i > \frac{P_{dB}^i - M_i + K}{6}$, où P_{dB}^i , M_i et K désignent respectivement la puissance du signal, le seuil de masquage dans la i^{eme} bande et une constante. Quelle contrainte auditive traduit cette formule ? Si le canal de communication impose un certain débit, quel problème peut poser cette contrainte sur les n_i ?
- c) Quel est l'avantage de la modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature (MAQ) par rapport à la modulation d'amplitude simple (MDA) ?
- d) Dans une communication mobile, pourquoi est-il important que la période Doppler soit très supérieure à la durée de plusieurs symboles ?
- e) En téléphonie mobile, après le codage de source, pourquoi le codage de canal ne code-t-il pas tous les bits de la même manière ? Pourquoi ajoute-t-on une étape d'entrelacement des bits ?

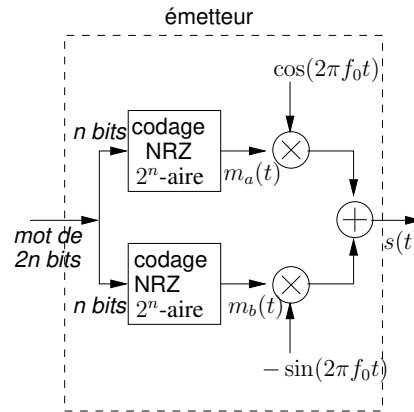


FIGURE 1 – Émetteur MAQ

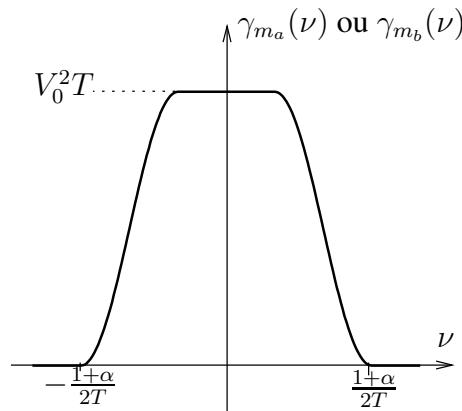


FIGURE 2 – DSP d'un signal NRZ de durée symbole T avec des impulsions en cosinus surélevé.

2 Exercices

NB : Toutes vos réponses doivent être justifiées, tous vos calculs et formules doivent être accompagnés d'explications en français.

2.1 Modulation et adaptation au canal (6 points)

On considère une transmission par modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à 16 états (MAQ-16), dont le schéma de principe de l'émetteur est représenté sur la figure 1 (ici, $n = 2$).

- Expliquez en quoi consiste la démodulation dans le récepteur MAQ.
- Dessinez la constellation des symboles en indiquant sur chaque symbole le mot binaire qu'on peut lui associer en faisant un codage de Gray.
- Les modulants m_a et m_b sont formés en utilisant des impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α . Leur densité spectrale de puissance (DSP) est représentée sur la figure 2. Dessinez la DSP du signal émis s et donnez l'expression de sa largeur.

d) Le canal a une bande passante $\mathcal{B}$ autour de f_0 . Exprimez le débit maximal D sans interférence entre symboles permis par cette bande passante, en fonction de $\mathcal{B}$ et α . Calculez ensuite sa valeur pour $\alpha = 0,5$ et $\mathcal{B} = 1,5$ MHz.

2.2 Multiplexage et modulation

On considère une transmission par modulation d'amplitude à 2 états (MDA-2) sur un canal bruité, de bande passante $8\mathcal{B}$ autour d'une fréquence f_0 , à partager entre 4 utilisateurs ayant des débits respectifs D_0 , D_0 , $2D_0$ et $4D_0$. Sur ce canal, une bande passante $\mathcal{B}$ permet de transmettre sans interférences entre symboles à un débit $D_0 = \frac{2}{3}\mathcal{B}$.

- 1) On partage le canal par multiplexage fréquentiel (FDMA). Indiquez sur une échelle de fréquence une répartition possible de la bande passante entre les 4 utilisateurs (on ne demande pas de représenter le spectre).
- 2) On adopte maintenant un multiplexage par code, avec des codes OVSF (voir figure 3).
 - a) Quels codes attribuer aux différents utilisateurs ? (justifier votre réponse).
 - b) Si l'utilisateur ayant un débit $2D$ souhaite transmettre le mot binaire $[1; 1; -1; 1]$, quelle est la séquence de chirps transmise ?
 - c) Pourquoi les codes de Gold ne sont-ils pas appropriés ici ?

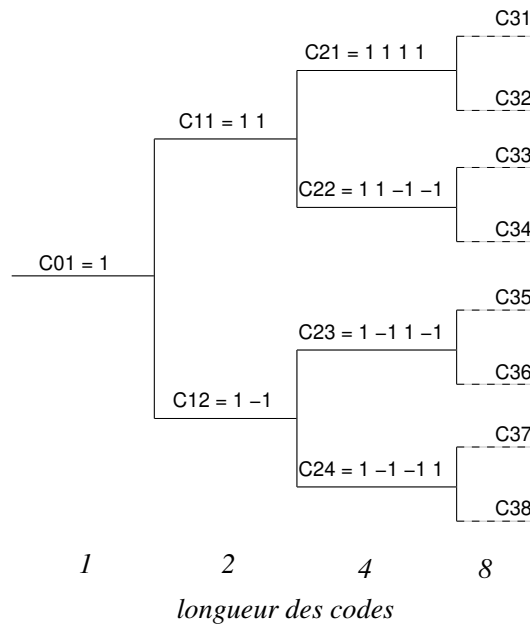


FIGURE 3 – Arbre de codes OVSF.

3) On considère enfin un partage du canal par OFDMA (*orthogonal frequency division multiple access*), sur 8 porteuses $p_1 \dots p_8$ émises simultanément. À chaque utilisateur on attribue un nombre de porteuses proportionnel à son débit : respectivement 1, 2 et 4 pour les débits D_0 , $2D_0$ et $4D_0$. Chaque symbole émis, de durée T , a pour expression :

$$S(t) = h(t) \sum_{k=1}^8 X_k p_k(t)$$

où :

- $p_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_k t) \quad \forall k$;
- chaque porteuse subit une modulation binaire : $X_k = \pm V_0$;
- h représente la fonction porte, qui vaut 1 entre 0 et T , et 0 en dehors de cet intervalle.

Les fréquences porteuses sont espacées de $\Delta f = 1/T$. Les porteuses sont dites orthogonales, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux porteuses vaut :

$$\langle p_m | p_n \rangle = \int_0^T p_m(t) p_n(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Le schéma d'émission/réception est représenté sur la figure 4 pour une modulation OFDM à 3 porteuses. En négligeant le bruit du canal, lors de l'émission d'un symbole S , quel traitement appliquer au symbole sur chaque voie de réception pour obtenir $z_i = X_i$ sur la $i^{\text{ème}}$ voie de réception ?
- On rappelle sur la figure 5 la DSP d'une modulation d'amplitude utilisant des impulsions de base rectangulaires. Dessinez les lobes principaux des DSP des signaux associés aux 8 porteuses, uniquement pour les fréquences positives. En négligeant les lobes secondaires, quelle est la bande passante nécessaire ?
- Par combien pourrait-on alors multiplier D_0 pour occuper toute la bande disponible $8B$?

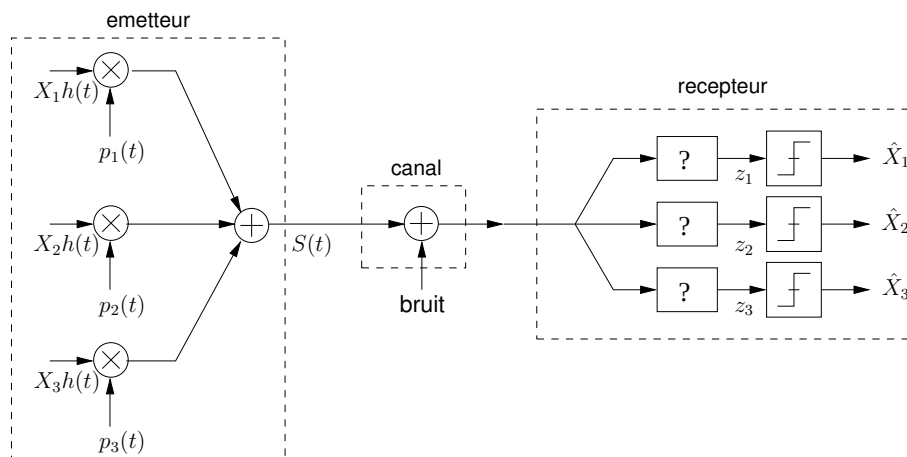


FIGURE 4 – Schéma de transmission OFDM.

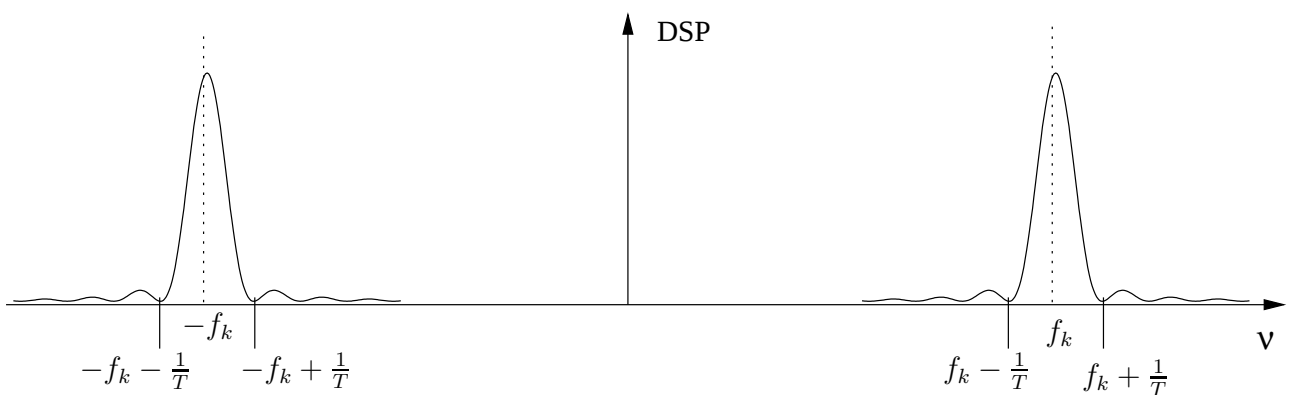


FIGURE 5 – Densité spectrale de puissance d'une modulation d'amplitude à impulsions de base rectangulaires, de fréquence porteuse f_k et de durée symbole T .

4) Considérons l'OFDM à 3 porteuses. Cette modulation se représente par une constellation dans l'espace comme indiqué sur la figure 6.

Lorsqu'on émet un symbole $S_{ijk} = (a_i, b_j, c_k)$ sur un canal bruité, on reçoit, après démodulation, un symbole

$$Z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i + B_a \\ b_j + B_b \\ c_k + B_c \end{pmatrix}$$

où B_a , B_b et B_c sont des variables aléatoires gaussiennes centrées supposées **indépendantes**, de même variance σ^2 (donc de même densité de probabilité).

La zone de décision associée à un symbole S_{ijk} est un huitième d'espace. Par exemple, la zone de décision de S_{111} est le huitième d'espace défini par $\{z_a > 0, z_b > 0, z_c > 0\}$.

On note R_{ijk} l'événement correspondant à la détection du symbole S_{ijk} . Montrer que la probabilité de bonne détection lorsqu'on émet S_{111} , vaut :

$$P(R_{111}|S_{111}) = P(B_a > -A)^3$$

Vous justifierez soigneusement chaque étape de votre calcul.

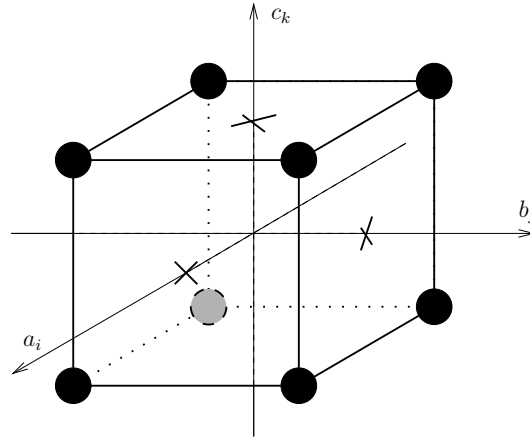


FIGURE 6 – Constellation d'une modulation OFDM à 3 porteuses.